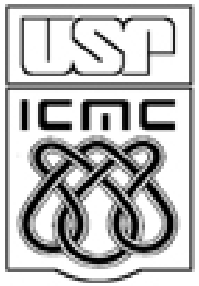


5. Medidas de dispersão

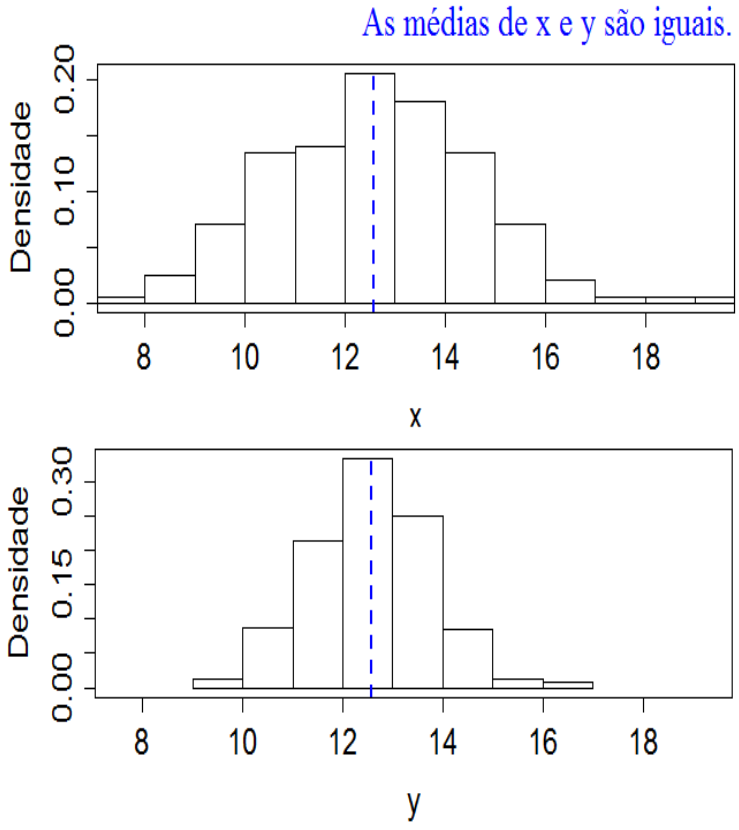
2010

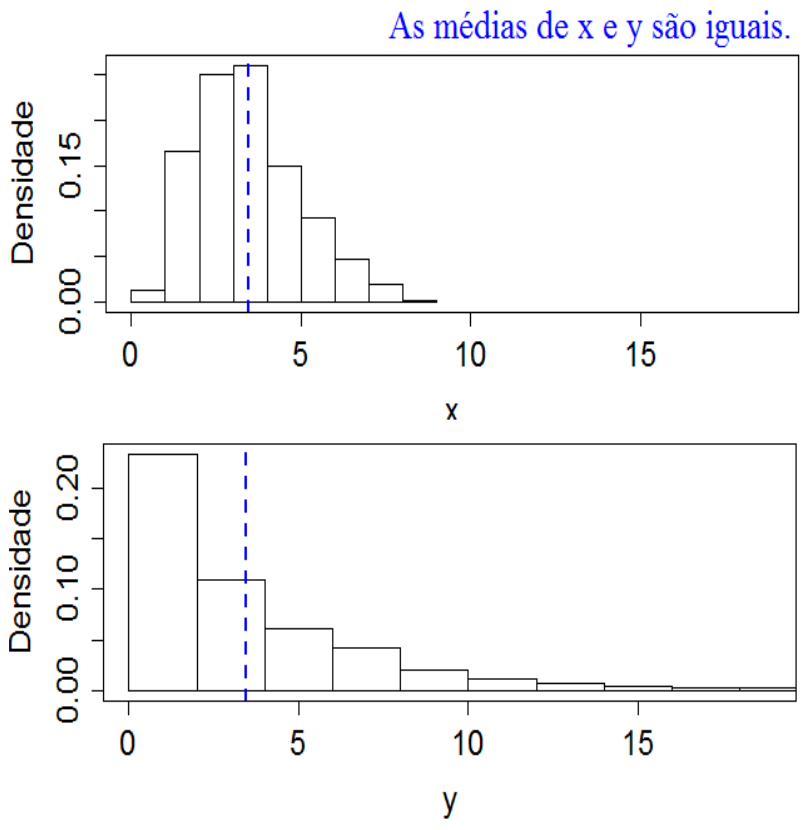
Chamadas de medidas de variabilidade (*dispersion* ou *variability*).

Quantificação das diferenças entre os valores x_1, x_2, ..., x_n.

Dispersão e concentração (ou precisão) são conceitos opostos.

Redução (drástica) de n observações a um só valor.





5.1. Amplitude (*range*)

Medida de variabilidade entre os extremos.

Dados ordenados: $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)}$.

$A = x_{(n)} - x_{(1)} = MAX - min.$

Propriedades. (1) $A \geq 0$. (2) $A = 0$ se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

5.2. Amplitude interquartil (*interquartile range*)

$d_q = Q_3 - Q_1$.

d_q é mais resistente do que A.

Exercícios. (1) Apresente a curva de sensibilidade (CS) de A.

(2) Qual a forma da CS de d_q?

Valor atípico (*outlier*)

Valor extremo, espúrio, aberrante, estranho, discrepante,...

Observação afastada do restante dos dados.

Critérios:

$x_i < Q_1 - 3d_q$ ou $x_i > Q_3 + 3d_q$: valor atípico severo.

$Q_1 - 3d_q < x_i < Q_1 - 1{,}5d_q$ ou

$Q_3 + 1{,}5d_q < x_i < Q_3 + 3d_q$: valor atípico moderado.

$Q_1 - 3d_q$: barreira externa inferior.

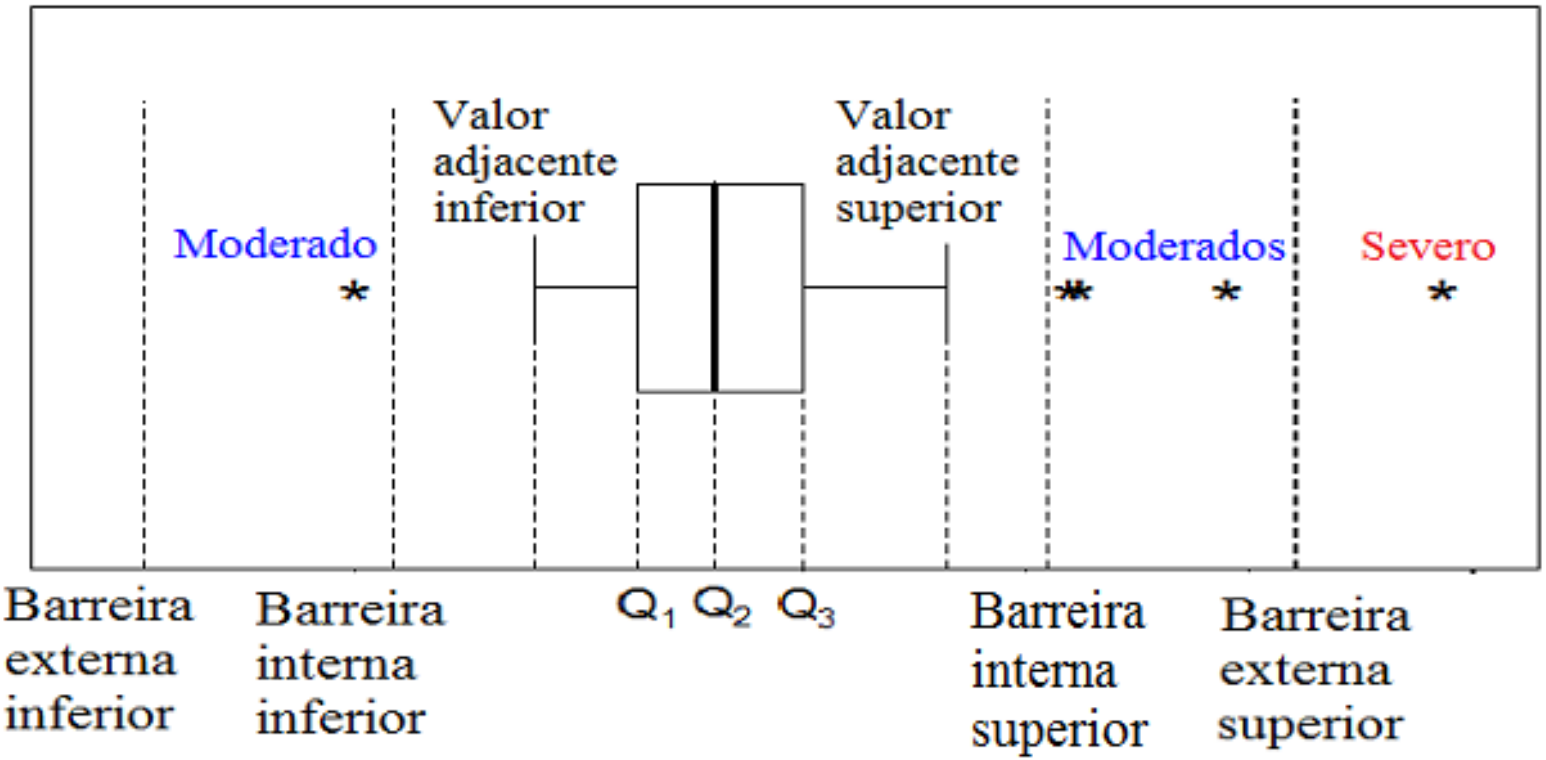
$Q_1 + 3d_q$: barreira externa superior.

$Q_1 - 1{,}5d_q$: barreira interna inferior.

$Q_1 + 1{,}5d_q$: barreira interna superior.

Gráfico de caixa (*box plot*)

Gráfico caixa-de-bigodes (*box-and-whisker plot*)



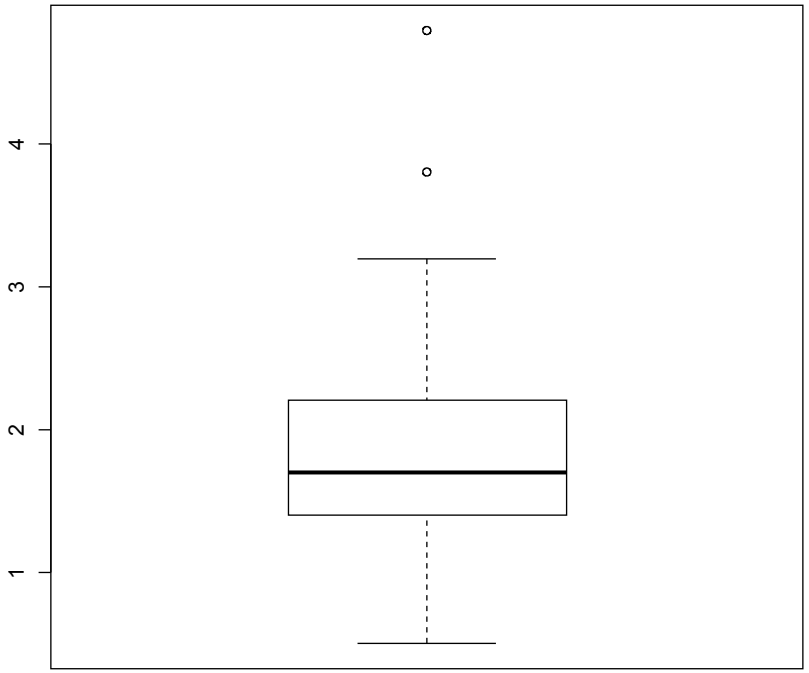
Valor adjacente inferior: menor valor no conjunto de dados que não é extremo (pode ser igual a $x_{(1)}$).

Valor adjacente superior: maior valor no conjunto de dados que não é extremo pode ser igual a $x_{(n)}$.

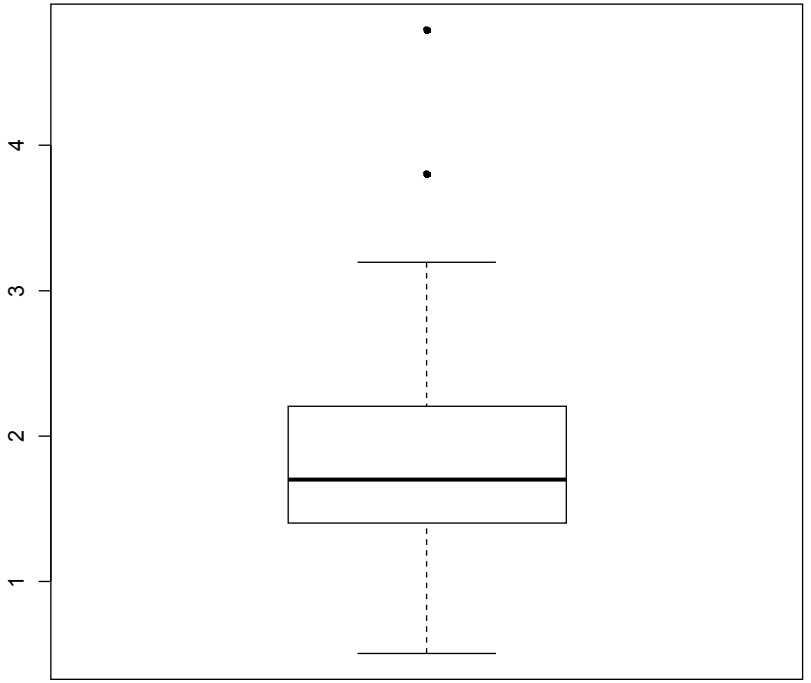
Gráfico de caixa

```
x = c(1.5, 1.9, 1.7, 1.6, 3.8, 1.3, 2.2, 1.8, 1.3, 0.5, 1.6, 1.4, 1.7, 1.7,
1.9, 0.7, 2.2, 2.3, 2.4, 2.3, 1.8, 2.7, 1.3, 1.7, 2.0, 1.1, 2.1, 1.6, 1.3,
2.2, 1.5, 2.3, 1.1, 1.8, 1.2, 2.0, 1.5, 1.5, 2.6, 1.6, 1.4, 2.2, 1.5, 1.2,
2.0, 1.3, 2.6, 1.9, 1.3, 2.4, 3.2, 1.9, 4.8)
```

```
> boxplot(x)
```



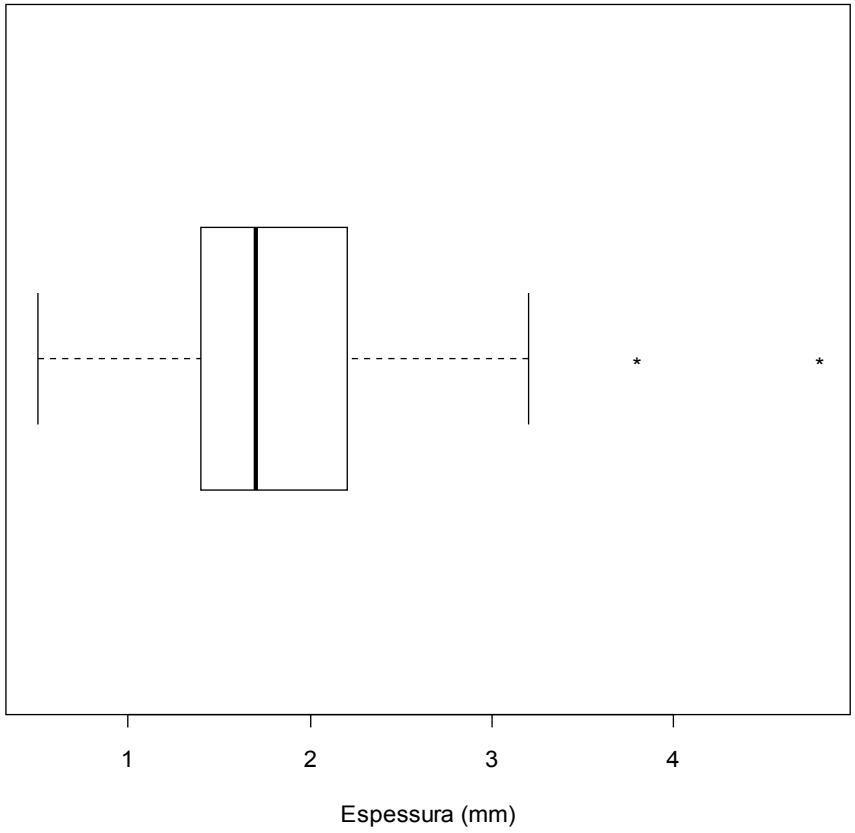

```
> boxplot(x, pch = 20)
```



Obs. Na construção do gráfico de caixas, quanto maior for n, melhor.

Gráfico de caixa

```
> boxplot(x, pch = "*",
horizontal = TRUE, xlab =
"Espessura (mm)")
```




```
> bx = boxplot(x, plot = FALSE)
> names(bx)
[1] "stats" "n"     "conf"
"out"   "group" "names"
```

`bx$stats`: valor adjacente inferior, Q_1, Q_2, Q_3 e valor adjacente superior.

`bx$n`: número de observações.

`bx$out`: observações extremas.

```
> bx$stats
     [,1]
[1,]  0.5
[2,]  1.4
[3,]  1.7
[4,]  2.2
[5,]  3.2
```

```
> class(bx$stats)
[1] "matrix"
```

Gráfico de caixa

```
> boxplot(x, pch = "*", horizontal = TRUE, xlab = "Espessura (mm)")
> identify(bx$out, rep(1, length(bx$out)), match(bx$out, x))
```

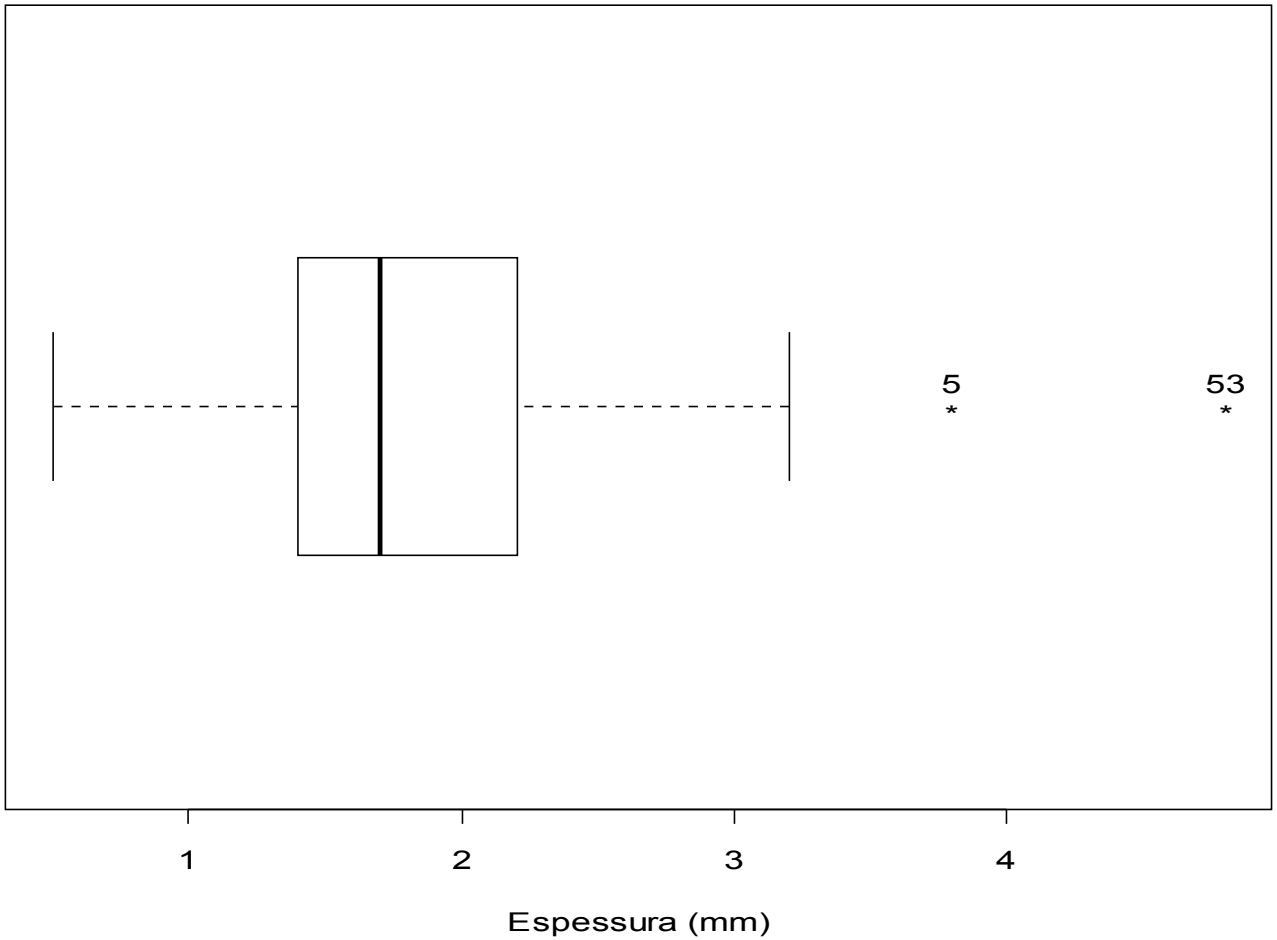
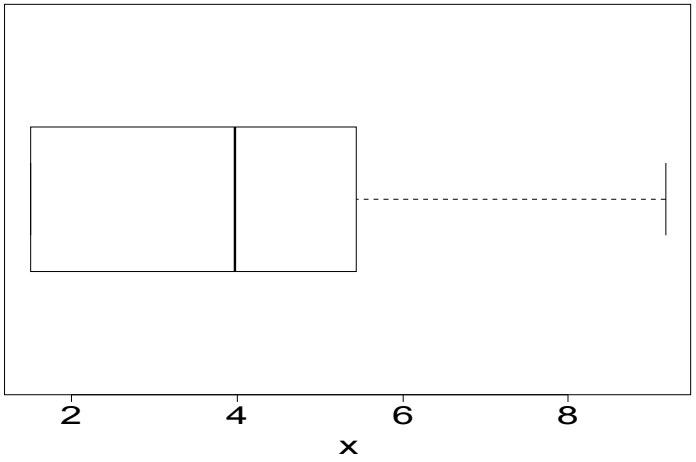
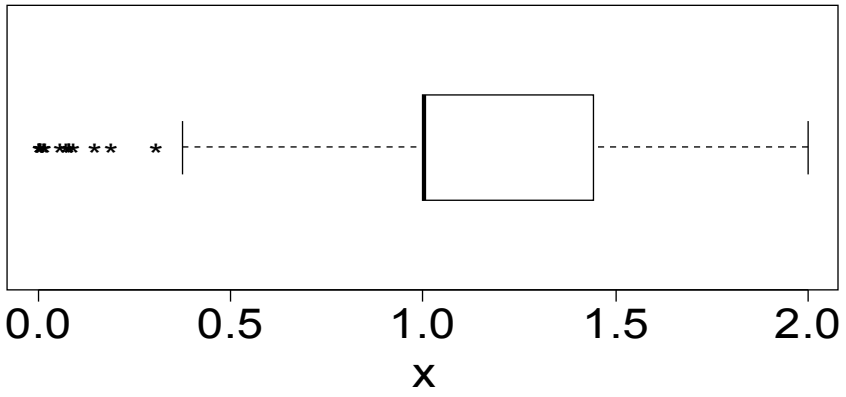
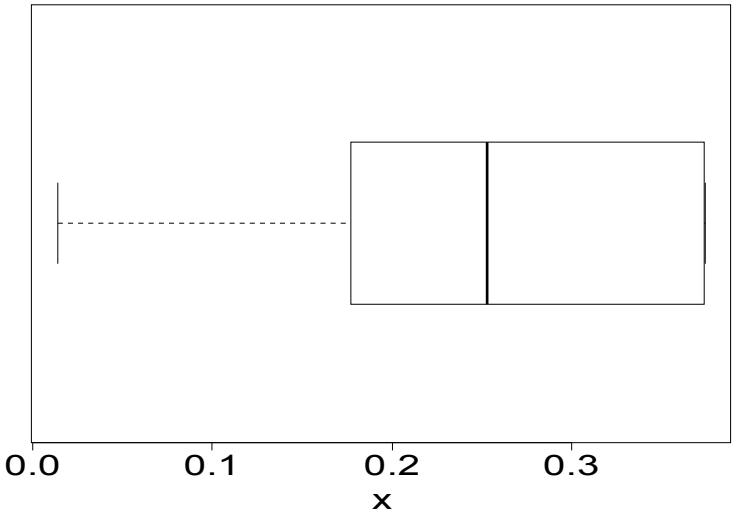
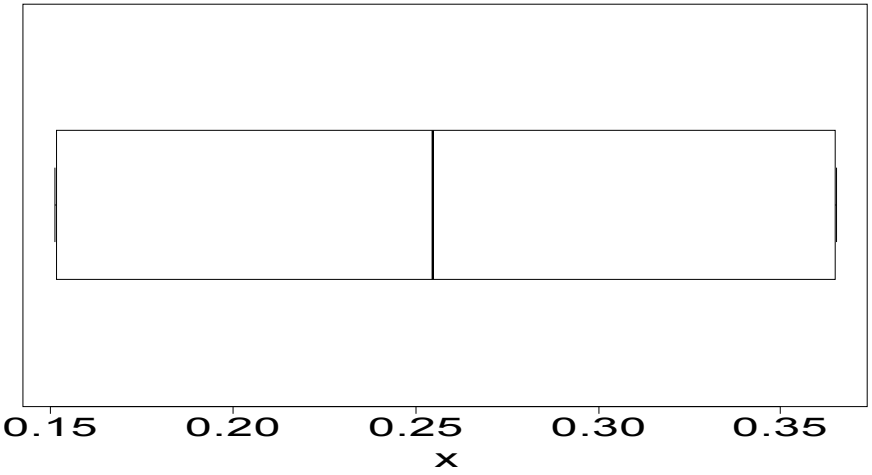


Gráfico de caixa





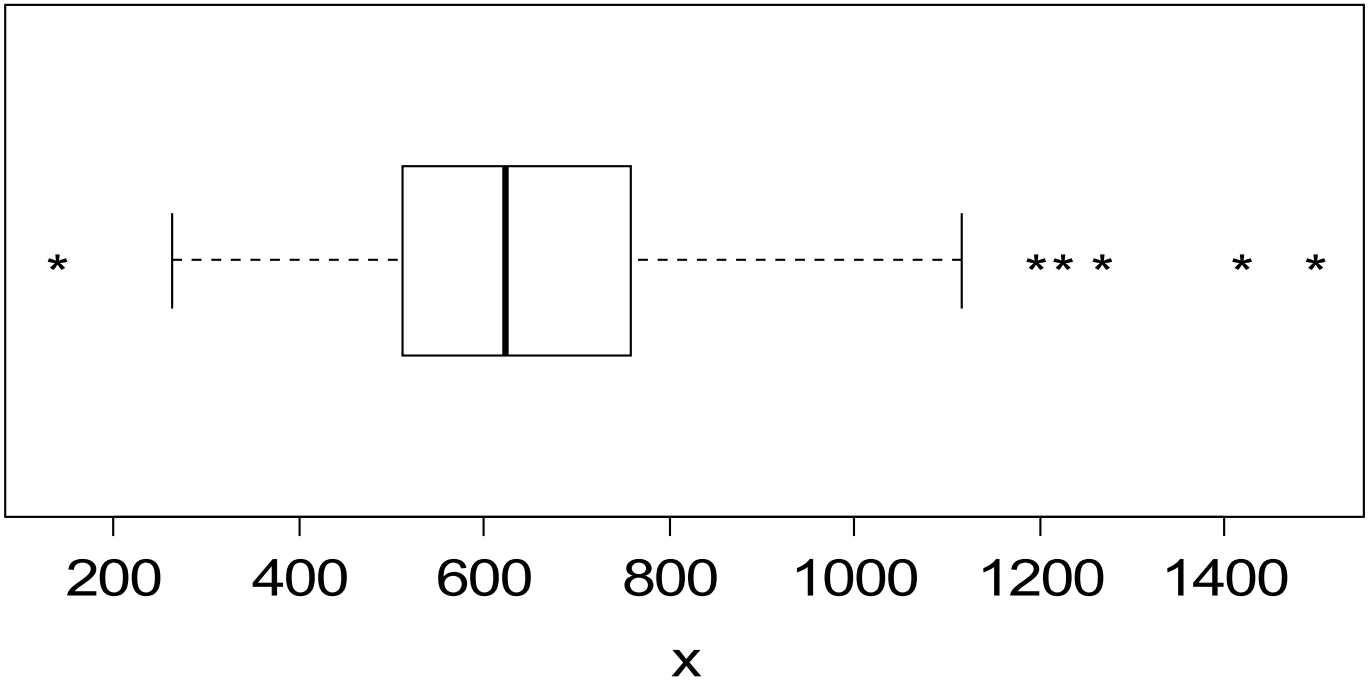




Exercício. Descreva conjuntos de dados correspondentes a cada um dos gráficos.

Gráfico de caixa

O que é possível observar em um gráfico de caixa?



Medida de posição ($M = Q_2$). Medida de dispersão ($d_q = Q_3 - Q_1$).

Simetria. Valores extremos.

5.3. Desvio médio ou desvio absoluto médio (*mean absolute deviation*)

$$dm = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \bar{x} \right|.$$

Obs. (1). A mediana (M) pode ser usada no lugar da média.

(2) Não é uma medida resistente.

5.4. Desvio absoluto mediano (*median absolute deviation*).

M = mediana(x_1, x_2,...,x_n).

MAD = mediana($|x_1 - M|$, $|x_2 - M|$, ..., $|x_n - M|$).

Obs. MAD é uma medida resistente.

5.5. Variância (*variance*)

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2, \quad n \geq 2.$$

Obs. (1). Unidade de s^2 é a unidade de x^2.

(2) Não é uma medida resistente.

(3) Importante em Inferência Estatística.

Exercício. Prove que $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$.

5.6. Desvio padrão (*standard deviation*)

$$s = \sqrt{s^2} = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Obs. (1). Unidade de s é a mesma unidade de x.

(2) Não é uma medida resistente.

Propriedades da variância

P1. Se $y_i = a + x_i$, i = 1,...,n, a um número real, então $s_y^2 = s_x^2$.

P2. Se $y_i = bx_i$, i = 1,...,n, b um número real, então $s_y^2 = b^2 s_x^2$.

Obs. $s_y = |b| s_x$.

P3. Se $y_i = a + bx_i$, i = 1,...,n, a e b números reais, então $s_y^2 = b^2 s_x^2$

P4. Se as n observações compõem g grupos (g ≥ 2), cada um com $n_j \geq 2$ observações e $n_1 + n_2 + ... + n_g = n$, então

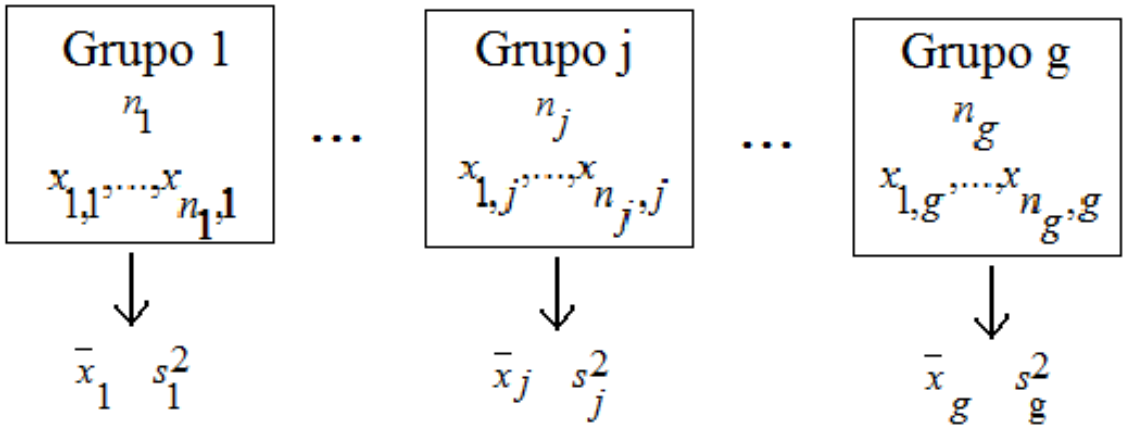
$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad \text{(variação total em relação à média)}$$

$$= \sum_{j=1}^{g} (n_j - 1)s_j^2 + \sum_{j=1}^{g} n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2.$$

Obs. Variação total = variação intragrupos + variação entre grupos.

Total variation = within groups variation + between groups variation.

Propriedades da variância



$$\bar{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{m=1}^{n_j} x_{m,j}, \quad j = 1,\ldots,g. \qquad \bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + \cdots + n_g\bar{x}_g}{n_1 + \cdots + n_g} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{g} n_j\bar{x}_j.$$

$$s_j^2 = \frac{1}{n_j - 1}\sum_{m=1}^{n_j}\left(x_{j,m} - \bar{x}_j\right)^2, \quad j = 1,\ldots,g.$$

Exemplo – dados na lâmina 6

```
x = c(1.5, 1.9, 1.7, 1.6, 3.8, 1.3, 2.2, 1.8, 1.3, 0.5, 1.6, 1.4, 1.7, 1.7,
1.9, 0.7, 2.2, 2.3, 2.4, 2.3, 1.8, 2.7, 1.3, 1.7, 2.0, 1.1, 2.1, 1.6, 1.3,
2.2, 1.5, 2.3, 1.1, 1.8, 1.2, 2.0, 1.5, 1.5, 2.6, 1.6, 1.4, 2.2, 1.5, 1.2,
2.0, 1.3, 2.6, 1.9, 1.3, 2.4, 3.2, 1.9, 4.8)

> var(x)

[1] 0.5059652

> sd(x)

[1] 0.7113123

> xb = mean(x)

> (dm = mean(abs(x - xb)))

[1] 0.498042

 > M = median(x)

 > (MAD = median(abs(x - M)))

 [1] 0.4
```

Exercício. Consulte a ajuda da função `mad (? mad)`.

Exemplo – dados na lâmina 6

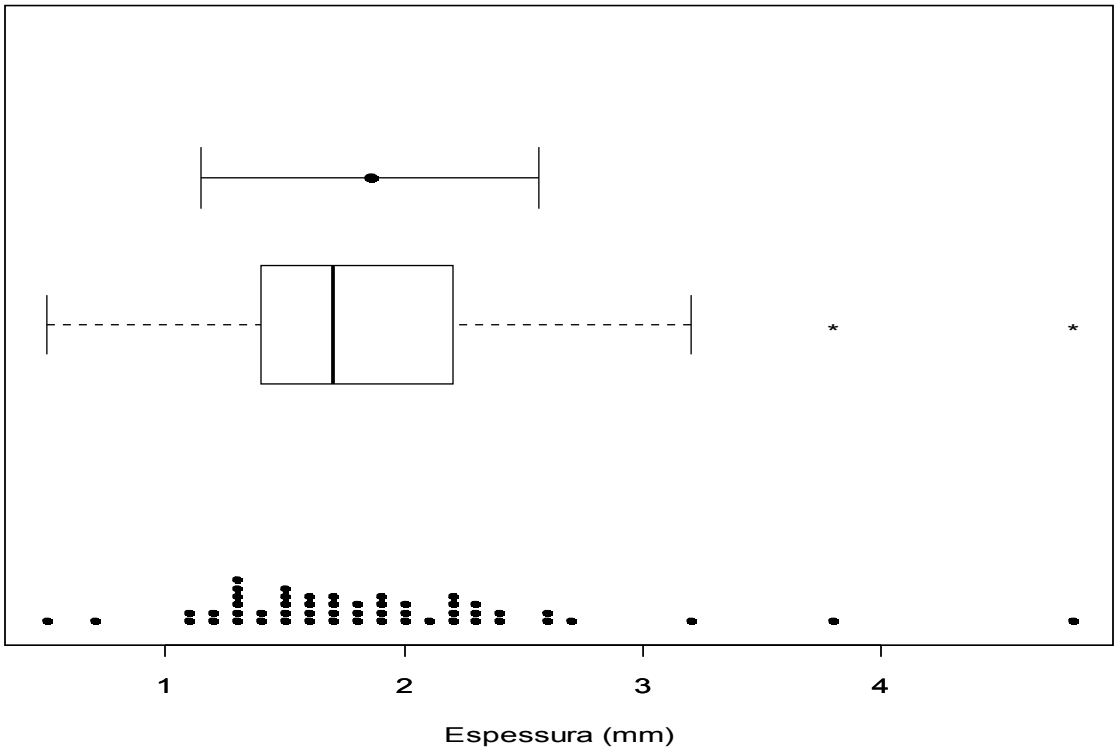
```
> despad = sd(x)

> stripchart(x, method = "stack", pch = 20, xlab = "Espessura (mm)",
at = 0)

> boxplot(x, pch = "*", horizontal = TRUE, at = 1, add = TRUE)

> arrows(xb - despad, 1.5, xb + despad, 1.5, code = 3, angle = 90)

> points(xb, 1.5, pch = 19)
```



5.7. Coeficiente de variação (*coefficient of variation*)

(1) O desvio padrão (s) está vinculado à média.

Dificuldade em comparar desvios padrão se as médias são muito diferentes

(2) A, d_q, dm, MAD, s^2 e s são medidas de dispersão absolutas.

Dependem da unidade de medida de x.

Comparações envolvendo duas ou mais variáveis diferentes ou medidas em diferentes escalas (m e cm, p. ex.) não são possíveis.

(1) e (2) apontam a conveniência de medidas relativas.

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|}, \quad \text{se } |\bar{x}| \neq 0.$$ Pode ser dado em %.

Propriedades. (1) CV é adimensional.

(2) Não é uma medida resistente.

(3) É instável se média $\cong$ 0.

(4) $0 \leq CV < n^{½}$.

5.8. Amplitude studentizada (*Studentized range*)

$$A_s = \frac{A}{s} = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{s} = \frac{MAX - min}{s}.$$ Pode ser dada em %.

Obs. Dividir pelo desvio padrão significa studentizar (ou padronizar) uma medida.

Propriedades. (1) Não é uma medida resistente.

(2) $$2\sqrt{\frac{n-1}{n}} \leq A_s \leq \sqrt{2(n-1)}.$$

Obs. Uma medida de dispersão relativa resistente: d_q / M.

Exemplo – dados na lâmina 6

```
> (cv = sd(x) / mean(x))
[1] 0.3831255
```

```
> (As = (max(x) - min(x)) / sd(x))
[1] 6.045165
```

Obs. A função `range` fornece o vetor (min, MAX).