3ª Lista de Exercícios - Análise de Regressão – 1º semestre de 2011
Profª Cibele Russo - www.icmc.usp.br/~cibele
Entregar exercícios com * no dia 28/04/2011

---

1. Particionando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ de forma conveniente, determine sua inversa.

2. Determine a matriz A associada às formas quadráticas

   a. $f(x_1,x_2,x_3) = 2\,x_1^2 - 2\,x_1 x_2 + x_2^2 + 4\,x_1 x_3 - 3\,x_3^2$

   b*. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 3\,x_1 x_2 + 2\,x_1 x_3 + 3\,x_2 x_3 + 5\,x_3^2$

3. Mostre que as raízes características de uma matriz triangular são os elementos da diagonal principal.

4*. Sejam as variáveis aleatórias $Y_1 = X$ e $Y_2 = 1 - X$, em que $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$. Obtenha a matriz de variância e covariância de $(Y_1, Y_2)'$ e mostre que é positiva semidefinida.

5. Prove que $5\,x_1^2 + 4\,x_1 x_2 + 4\,x_2^2 > 0$ para todo $(x_1, x_2) \in R^2$.

6*. Seja $\boldsymbol{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Prove que se $\boldsymbol{Y}' A\, \boldsymbol{Y} \sim \chi^2_{r,\lambda}$ então $(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu})' A\, (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_r$ **.**

7*. Se $\boldsymbol{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, com $r(\Sigma) = n$, determine a distribuição de $\boldsymbol{Y}'\, \Sigma^{-1}\, \boldsymbol{Y}$.

8*. Se $Y_1, \ldots, Y_n$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, prove que $\overline{Y}$ e $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}{n-1}$ são variáveis aleatórias independentes. (Dica: Escreva $\overline{Y}$ e S^2em forma matricial).

9. Se $\boldsymbol{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, com $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)'$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu, \mu, \mu)'$ e $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$, determine o valor de a para que $Y_1 + Y_2 + Y_3$ e $Y_1 - Y_2 - Y_3$ sejam independentes.

10*. Considere o modelo de regressão linear simples

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, i = 1, \ldots, n,$$

com a suposição de normalidade $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ e ϵ_i não correlacionado com ϵ_j para $i, j = 1, \ldots, n$ e $i \neq j$. Reescreva o modelo acima utilizando a notação matricial, especificando cada elemento do modelo e mostre que nesse caso

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (X'X)^{-1}(X'\boldsymbol{Y}) = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ S_{xy}/S_{xx} \end{bmatrix}.$$