



# **1. ANÁLISE EXPLORATÓRIA E ESTATÍSTICA DESCRITIVA**

**2014**

## Estatística Descritiva e Análise Exploratória

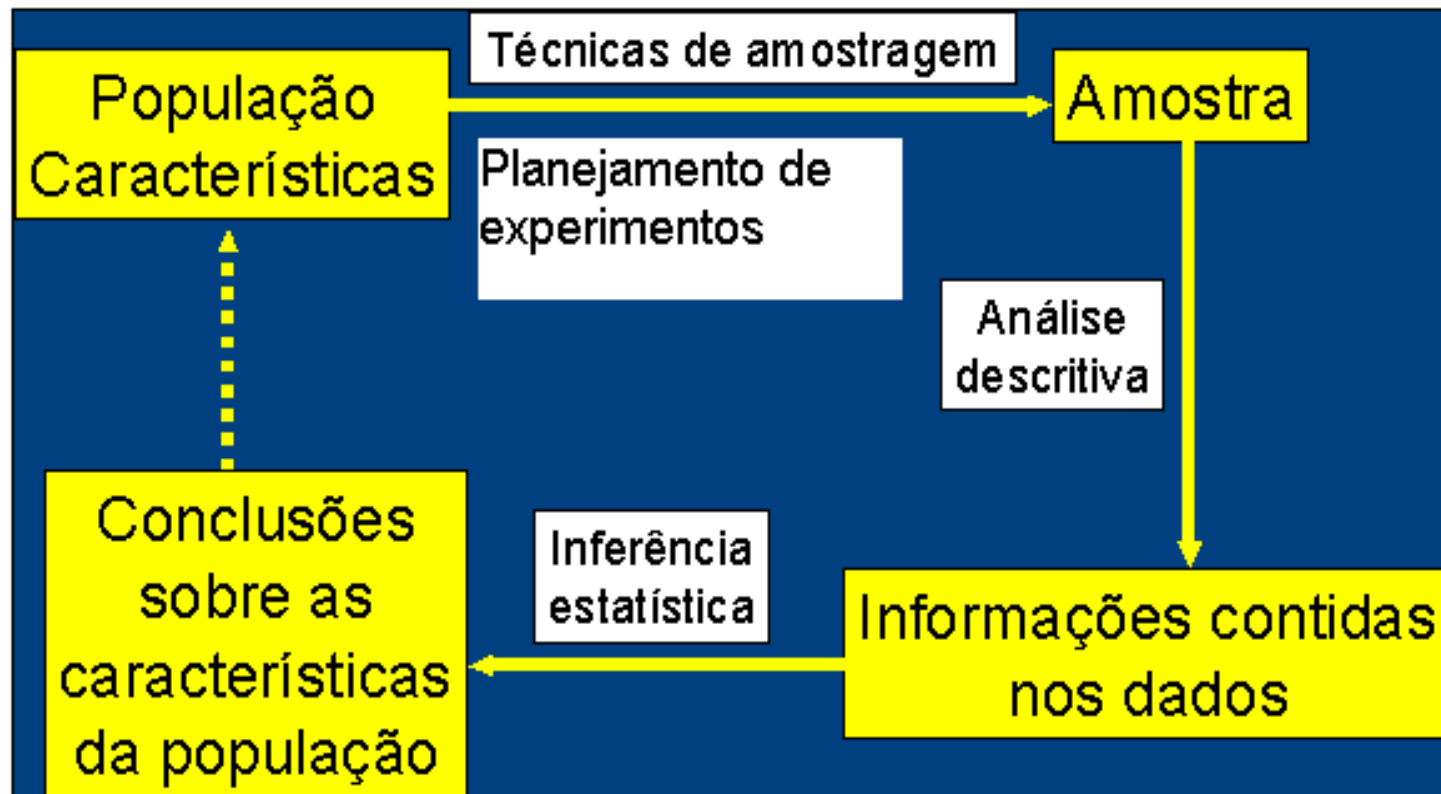
Etapas iniciais. Utilizadas para **descrever** e **resumir** os dados.

A disponibilidade de uma grande quantidade de dados e de métodos computacionais muito eficientes revigorou estas áreas da Estatística.

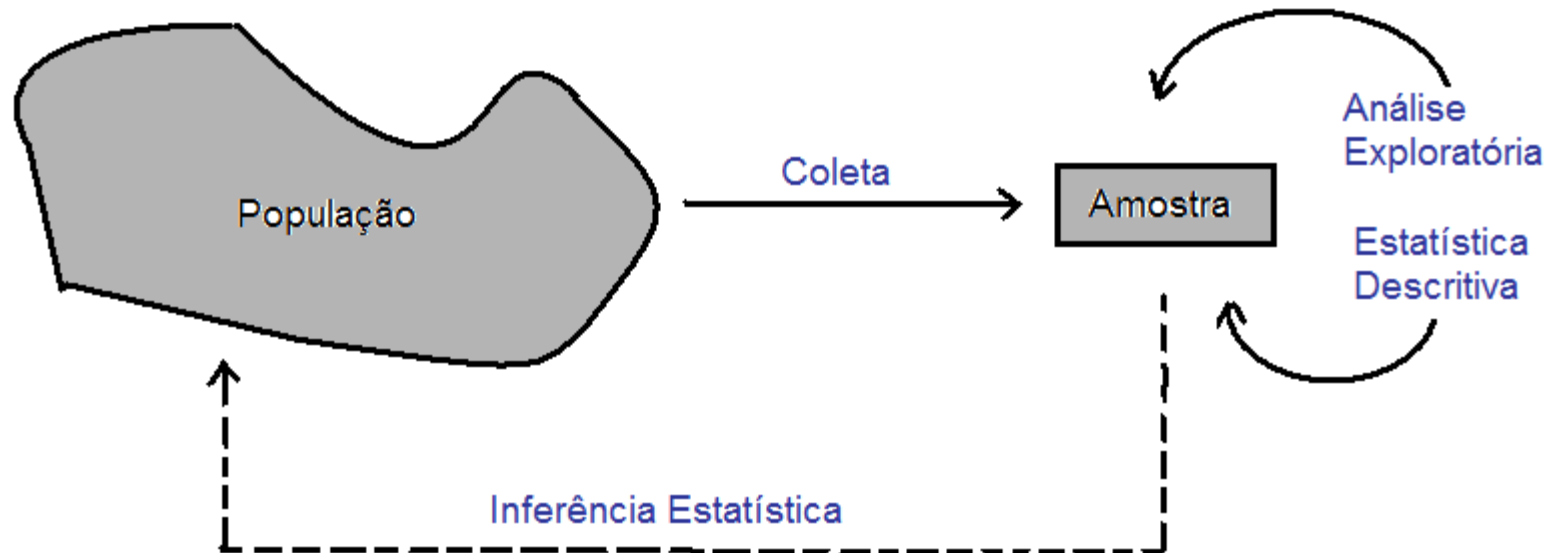
## Probabilidade

Permite estudar os fenômenos aleatórios, ou seja, aqueles em que está presente a incerteza sobre os seus resultados.

# Estatística



# Estatística



## O que é Estatística ?

**Para muitos, Estatística não passa de conjuntos de tabelas de dados numéricos. Os estatísticos são pessoas que coletam esses dados.**

A Estatística originou-se com a coleta de dados e a construção de tabelas para os governos.

A situação evoluiu e esta coleta de dados representa somente um dos aspectos da Estatística.

## Definição de Estatística

A Estatística é uma ciência baseada na **Teoria da Probabilidade**, cujo objetivo principal é nos auxiliar a tomar decisões ou tirar conclusões em situações de incerteza, a partir de dados.

**População:** conjunto de todas as unidades que são de interesse em um certo estudo.

**Amostra:** qualquer subconjunto da população selecionado de acordo com certas regras.

**Censo:** estudo que inclui todos os elementos da população.

## Coleta

### Experimento planejado

Efeito de um ou mais fatores sobre outro(s).

Interferência do pesquisador.

Controle sobre fatores externos.

### Levantamento observacional

Dados são coletados “como estão”.

Não há interferência do pesquisador.

### Levantamento amostral (*survey*)

População bem definida.

Protocolo de coleta.

# Amostragem

Uma área importante em muitas aplicações estatísticas é a da **Tecnologia de Amostragem**.

## **Exemplos:**

- Pesquisa de mercado
- Pesquisa de intenção de voto (pesquisa eleitoral)
- Avaliação do impacto de uma obra junto à população



# O que fazer com os dados coletados?

## 1ª etapa: Estatística Descritiva e Análise Exploratória

Medidas resumo, tabelas e gráficos.

**Obs.** Se  $x$  representa uma variável, uma amostra com valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é chamada de **conjunto de dados**.

$n$  é o tamanho da amostra.

# Variável

Qualquer característica de interesse associada aos elementos de uma população.

## Classificação de variáveis

Qualitativa	{	Nominal	Cor, tipo de máquina
		Ordinal	Classe social, grau de desgaste
Quantitativa	{	Discreta	Número de acidentes, número de defeitos em um item
		Contínua	Peso, viscosidade, pressão

## Exemplo. Estudo de resistência.

Observação	Espessura	Tipo de cola	Resistência
1	13	1	46,5
2	14	1	45,9
3	12	1	49,8
4	12	1	46,1
5	14	1	44,3
6	12	2	48,7
7	10	2	49,0
8	11	2	50,1
9	12	2	48,5
10	14	2	45,2
11	15	3	46,3
12	14	3	47,1
13	11	3	48,9
14	11	3	48,2
15	10	3	50,3
16	16	4	44,7
17	15	4	43,0
18	10	4	51,0
19	12	4	48,1
20	11	4	48,6

Fonte: Montgomery, D. C. (2005), Design and Analysis of Experiments, 6th Edition, Wiley: New York

# Medidas resumo

---

**Medidas de posição:** moda, média, mediana, percentis, quartis.  
(medidas de tendência central: três primeiras)

**Medidas de dispersão:** amplitude, intervalo interquartil, variância, desvio padrão, coeficiente de variação.

## Medidas de posição

**Moda (Mo):** É o valor (ou atributo) que ocorre com maior frequência.

Ex. Dados: 4,5,4,6,5,8,4,4

mo = 4

**Obs.** 1. Nem sempre a moda existe.  
2. Pode haver mais de uma moda.

**Média:**  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Ex. Dados: 2,5,3,7,11

$$\bar{x} = (2+5+3+7+11)/5 = 5,6$$

## Mediana (Md)

A mediana é o valor que ocupa a **posição central** de um conjunto de  $n$  valores **ordenados**.

Posição da mediana:  $pm = (n+1)/2$

Ex. Dados: 2, 26, 3, 7, 8 ( $n = 5$ )

Dados ordenados: 2, 3, 7, 8, 26  $\Rightarrow pm = (5+1)/2=3$   
 $\Rightarrow Md = 7$

Ex. Dados: 2, 15, 2, 1, 8, 7 ( $n = 6$ )

Dados ordenados: 1, 2, 2, 7, 8, 15  $\Rightarrow pm = (6+1)/2=3,5$   
 $\Rightarrow Md = (2+7) / 2 = 4,5$  (média dos elementos nas posições 3 e 4).

## Quantis (*quantiles*)

O quantil de ordem  $p$  ( $0 < p < 1$ ), em um conjunto de dados com  $n$  observações, é o valor que ocupa a posição  $p \times (n+1)$  nos dados **ordenados**.

O quantil de ordem  $p$  deixa  $p \times 100\%$  das observações abaixo dele na amostra ordenada.

### Casos particulares:

Quantil 0,5 = mediana ou segundo quartil (md)

Quantil 0,25 = primeiro quartil (Q1)

Quantil 0,75 = terceiro quartil (Q3)

## Exemplos

**Ex. 1.** 1,9 2,0 2,1 2,5 3,0 3,1 3,3 3,7 6,1 7,7  
(n = 10)

Posição da Md:  $0,5 \times (n+1) = 0,5 \times 11 \Rightarrow$  Md =  $(3+3,1)/2 = 3,05$

Posição de Q1:  $0,25 \times 11 = 2,75 \Rightarrow$  Q1 =  $(2+2,1)/2 = 2,05$

Posição de Q3:  $0,75 \times 11 = 8,25 \Rightarrow$  Q3 =  $(3,7+6,1)/2 = 4,9$

**Ex. 2.** 0,9 1,0 1,7 2,9 3,1 5,3 5,5 12,2 12,9 14,0 33,6  
(n = 11)

Md = 5,3

Q1 = 1,7

Q3 = 12,9



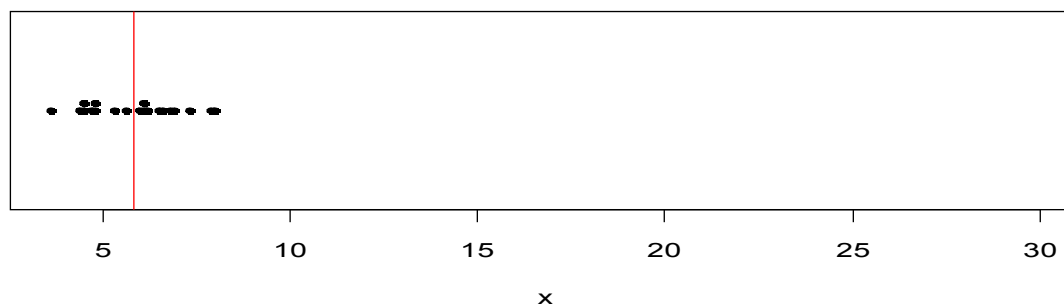
# Moda, mediana e média (*mode, median and mean*)

A moda não é muito utilizada com variáveis quantitativas.

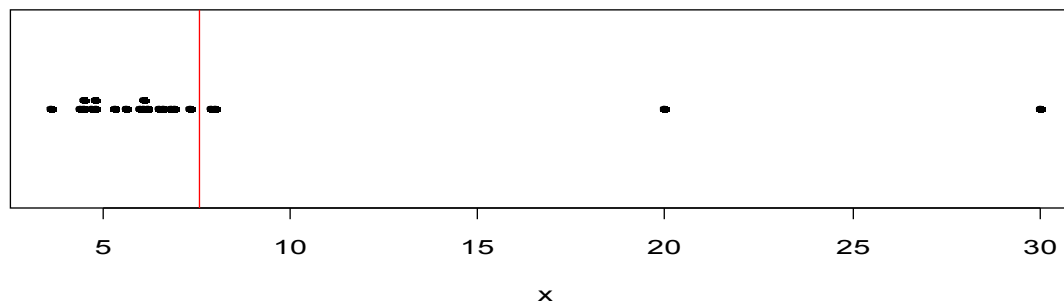
Se a variável for qualitativa nominal, a moda é a única medida de posição.

A mediana é mais **resistente** do que a média. É menos afetada pela presença de valores extremos.

**Média = 6,1**

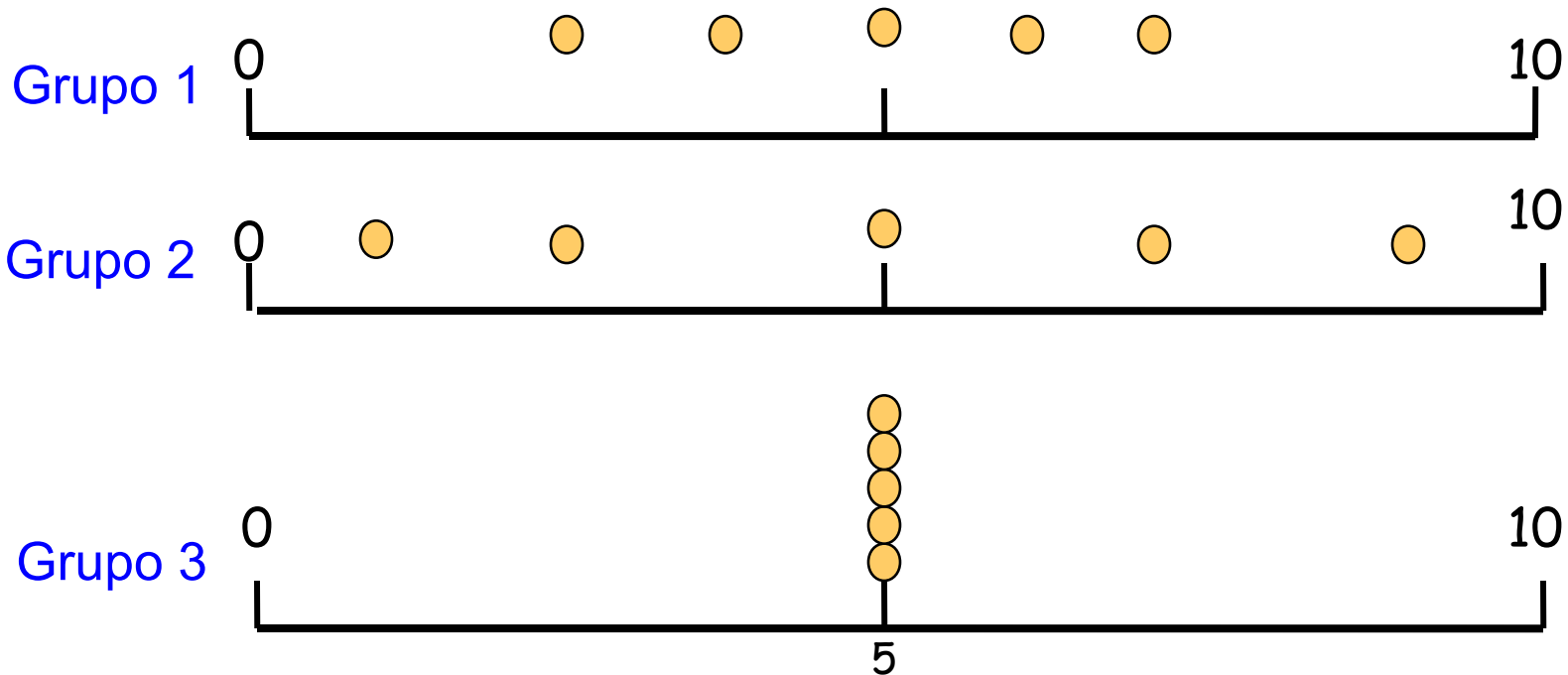


**Média = 7,8**



**Obs.** Os quantis também são chamados de **separatrizes**.

Considere as notas de uma prova aplicada a três grupos de alunos:  
 Grupo 1: 3, 4, 5, 6, 7; Grupo 2: 1, 3, 5, 7, 9; e Grupo 3: 5, 5, 5, 5, 5.



$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 5; Md_1 = Md_2 = Md_3 = 5$$

# Medidas de dispersão

Finalidade: encontrar um valor que resuma a **variabilidade** de um conjunto de dados.

**Amplitude** (A):  $A = \text{MAX} - \text{min}$

Para os grupos anteriores (lâmina **18**), temos

Grupo 1:  $A = 4$

Grupo 2:  $A = 8$

Grupo 3:  $A = 0$

## Intervalo ou amplitude interquartil ( $d_q$ ) (*interquartile range*)

É a diferença entre o terceiro quartil e o primeiro quartil:

$$d_q = Q_3 - Q_1.$$

**Ex.** 1,9 2,0 2,1 2,5 3,0 3,1 3,3 3,7 6,1 7,7

$$Q_1 = 2,05 \quad \text{e} \quad Q_3 = 4,9.$$

$$d_q = Q_3 - Q_1 = 4,9 - 2,05 = 2,85.$$

**Obs.**  $d_q$  é uma medida mais **resistente** do que A.

## Variância ( $s^2$ ) (*variance*)

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

## Desvio padrão ( $s$ ) (*standard deviation*)

$$s = \sqrt{S^2}$$

**Obs.** O desvio padrão tem a mesma unidade da variável  $x$ .

Cálculo da **variância** para o grupo 1 (lâmina 18):

Grupo 1: 3, 4, 5, 6, 7: Vimos que  $\bar{x} = 5$

$$s^2 = \frac{(3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2}{5-1} = \frac{10}{4} = 2,5$$

**Desvio padrão:**

$$\text{Grupo 1 : } s^2 = 2,5 \Rightarrow s = 1,58$$

$$\text{Grupo 2 : } s^2 = 10 \Rightarrow s = 3,16$$

$$\text{Grupo 3 : } s^2 = 0 \Rightarrow s = 0$$

## Propriedades:

$x_1, \dots, x_n$  uma amostra com média  $\bar{x}$  e variância  $s_x^2$ .

Transformação (**posição** e **escala**):  $y_i = a + b x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$$\bar{y} = a + b\bar{x},$$

$$s_y^2 = b^2 s_x^2 \quad \text{e} \quad s_y = |b| s_x.$$

## Coefficiente de variação (CV)

É uma medida de dispersão **relativa**.

Exprime a variabilidade em relação à média.

$$CV = \frac{S}{|\bar{x}|} \times 100,$$

se  $\bar{x} \neq 0$ .

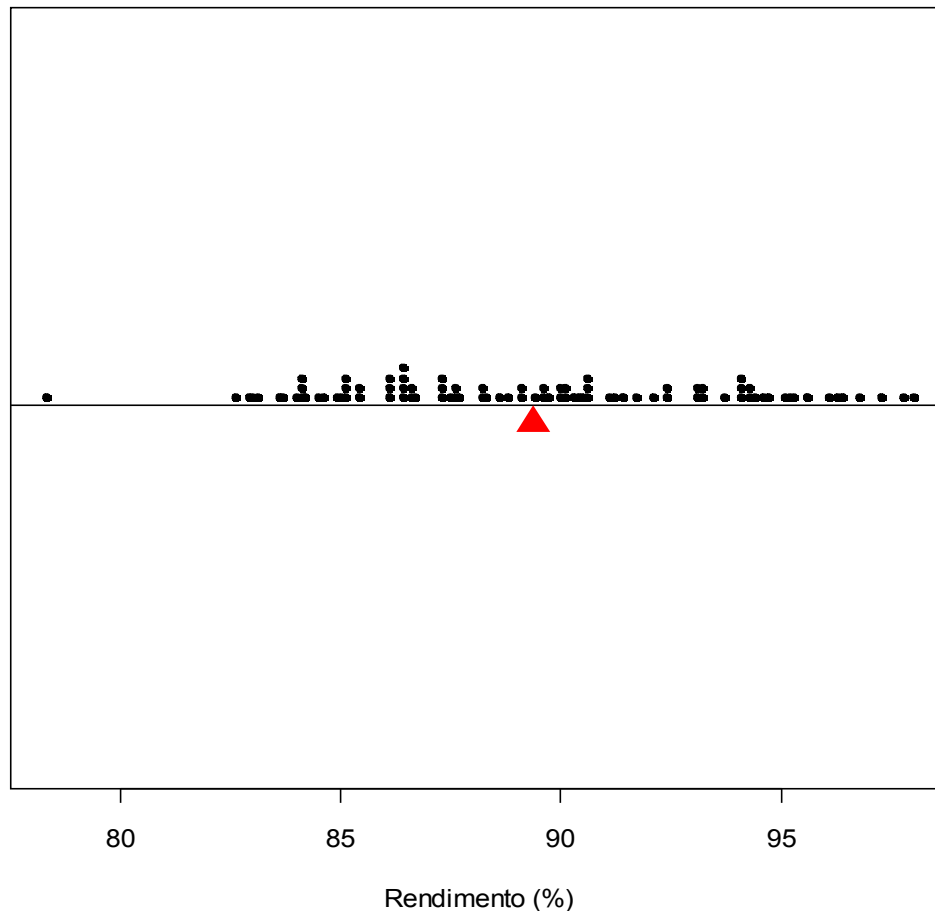


**Exemplo.** Altura e peso de 15 peças metálicas cilíndricas

	<b>Média</b>	<b>Desvio padrão</b>	<b>Coefficiente de variação</b>
<b>Altura</b>	<b>1,143 m</b>	<b>0,063 m</b>	<b>5,5%</b>
<b>Peso</b>	<b>50 kg</b>	<b>6 kg</b>	<b>12%</b>

**Conclusão.** O peso das peças metálicas apresenta variabilidade relativa aproximadamente duas vezes maior do que a altura.

## Exemplo com gráfico de pontos (n = 90)



Cada observação é representada por um ponto.

Havendo repetições, os pontos são empilhados.

Propriedade :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

# Organização e representação dos dados

Uma das formas de organizar e resumir a informação contida em dados observados é por meio de tabelas de frequências e gráficos.

A frequência de um valor da variável é o número de vezes que este valor ocorre no conjunto de dados.

**Tabela de frequências.** Tabela com os diferentes valores de uma variável (ou intervalos de valores) e suas respectivas frequências.

**1. Variáveis qualitativas.** Tabela de frequências dos diferentes valores da variável.

Representação gráfica: gráfico de barras, de Pareto e gráfico de setores (“de pizza”).

**Exemplo.** Variável “Tipo de cimento utilizado” (qualitativa nominal)

	Tipo de cimento	Contagem	$f_i$	$f_{r_i}$
	C1		12	0,3333
	C2	/    /    /	18	0,5000
	C3		6	0,1667
	Total		$n = 36$	1,0000

$f_i$  : frequência **absoluta** do valor  $i$  (número de observações com tipo de cimento =  $i$ ),  $i \in \{C1, C2, C3\}$ .

$f_{r_i} = \frac{f_i}{n}$  : frequência **relativa** do valor  $i$ .

# Elementos de um gráfico

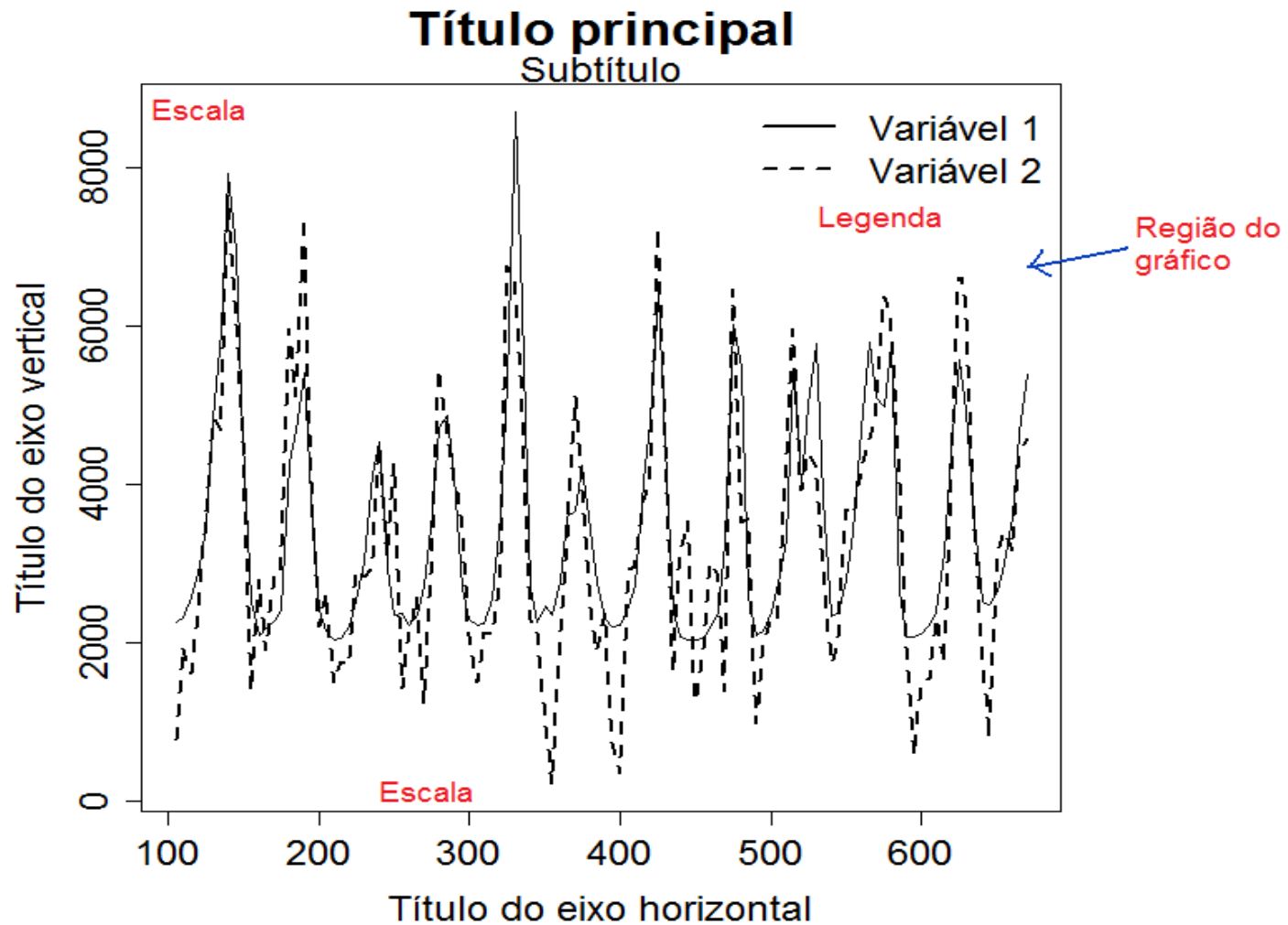
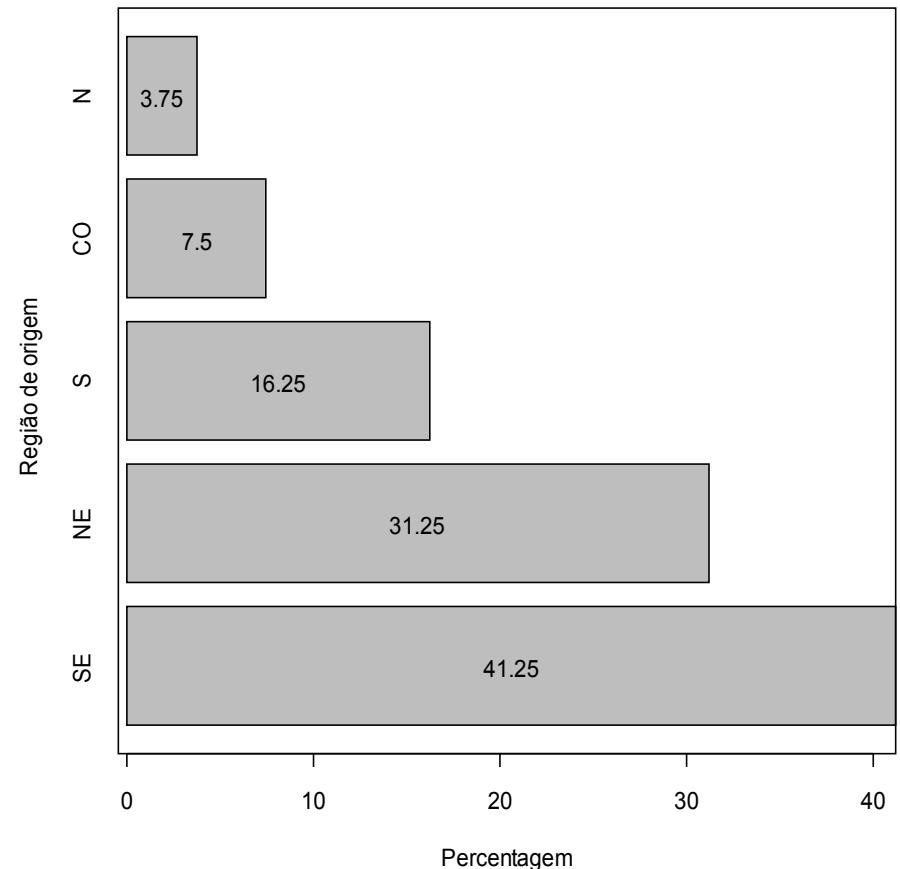
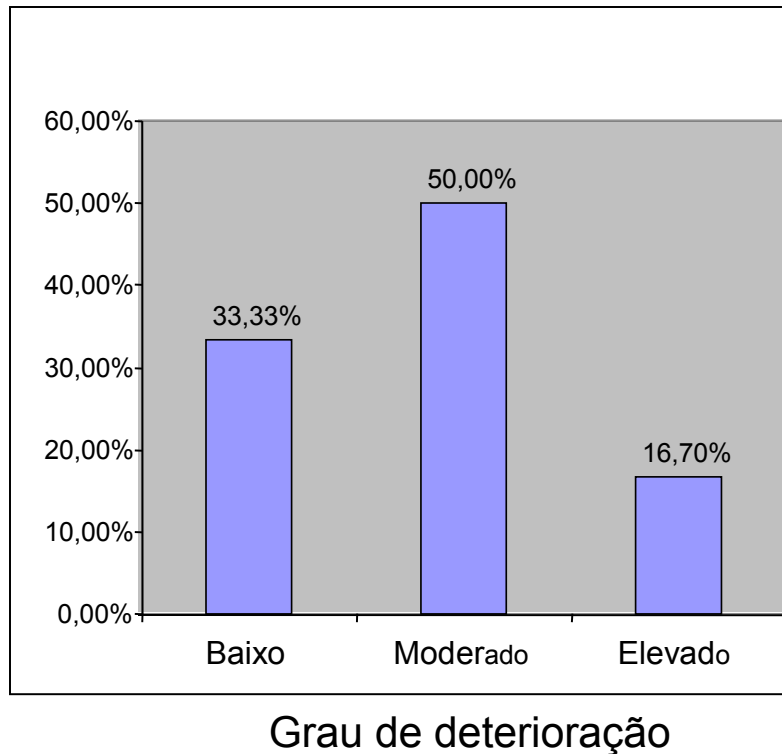


Figura 1. Descrição do gráfico.

# Representação gráfica de variáveis qualitativas

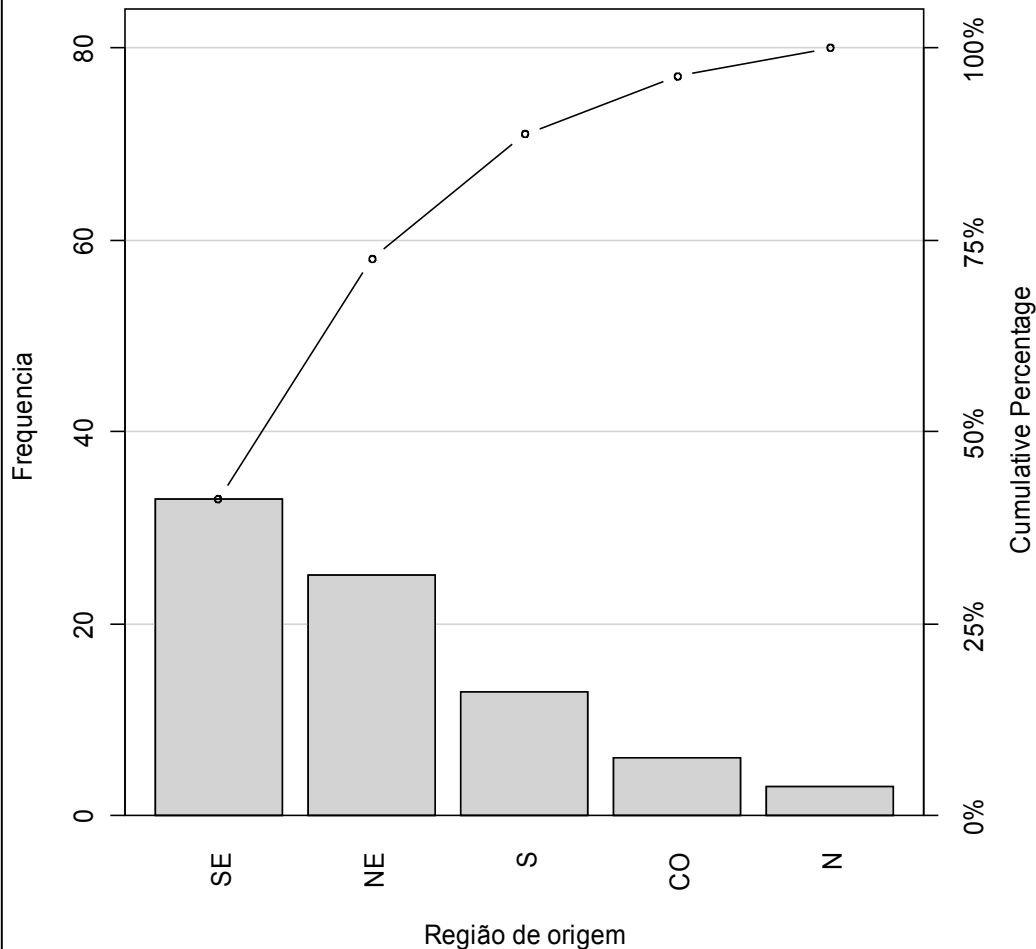
Gráfico de barras: retângulos verticais (ou horizontais) espaçados com alturas (ou bases) iguais às frequências dos valores da variável.



**Obs.** Os valores no eixo horizontal estão ordenados.

## Gráfico de Pareto

Gráfico de barras com os valores da variável em ordem decrescente de frequências e com as frequências relativas acumuladas no segundo eixo vertical.



Frequência relativa acumulada do valor  $x_i$ :

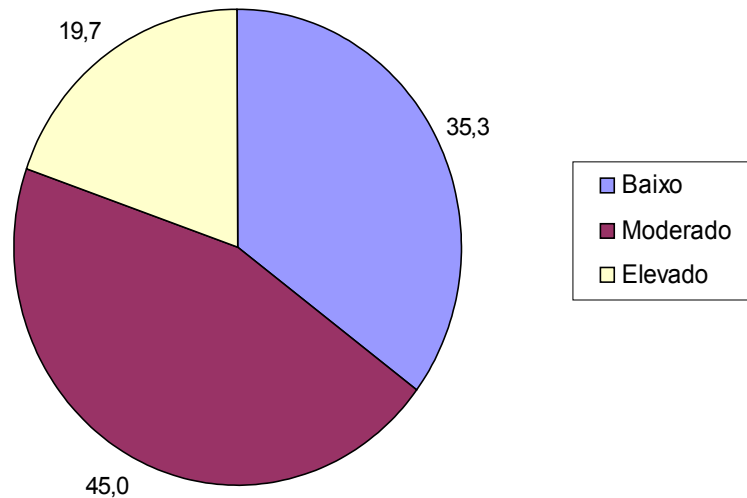
$$\begin{aligned} F_{ri} &= f_{r1} + f_{r2} + \dots + f_{ri} \\ &= \sum_{j=1}^i f_{rj} \end{aligned}$$

## Gráficos de setores (“de pizza”)

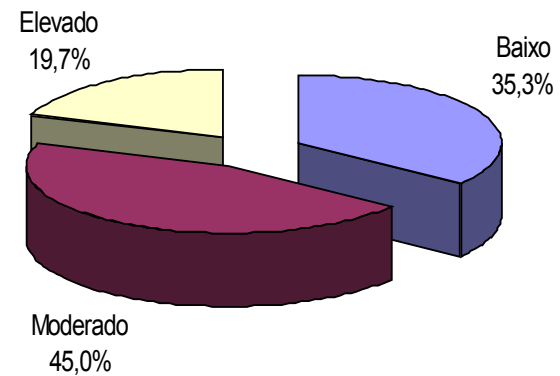
Gráfico **circular** utilizado para destacar a composição das partes de um todo.

O ângulo central de cada setor é proporcional à frequência representada (usualmente em %).

Grau de deterioração



Grau de deterioração





## 2. Organização e representação de variáveis quantitativas

**2.1 Discretas.** Organizam-se mediante tabelas de frequências e a representação gráfica é mediante gráfico de pontos, de barras ou de linha.

Frequência **relativa** do valor  $x_i$  :  $f_{ri} = f_i / n$ .

Frequência **acumulada** do valor  $x_i$ :

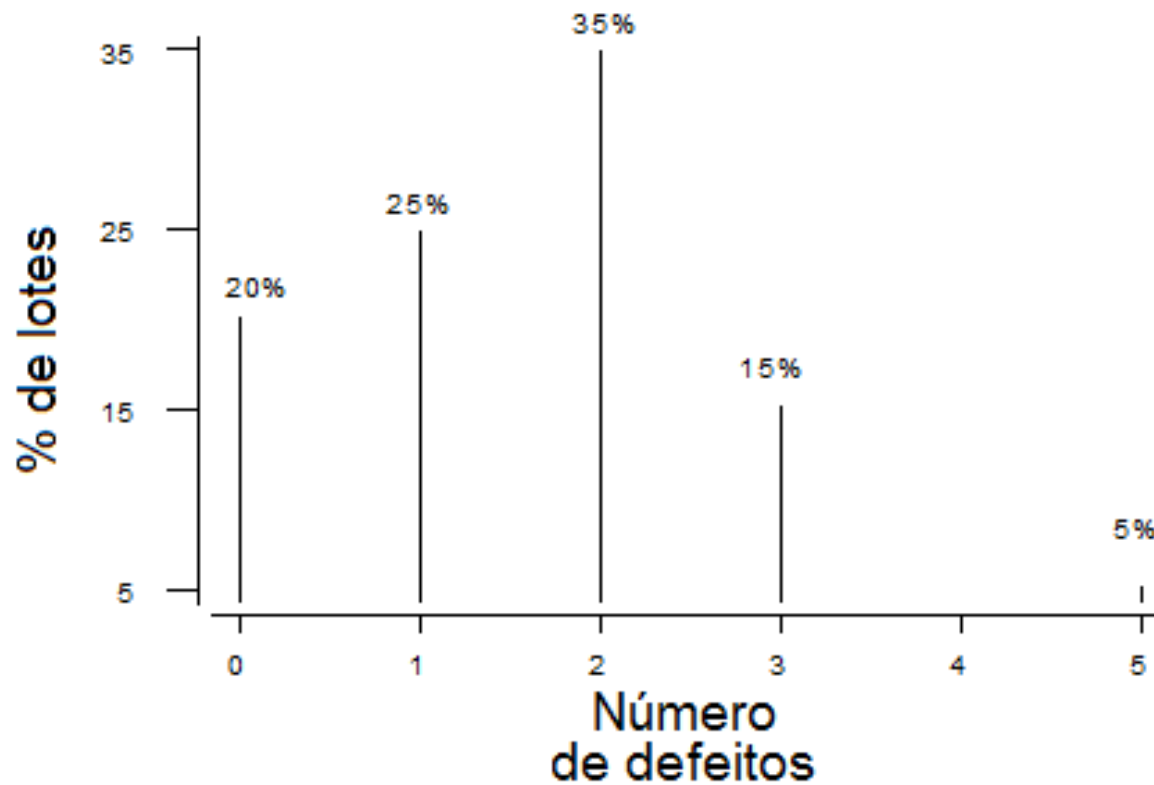
$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i = \sum_{j=1}^i f_j$$

**Exemplo.** Número de defeitos em lotes de produtos.

Distribuição de frequências do número de defeitos por lote.

i	Número de defeitos ( $X_i$ )	Número de lotes ( $f_i$ )	% de lotes ( $f_{ri}$ )
1	0	4	20%
2	1	5	25%
3	2	7	35%
4	3	3	15%
5	5	1	5%
Total		20	100%

# Representação gráfica



Medidas de posição e dispersão para variáveis quantitativas discretas agrupadas em tabela de freqüências:

Média:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_k f_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{n}$$

**Exemplo.** Determine o número médio de defeitos por lote.

$$\bar{x} = \frac{0 \times 4 + 1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 3 + 5 \times 1}{20} = \frac{33}{20} = 1,65$$

Mediana:

$$n = 20: \text{ pm} = (20+1) / 2 = 10,5 \Rightarrow$$

Md = média dos valores com frequências **acumuladas** iguais a **10** e **11**  
=  $(2 + 2) / 2 = 2$  (lâmina **33**).

Moda = ?

Variância:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 f_k}{n - 1} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n - 1}$$

Exemplo.

$$s^2 = \frac{4(0 - 1,65)^2 + 5(1 - 1,65)^2 + 7(2 - 1,65)^2 + 3(3 - 1,65)^2 + (5 - 1,65)^2}{19}$$
$$= \frac{16,3125}{19} = 0,859$$

Desvio padrão:  $s = \sqrt{s^2} = 0,927$

Coeficiente de variação:  $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \times 100\% = \frac{0,92}{1,65} \times 100\% = 55,8\%$

## 2.2 Construção de tabelas de frequências para variáveis contínuas

- Escolha o número de intervalos de classe ( $k$ )
- Identifique o menor valor ( $\min$ ) e o valor máximo ( $\text{MAX}$ ) dos dados.
- Calcule a amplitude ( $A$ ):  $A = \text{MAX} - \min$ .
- Calcule a amplitude de classe ( $h$ ):  $h = A / k$ .
- Obtenha os limites inferior ( $LI$ ) e superior ( $LS$ ) de cada classe.

1.<sup>o</sup> intervalo :

Limite inferior :  $LI_1 = \min$

Limite superior :  $LS_1 = LI_1 + h$

2.<sup>o</sup> intervalo :

Limite inferior :  $LI_2 = LS_1$

Limite superior :  $LS_2 = LI_2 + h$

...

$i$  - ésimo intervalo :

Limite inferior :  $LI_i = LS_{i-1}$

Limite superior :  $LS_i = LI_i + h$

Prossiga até que seja obtido um intervalo que contenha o valor máximo ( $\text{MAX}$ ).

**Obs.** Muitas vezes, por **conveniência**, arredondamos os valores de  $h$  e/ou  $LI_1$ .

Tabela de de frequências com as colunas:

- Número de ordem de cada intervalo ( $i$ )
- Limites de cada intervalo. Os intervalos são **fechados à esquerda** e **abertos à direita**. Notação:  $\vdash$

**Ponto médio** (ou marca de classe) de cada classe:

$$x_i^* = \frac{LS_i + LI_i}{2}.$$

Frequência **absoluta** de uma classe ( $f_i$ ): número de observações pertencentes à classe  $i$ .

Frequência **relativa** de uma classe:  $f_{ri} = f_i / n$ .

Frequência **acumulada absoluta** de uma classe:

$$F_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_i = \sum_{j=1}^i f_j.$$

Frequência **acumulada relativa** de uma classe:

$$F_{r_i} = f_{r_1} + f_{r_2} + \cdots + f_{r_i} = \sum_{j=1}^i f_{r_j} \quad \text{ou} \quad F_{r_i} = \frac{F_i}{n}.$$

## Exemplo

Variável: **viscosidade** (em u.v.) de um líquido a uma certa temperatura.

13.9 14.9 15.9 15.8 14.8 15.1 15.8 15.0 15.1 14.6 14.7 16.6 13.6 15.9 13.1  
15.2 14.7 16.0 15.6 17.4 15.3 14.2 15.9 15.1 15.9 16.1 16.2 13.8 14.6 16.0  
15.8 15.5 16.5 17.1 15.3 15.5 17.8 15.4 15.4 14.6

Amostra **ordenada**:

13.1 13.6 13.8 13.9 14.2 14.6 14.6 14.6 14.7 14.7 14.8 14.9 15.0 15.1 15.1  
15.1 15.2 15.3 15.3 15.4 15.4 15.5 15.5 15.6 15.8 15.8 15.8 15.9 15.9 15.9  
15.9 16.0 16.0 16.1 16.2 16.5 16.6 17.1 17.4 17.8

$n = 40$

Mínimo	Mediana	Média	Máximo
13.10	15.40	15.39	17.80

Procedimento:

Adotamos  $k = 5$ .

$\min = 13,10$  e  $\text{MAX} = 17,80$ .

$A = \text{MAX} - \min = 17,8 - 13,10 = 4,7$ .

$h = 4,7 / 5 = 0,94$ .

Adotamos  $h = 1$  e  $\text{LI}_1 = 13$ .

Limites das classes:  $\text{LI}_1 = 13$ ,  $\text{LS}_1 = \text{LI}_1 + h = 14$ ,  $\text{LI}_2 = \text{LS}_1 = 14$ ,

$\text{LS}_2 = \text{LI}_2 + h = 15$ , ...,  $\text{LI}_5 = \text{LS}_4 = 17$  e  $\text{LS}_5 = \text{LI}_5 + h = 18$ .



Pontos médios:  $x_1^* = \frac{13+14}{2} = 13,5$ ;  $x_2^* = \frac{14+15}{2} = 14,5$ ; ...;  $x_5^* = \frac{17+18}{2} = 17,5$ .

**Tabela.** Distribuição de frequências da variável viscosidade.

Ordem	Classe	Ponto médio	Frequência	Frequência relativa	Frequência acumulada	Frequência relativa acumulada
1	13  -- 14	13,5	4	0,1	4	0,1
2	14  -- 15	14,5	8	0,2	12	0,3
3	15  -- 16	15,5	19	0,475	31	0,775
4	16  -- 17	16,5	6	0,15	37	0,925
5	17  -- 18	17,5	3	0,075	40	1
		Total	40	1	-	-

Nesta organização de dados temos **perda de informação**.

Em um gráfico de pontos (lâmina 26) **não há perda** de informação, mas se n for “grande”, pode haver **perda de clareza**.

Densidade de frequência (ou **densidade**):  $f_{d_i} = \frac{f_{r_i}}{h}$ .

Representação gráfica:

## Histograma

Gráfico de **barras adjacentes** com **bases** iguais às **amplitudes** das classes e **alturas** iguais às **densidades**.

**Obs.** Se as classes tiverem **amplitude constante**, as alturas das barras usualmente são iguais às frequências.

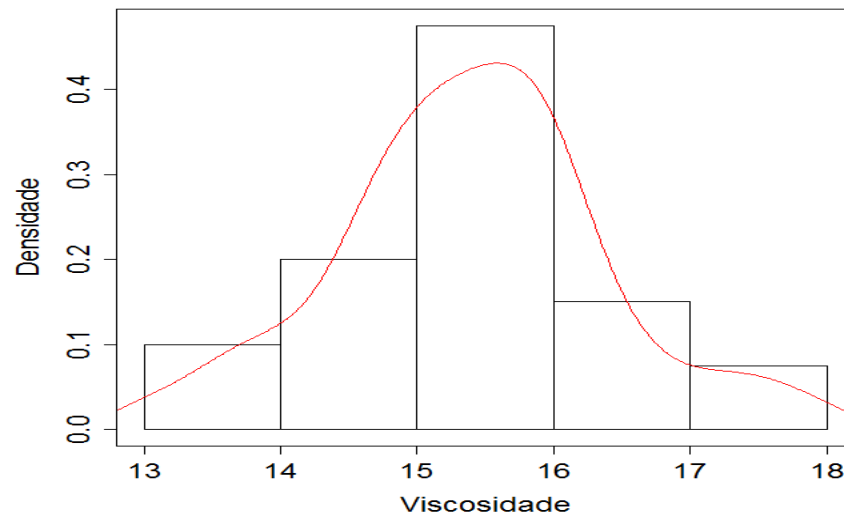
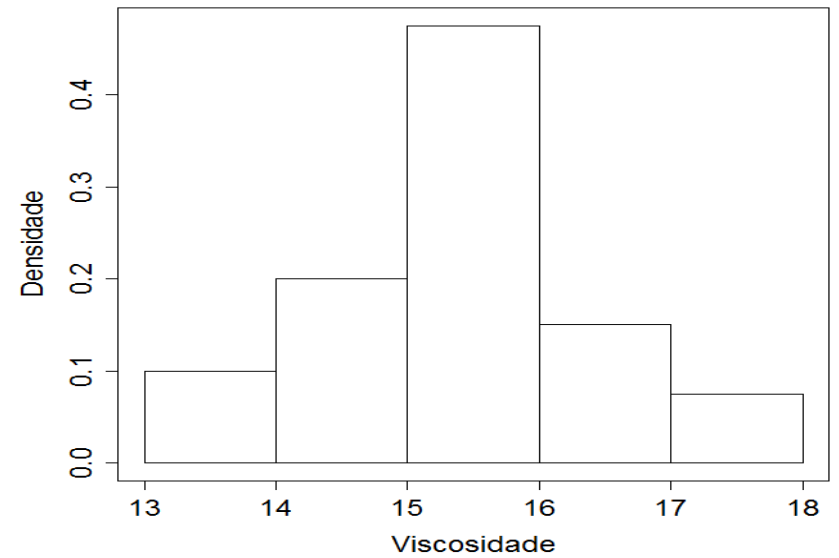
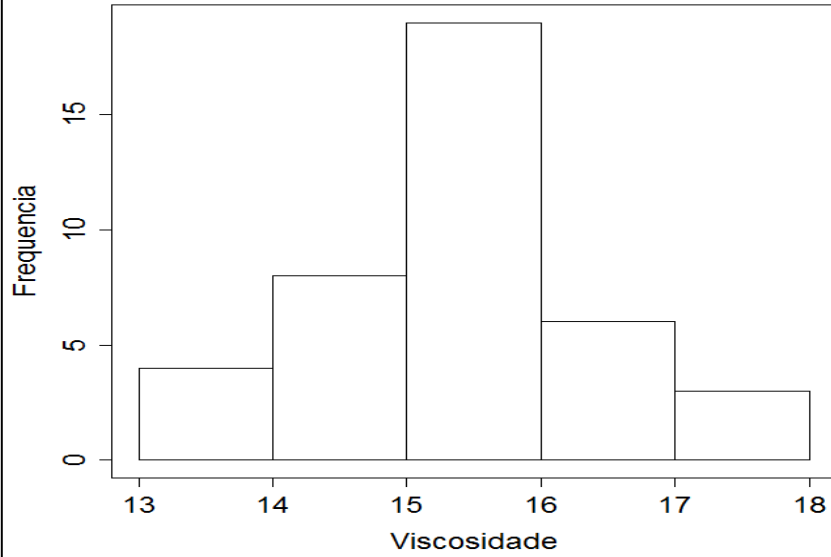
**Propriedade.** Se utilizarmos densidades, soma das áreas dos retângulos = 1, pois

$$\sum_{i=1}^k h f_{d_i} = \sum_{i=1}^k h \frac{f_{r_i}}{h} = \sum_{i=1}^k f_{r_i} = 1.$$

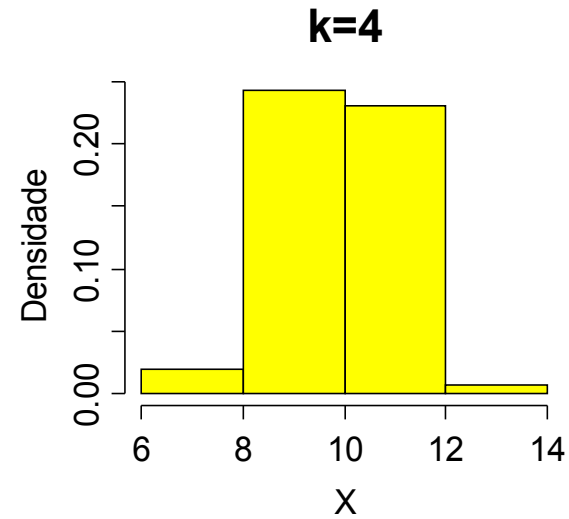
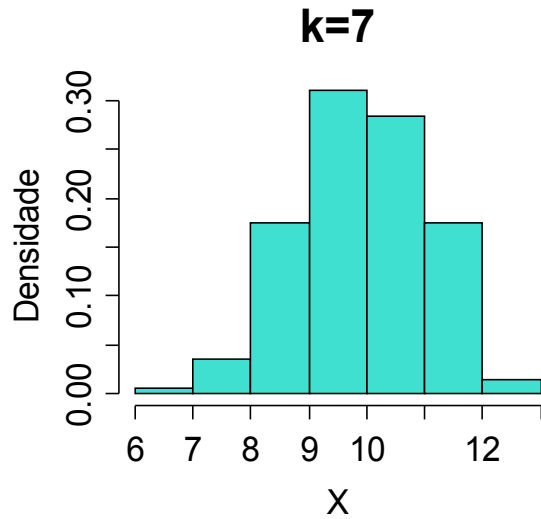
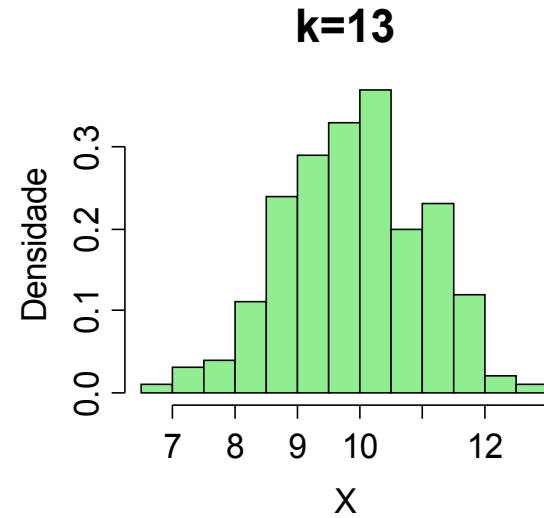
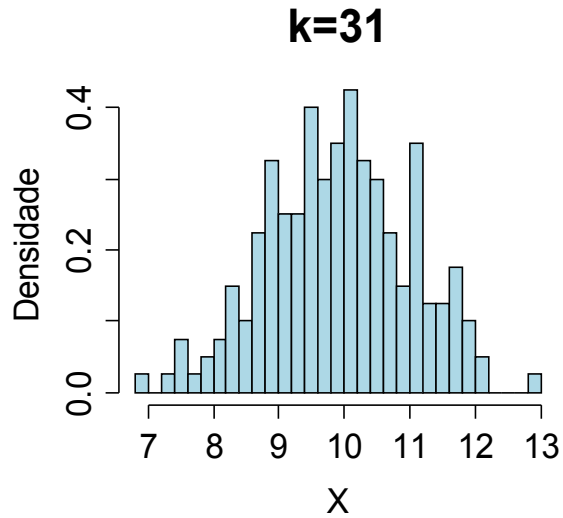
**Obs. 1.** A amplitude das classes pode variar.

2. Na construção de um histograma, quanto **maior** for **n**, **melhor**.

# Exemplo. Variável viscosidade.



# Escolha do número de classes (geralmente, $5 \leq k \leq 15$ ).



## Média e variância para variáveis contínuas agrupadas em classes

Média: 
$$\bar{x} \cong \frac{x_1^* f_1 + x_2^* f_2 + \cdots + x_k^* f_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^* f_i}{n}$$

Variância: 
$$s^2 \cong \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i^* - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Exemplo. Variável viscosidade (lâmina 40)

$$\begin{aligned}\bar{x} &\cong \frac{13,5 \times 4 + 14,5 \times 8 + 15,5 \times 19 + 16,5 \times 6 + 17,5 \times 3}{40} \\ &= \frac{616}{40} = 15,4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2 &\cong \frac{\sum_{i=1}^5 f_i (x_i^* - \bar{x})^2}{40 - 1} = \frac{41,6}{39} = 1,067. \\ \Rightarrow s &= 1,033 \text{ (desvio padrão).}\end{aligned}$$

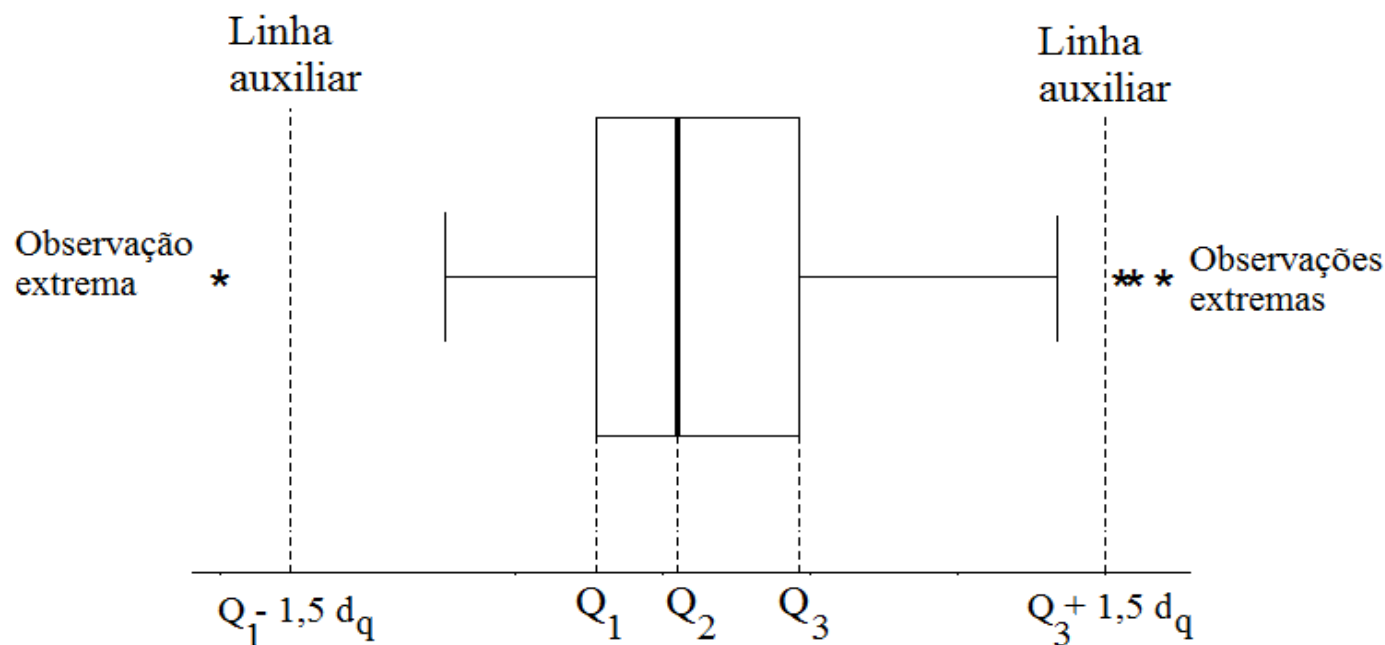
Média dos dados não agrupados (dados brutos) :


$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{36}}{40} = \frac{13,9 + 14,9 + \cdots + 14,6}{40} = 15,39.$$


Este resultado difere do valor obtido anteriormente. **Por quê?**

## Gráfico de caixas (*box plot*)

Representação dos dados por meio de um **retângulo** construído com os **quartis**. Fornece informação sobre a variabilidade ( $d_q = Q_3 - Q_1$ ) e valores extremos.



Vertical à esquerda  : **menor** valor na amostra que **não é extremo**.

Vertical à direita  : **maior** valor na amostra que **não é extremo**.

## Exemplo. Variável viscosidade.

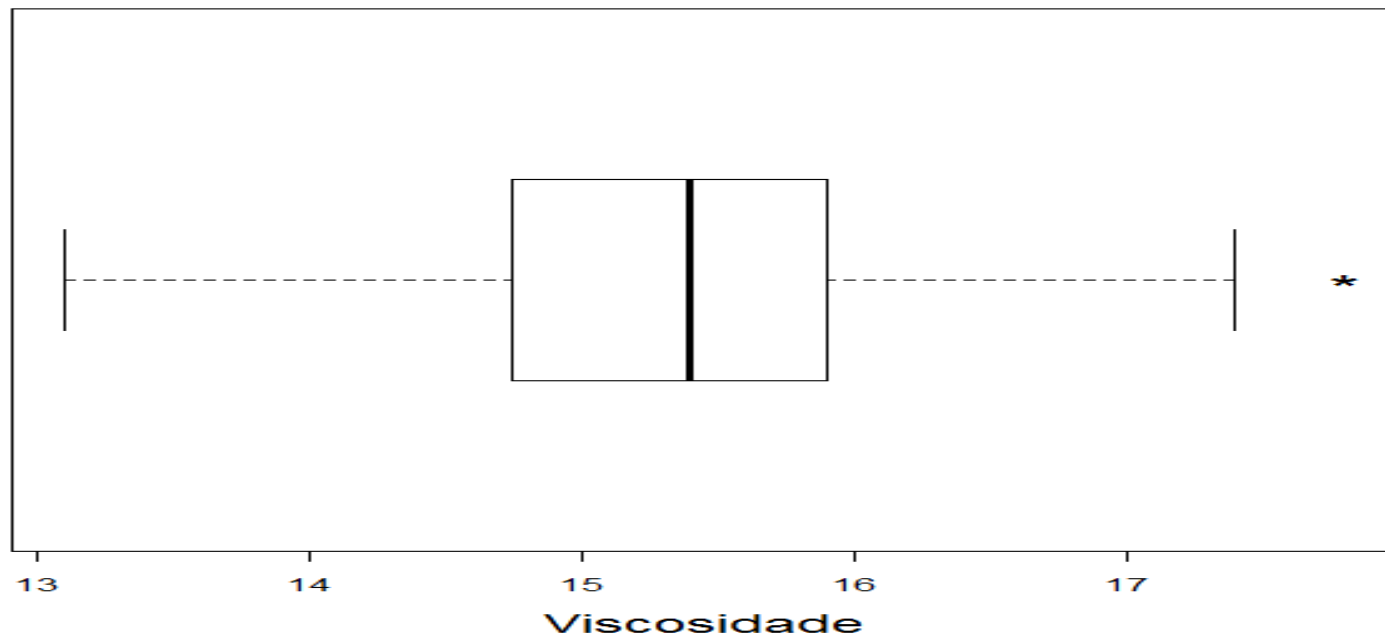
1º quartil (Q1) = 14,775.

Mediana (Md ou Q2) = 15,4.

3º quartil (Q3) = 15,9.

$d_q$  = intervalo interquartil =  $Q3 - Q1 = 1,125$ .

Lnhas **auxiliares** passam por  $Q1 - 1,5d_q = 13,1$  e  $Q3 + 1,5d_q = 17,6$ .



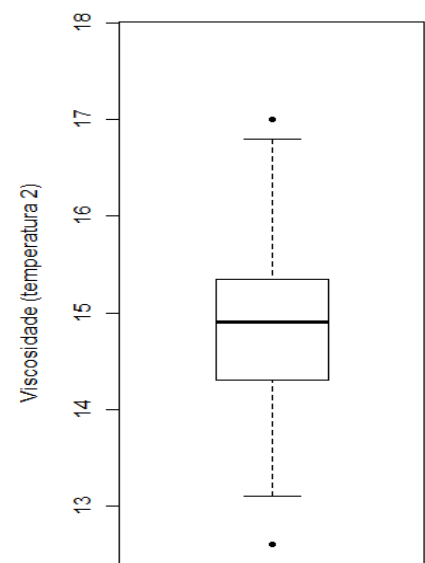
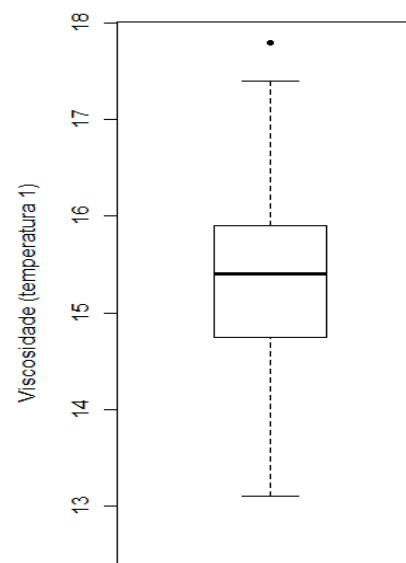
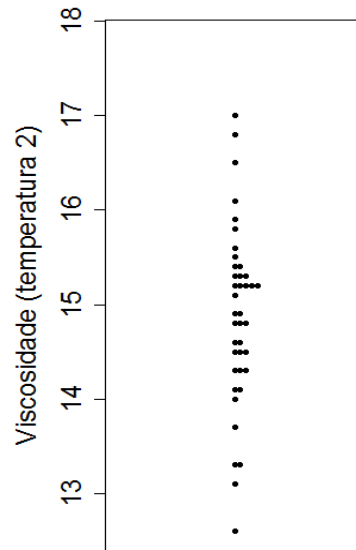
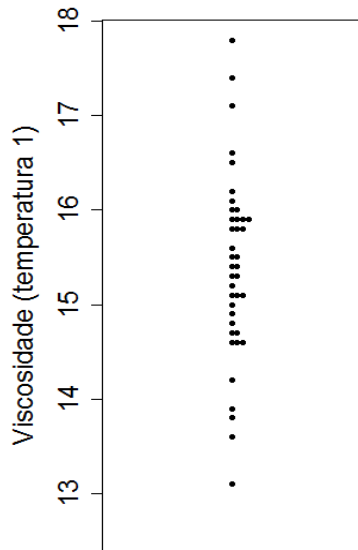
# Exemplo. Variável viscosidade medida em duas temperaturas.

## Temperatura 1 (lâmina 39).

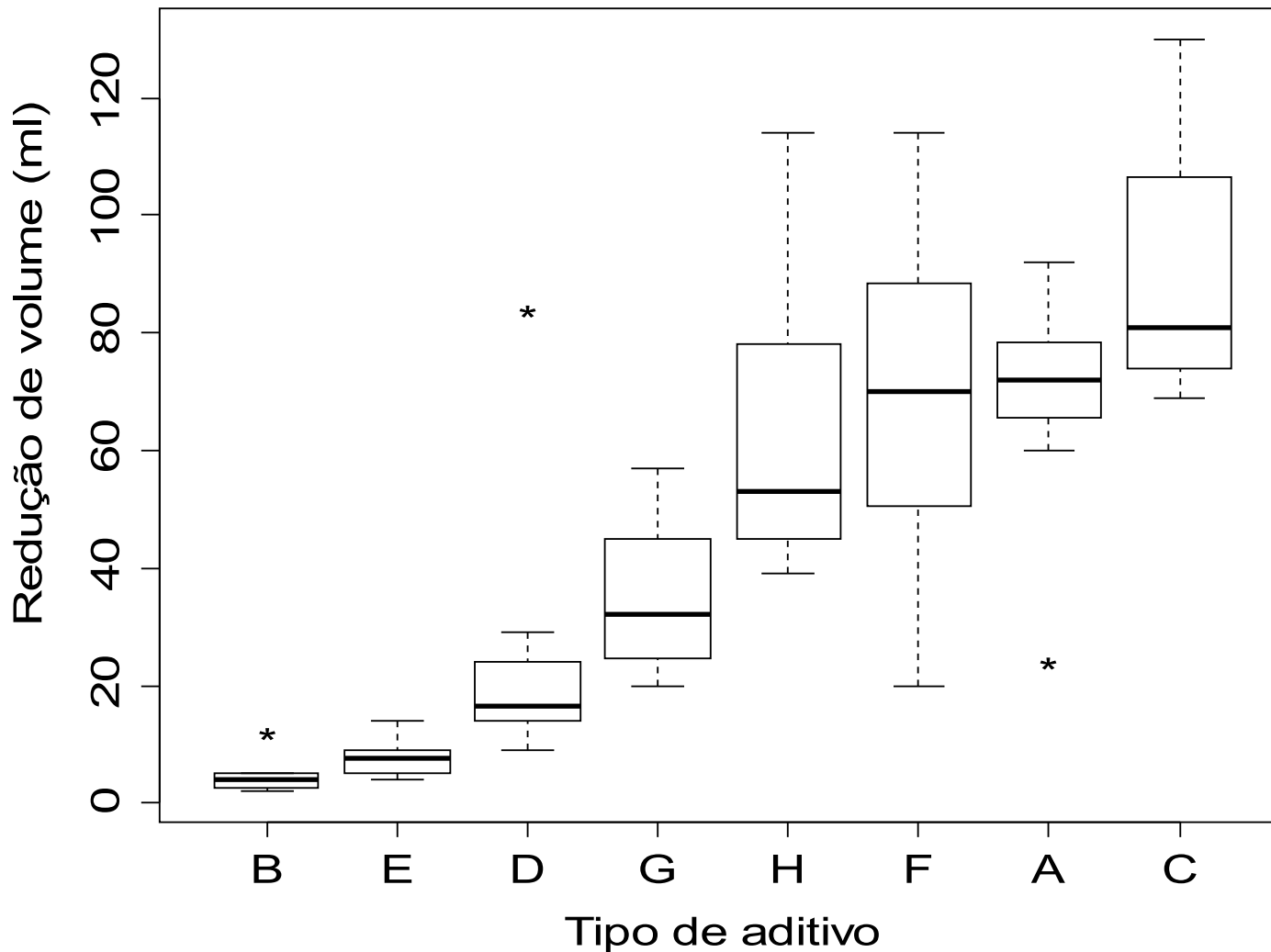
13.9 14.9 15.9 15.8 14.8 15.1 15.8 15.0 15.1 14.6 14.7 16.6 13.6 15.9 13.1  
15.2 14.7 16.0 15.6 17.4 15.3 14.2 15.9 15.1 15.9 16.1 16.2 13.8 14.6 16.0  
15.8 15.5 16.5 17.1 15.3 15.5 17.8 15.4 15.4 14.6

## Temperatura 2 (n = 40).

13.3 14.5 15.3 15.3 14.3 14.8 15.2 14.5 14.6 14.1 14.3 16.1 13.1 15.5 12.6  
14.6 14.3 15.4 15.2 16.8 14.9 13.7 15.2 14.5 15.3 15.6 15.8 13.3 14.1 15.4  
15.2 15.2 15.9 16.5 14.8 15.1 17.0 14.9 14.8 14.0



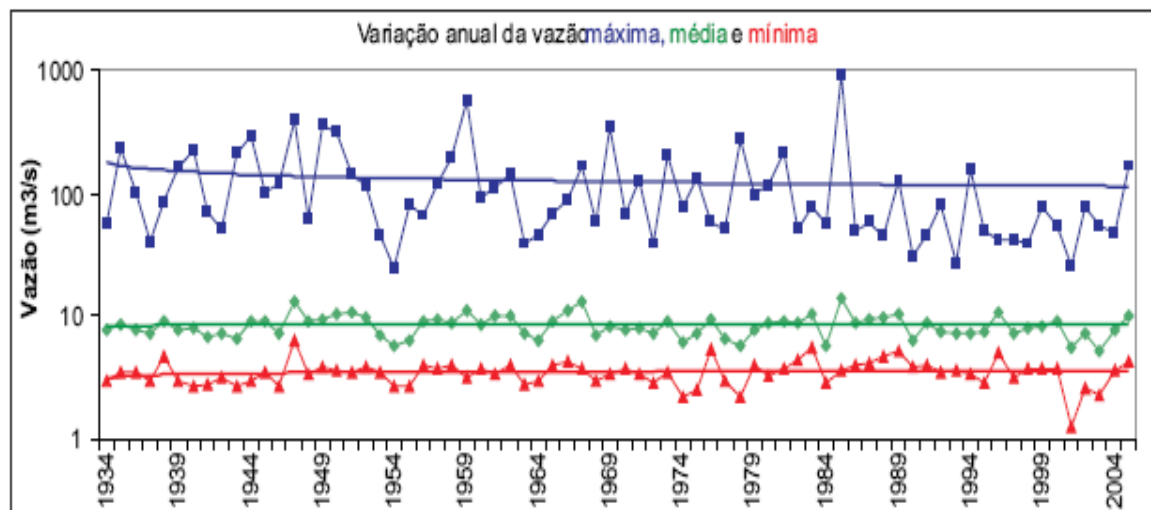




Análise exploratória. Redução de volume *versus* tipo de aditivo. Variabilidade. Simetria. Valores extremos.

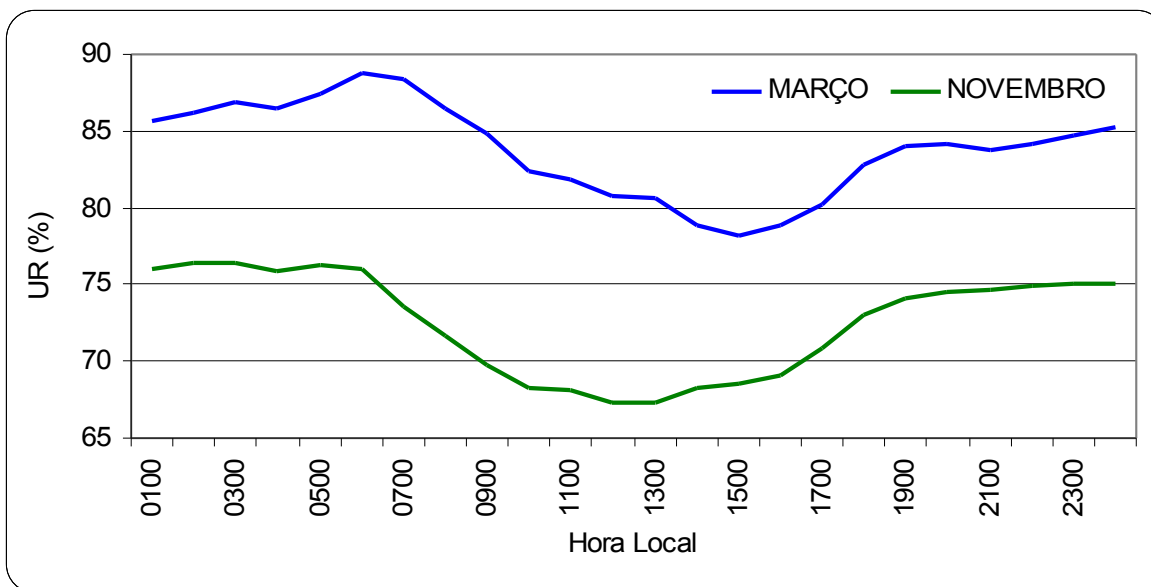
# Gráfico de linha

Representação de **séries temporais** (ou **séries históricas**).



Visualização dos componentes **tendência** e **sazonalidade**.

Cuidado com a escala do gráfico.



# Associação entre variáveis quantitativas

$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ : amostra **bivariada**.

**Representação gráfica**: gráfico de dispersão (*scatter plot*)

Medida de associação: **coeficiente de correlação linear de Pearson**.

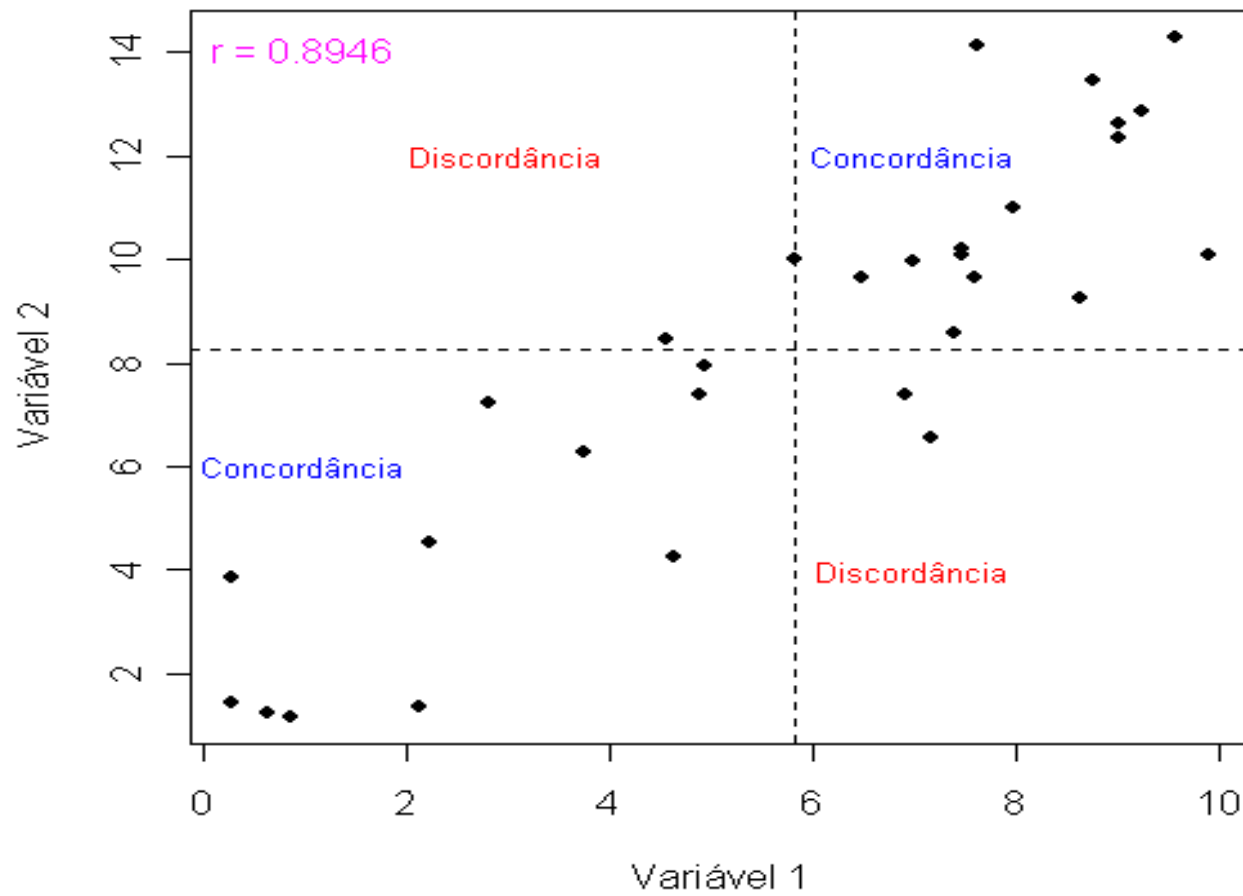
$$r = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y}$$

Numerador: **covariância** entre x e y.

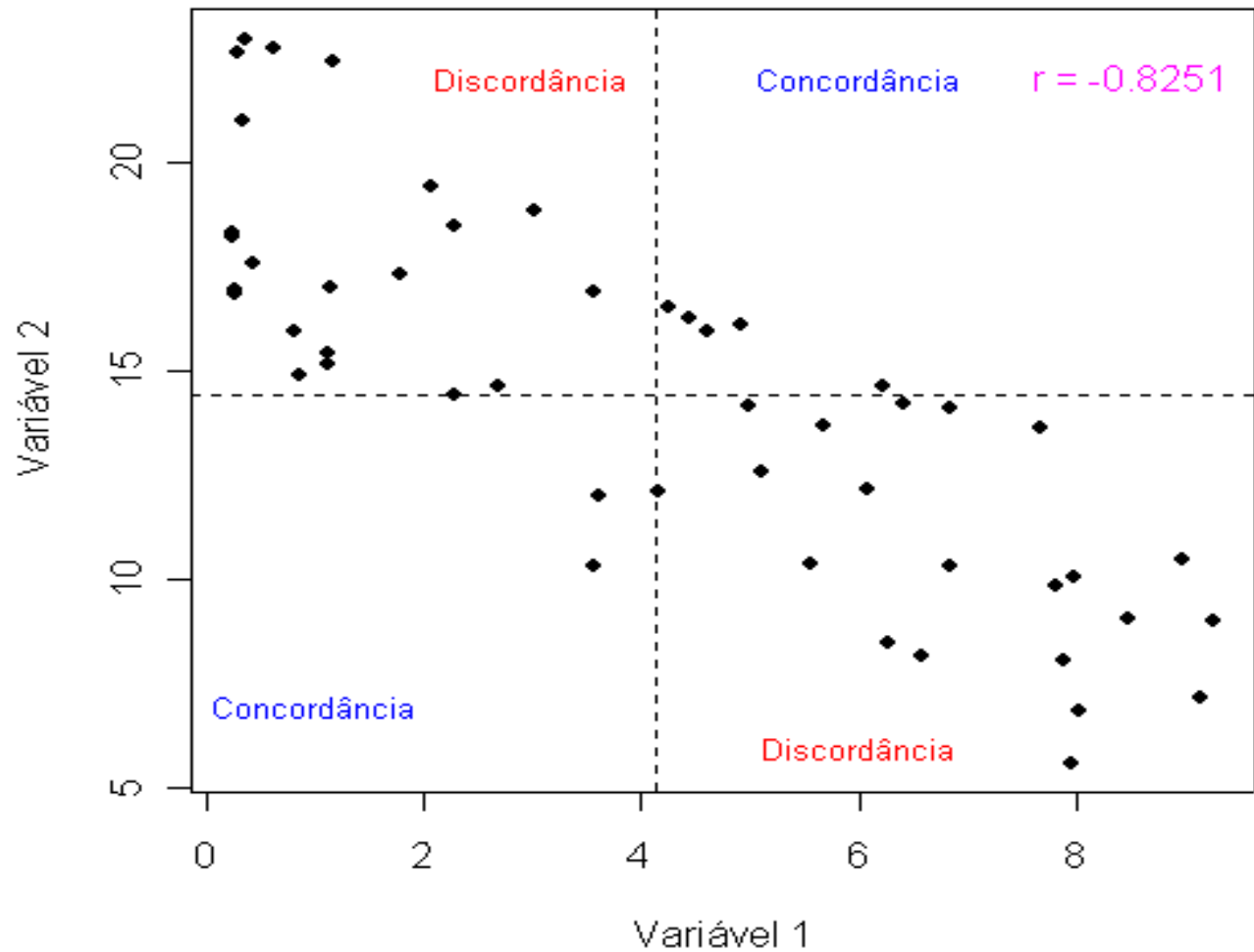
**Propriedades**: (1)  $-1 \leq r \leq 1$  e

(2)  $|r| = 1$  se, e somente se, a relação entre x e y for **linear** ( $y = a + bx$ ,  $b \neq 0$  e o **sinal de r** é o **sinal de b**).

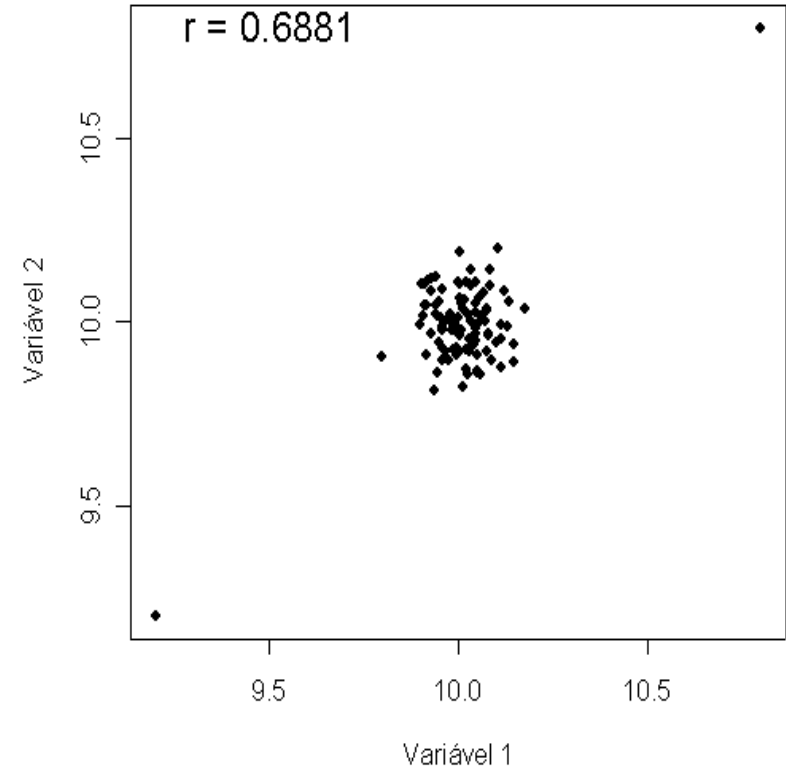
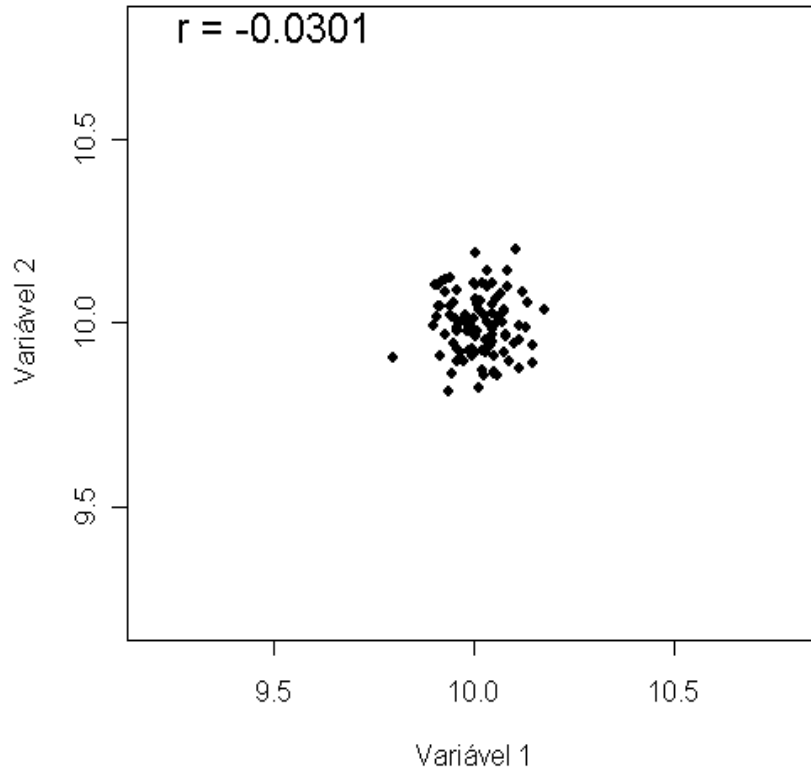
# Associação entre variáveis quantitativas



# Associação entre variáveis quantitativas

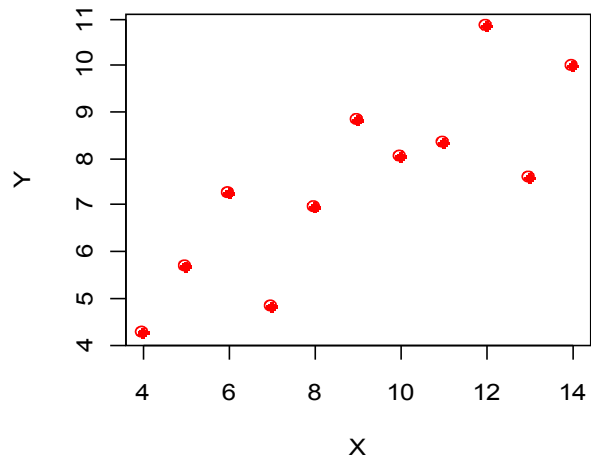


# Associação entre variáveis quantitativas

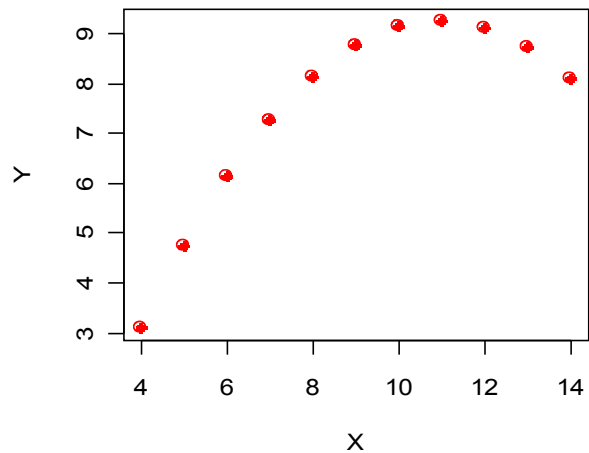


# Associação entre variáveis quantitativas

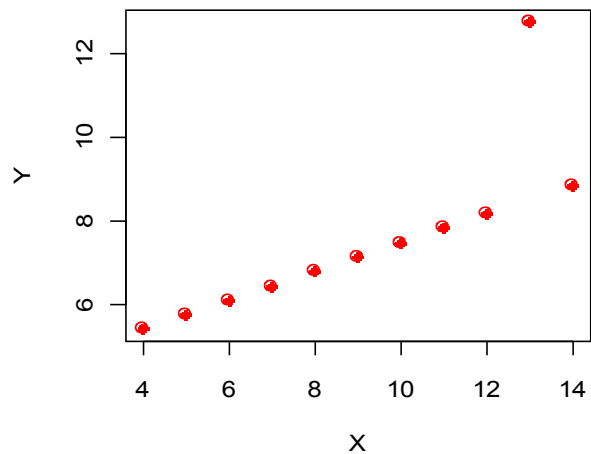
Exemplo 1



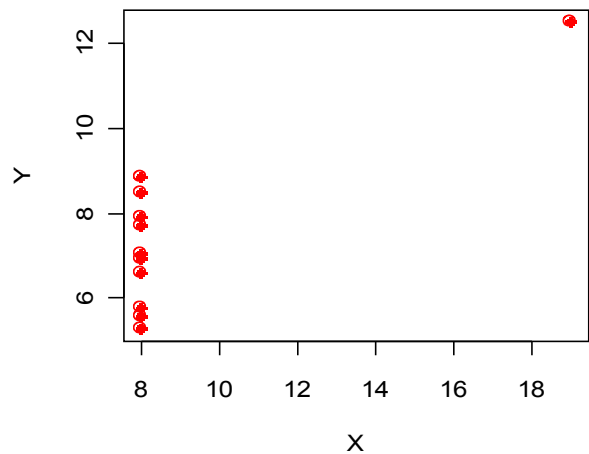
Exemplo 2



Exemplo 3



Exemplo 4



Correlações:

Exemplo 1: 0,8164

Exemplo 2: 0,8162

Exemplo 3: 0,8163

Exemplo 4: 0,8165