Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Otimização discreta

3 Oct 2008 . 21:24

Otimização discreta

- Voltemos ao problema das mesas e cadeiras:

$$\text{Max } 90m + 60c$$

s.a.

$$2m + 2c \leq 14$$

$$2m + c \leq 8$$

$$m, c \geq 0$$

$$m = 1$$
$$c = 6$$

Otimização discreta

- Voltemos ao problema das mesas e cadeiras:

$$\text{Max } 90m + 60c$$

s.a.

$$2m + 2c \leq \boxed{15}$$

$$2m + c \leq 8$$

$$m, c \geq 0$$

$$m = 0.5$$
$$c = 7$$

Forma geral

- Problema de programação (linear) inteira mista (PIM):

$$z = \max \mathbf{cx} + \mathbf{dy}$$
$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Dy} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \in R_+^n, \mathbf{y} \in Z_+^p$$

- Problema de programação linear inteira (PI):

$$z = \max \mathbf{cx}$$
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \in Z_+^n$$

Forma geral

- Problema de programação 0-1 (binária) (PB):

$$z = \max \mathbf{cx}$$
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \in B^n$$

Exemplo: PB

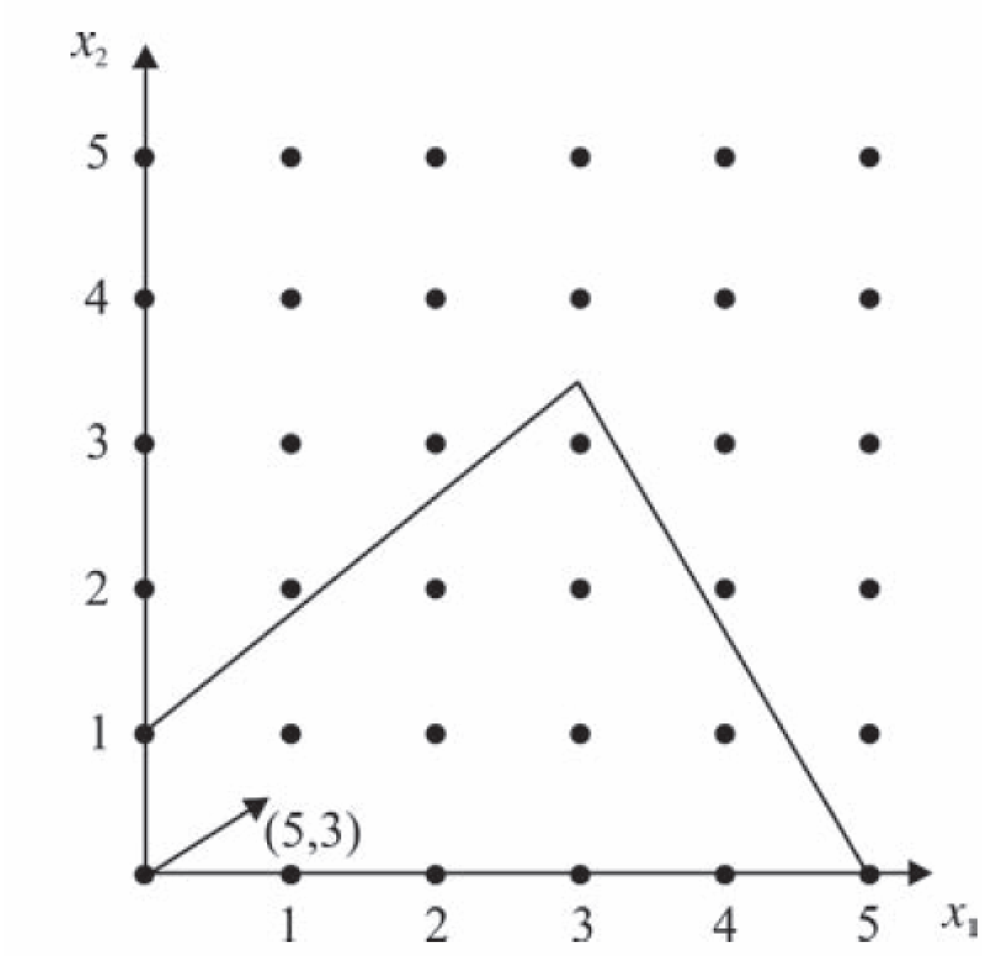
$$z = \max\ 2x_1 + 3x_2$$
$$6x_1 + 8x_2 \ \le 10$$
$$\mathbf{x} \in B^2$$

Região factível:

$$X = \{(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (0,\ 1)\}$$

Exemplo: PI

$$
\begin{aligned}
z = \max\ & 10x_1 + 6x_2 \\
& 9x_1 + 5x_2 \le 45 \\
& -4x_1 + 5x_2 \le 5 \\
& \mathbf{x} \in Z_+^2
\end{aligned}
$$

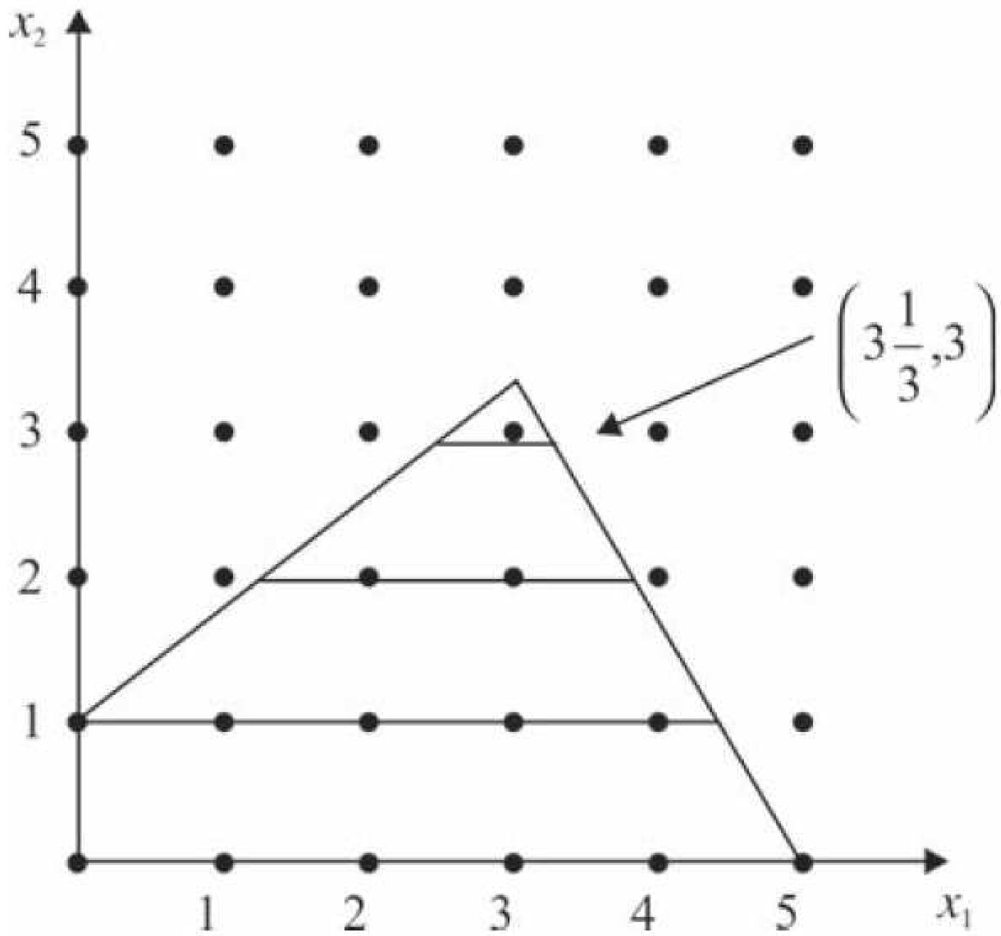


Região factível:

$X = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3),$
$(4,0), (4,1), (5,0)\}$

Exemplo: PIM

$$z = \max 10x_1 + 6x_2$$
$$9x_1 + 5x_2 \le 45$$
$$-4x_1 + 5x_2 \le 5$$
$$x_1 \in R^1_+,\; x_2 \in Z^1_+$$

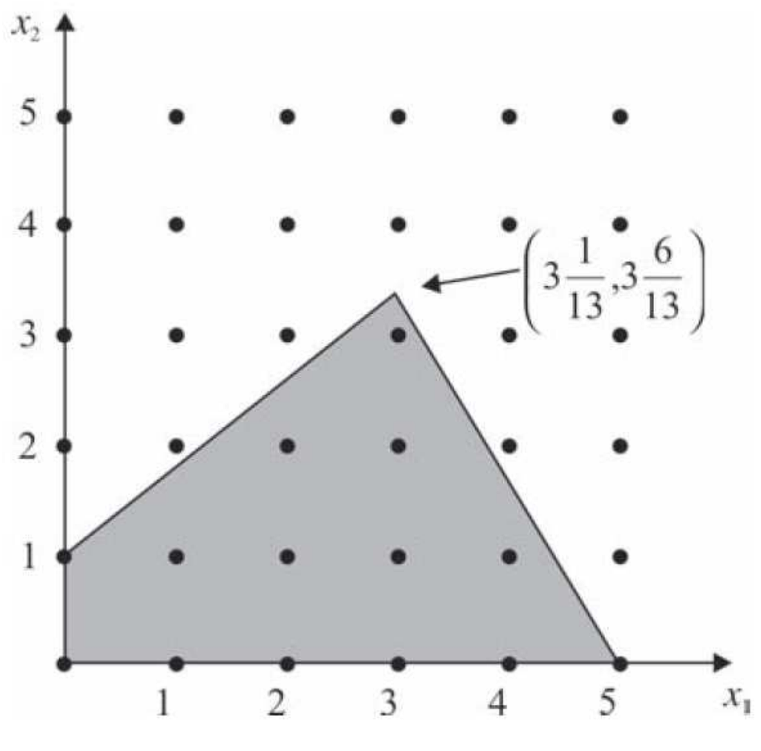


Região factível: os quatro segmentos de reta da figura

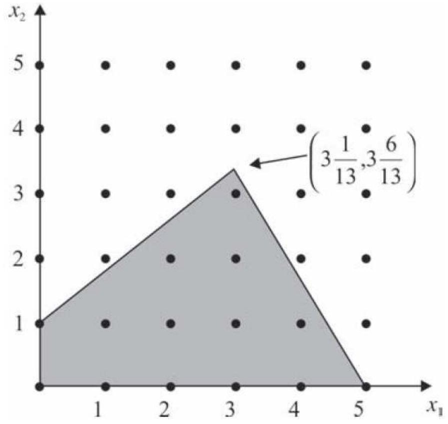
Exemplo: Relaxação linear (PL)

- Considere o exemplo "Otimização discreta" e relaxe as restrições de integralidade (PL):

$$\bar{z} = \max 10x_1 + 6x_2$$
$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$
$$-4x_1 + 5x_2 \leq 5$$
$$\mathbf{x} \in R_+^2$$



- A solução relaxada pode estar da solução ótima.



- Mais que isso: em problemas grandes, pode ser difícil, através de arredondamento, obter uma solução *factível*.

Relações entre PI, PIM e PL

- Seja X_{PI}, X_{PIM} e X_{PL} os conjuntos de soluções factíveis de PI, PIM e PL:

$$X_{PI} \subset X_{PL}$$

$$X_{PIM} \subset X_{PL}$$

- Isso implica que o valor da solução ótima de um PL será melhor que os valores das soluções ótimas dos PI e PIM associados.

	PL	PIM	PI
Nos exemplos:	$\bar{z} = 51\frac{7}{13}$	$51\frac{1}{3}$	50

- A relaxação tem um papel chave nos principais algoritmos de resolução de PI e PIM.

- Idéia: ela fornece um ***limitante***.