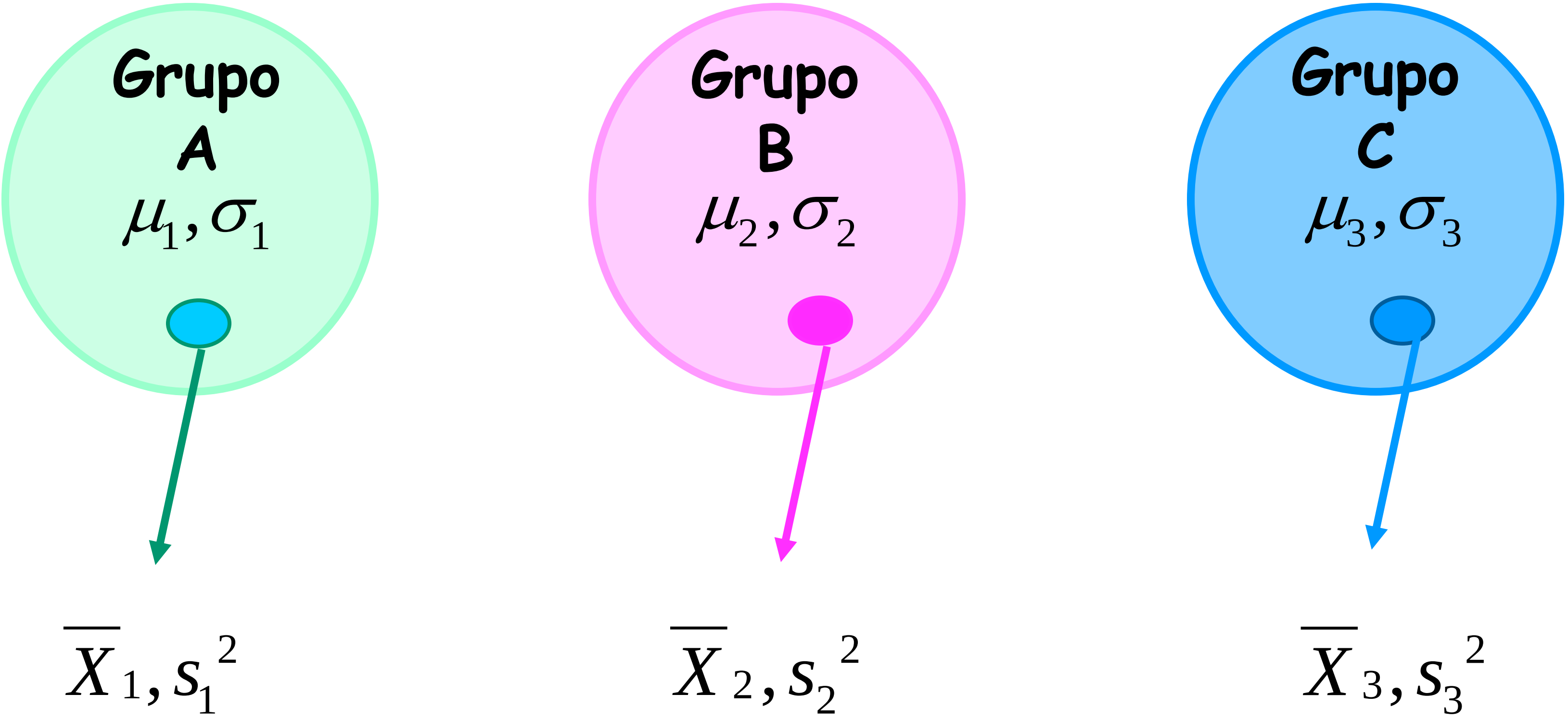
# 8. Análise de variância

**USP – ICMC – SME**

**2013**

# Comparando três populações




Populações independentes e normalmente distribuídas.

# Como comparar as médias?

Teste *z* ou *t* duas a duas:

Para 3 amostras teremos $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3\ testes$

Para 6 amostras teremos $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15\ testes$

# Problemas ...

- A quantidade de testes "explode", quando a quantidade de amostras aumenta.
- A condução de múltiplos testes *t* para duas amostras, duas a duas, pode levar a uma conclusão incorreta.

Suponha que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ e $\alpha$ = 0,05 em cada teste *t*.
Então, supondo independência entre os testes,

p(*conclusão correta em todos os testes*) = $0{,}95^3$ = 0,857
e

p(*rejeitar* $H_0$ *em pelo menos um teste*) = 1 - 0,857 = 0,143.

Portanto, ao realizar múltiplos testes *t*, aumentamos a probabilidade de cometer um erro do tipo I.

Deseja-se um teste para comparar as diversas médias, no qual a probabilidade de cometermos um erro tipo I seja igual a um valor predeterminado $\alpha$.

**ANOVA**

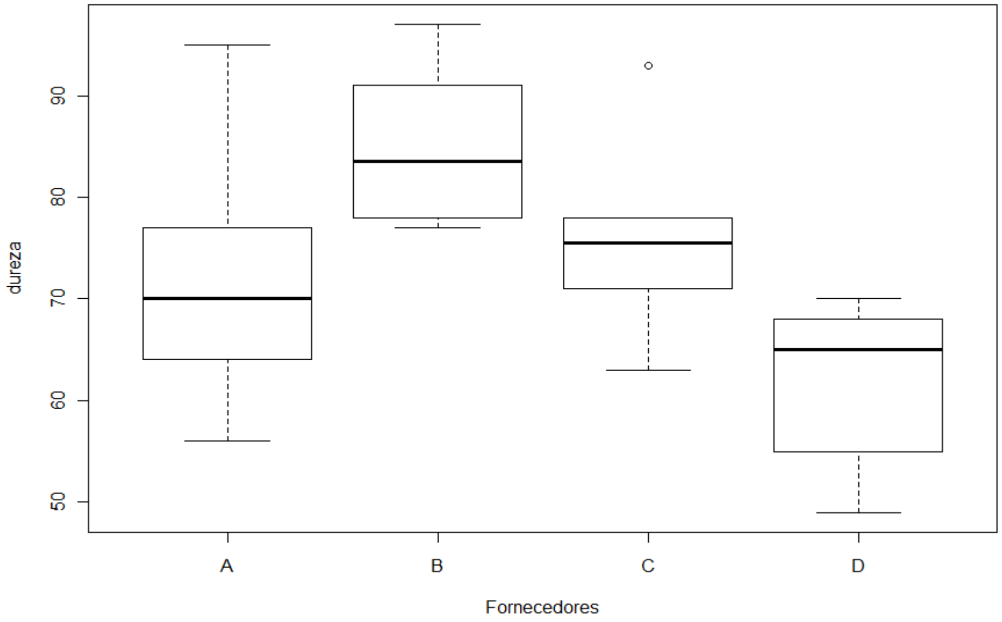
# Exemplo 1

Um experimento foi conduzido com a finalidade de verificar se existem diferenças significativas entre as médias da dureza de peças de aço (em HB) de quatro fornecedores (A, B, C e D).

| | Fornecedor de aço | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | |
| | 64 | 78 | 75 | 55 | |
| | 72 | 91 | 93 | 66 | |
| | 68 | 97 | 78 | 49 | |
| | 77 | 82 | 71 | 64 | |
| | 56 | 85 | 63 | 70 | |
| | 95 | 77 | 76 | 68 | |
| Total | 432 | 510 | 456 | 372 | 1770 |
| Média | 72 | 85 | 76 | 62 | 73.75 |

# Exemplo 1

Desenho esquemático da medida de dureza das molas produzidas com o aço de cada fornecedor .




- Existe uma forte suspeita de que há diferença entre os quatro fornecedores.
- Distribuições assimétricas.
- Valor discrepante.

# Modelo de análise de variância (ANOVA)

Para descrever situações como apresentado neste exemplo, adota-se o modelo

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} = \underbrace{\mu + \tau_i}_{\mu_i} + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\ldots,4, \\ j=1,2,\ldots,6. \end{array}$$

$y_{ij}$ é a j-ésima medida de dureza das molas produzidas com o aço do i-ésimo fornecedor.

$\mu_i$ é média do i-ésimo fornecedor,

$\mu$ é uma constante para todas as observações (média geral),

$\tau_i$ é o efeito do i-ésimo fornecedor e

$\varepsilon_{ij}$ é o erro aleatório (combina erros de medida, fatores não controláveis, diferenças entre as unidades experimentais, etc.).

**Objetivo:** Testar se existem diferenças entre as durezas médias do aço vendido pelos quatro fornecedores .

Hipóteses: $H_0$: $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_4 = \mu$

$H_1$: $\mu_i \neq \mu_j$ para pelo menos um par (i,j) sejam diferentes, ($i \neq j$ = 1, 2,3,4) .

Em geral,

| Dados gerais de um experimento com um único fator | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tratamentos (níveis) | Observações | | | | | | Totais | Médias |
| 1 | $y_{11}$ | $y_{12}$ | . | . | . | $y_{1r}$ | $y_{1.}$ | $\overline{y}_1$ |
| 2 | $y_{21}$ | $y_{22}$ | . | . | . | $y_{2r}$ | $y_{2.}$ | $\overline{y}_2$ |
| . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . |
| a | $y_{a1}$ | $y_{a2}$ | . | . | . | $y_{ar}$ | $y_{a.}$ | $\overline{y}_a$ |

# Modelo estatístico (one-way):

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} = \underbrace{\mu + \tau_i}_{\mu_i} + \varepsilon_{ij}$$

i=1,2,...,a, (tratamentos)
j=1,2,...,r (observações)

$y_{ij}$= é a j-ésima observação do i-ésimo tratamento,

$\mu_i$ é média do i-ésimo tratamento ,

$\mu$ é uma constante para todas as observações (média geral),

$\tau_i$ é o efeito do i-ésimo tratamento e

$\varepsilon_{ij}$ é o erro aleatório(erros de medida, fatores não controláveis, diferenças entre as unidades experimentais, etc.).

Suposições:

1) os erros aleatórios são independentes,

2) os erros aleatórios são *normalmente* distribuídos

3) e os erros aleatórios têm média 0 e variância $\sigma^2$,

ou seja, $$y_{ij} \sim N(\mu + \tau_i ; \sigma^2) \text{ e independentes.}$$

Hipóteses: $H_0$: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a = \mu$

$H_1$: $\mu_i \neq \mu_j$ para pelo menos um par (i,j), $i \neq j$.

Equivalentemente,

Hipóteses: $H_0$: $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$

$H_1$: $\tau_i \neq 0$ para pelo menos um i.

A denominação análise de variância resulta de decompor a variabilidade total dos dados em suas componentes. A soma de quadrados totais (SQT) em relação à média

$$SQT = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_{..}\right)^2,$$

é usada como medida de variabilidade total dos dados.

Pode-se mostrar que a soma de quadrados total pode ser escrita como

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_{..}\right)^2}_{SQT} = \underbrace{r\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}\right)^2}_{SQtrat} + \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i.}\right)^2}_{SQ_E}.$$

$$\text{SQT} = \text{SQTrat} + \text{SQE}.$$

**Graus de liberdade**:

SQT tem *ar-1* graus de liberdade; SQTrat tem *a-1* g.l. e SQE tem *a(r-1)* g.l.

**Quadrados médios:**

$$QMTrat = \frac{SQTrat}{a-1} \qquad \mathrm{QME} = \frac{\mathrm{SQE}}{\mathrm{a(r\text{-}1)}}$$

Esperanças dos quadrados médios:

$$\mathrm{E(QME)} = \sigma^2$$

$$\mathrm{E(QMTrat)} = \sigma^2 + \frac{\mathrm{r}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{a}} \tau_{\mathrm{i}}^2}{\mathrm{a}-1}$$

15

## Observação.

- Um estimador de $\sigma^2$ é QME.
- Se não houver diferenças no nível médio dos tratamentos, QMtrat proporciona outro estimador para $\sigma^2$.
- Entretanto, se observamos diferenças na média dos tratamentos, $E(QMtrat) > \sigma^2$.

- $\varepsilon_{ij} \sim NID(0;\sigma^2)$
- $y_{ij} \sim NID(\mu+\tau_i;\sigma^2)$
- $y_{i.} = \sum_{j=1}^{r} y_{ij} \sim NID(r\mu + r\tau_i; r\sigma^2)$;
- $\overline{y}_{i.} = \dfrac{\sum_{j=1}^{r} y_{ij}}{r} \sim NID(\mu+\tau_i;\sigma^2/r)$;
- $W_1 = \dfrac{\mathrm{SQE}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(a(r-1))}$;
- $W_2 = \dfrac{\mathrm{SQtrat}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(a-1)}$;
- $W_1$ e $W_2$ são independentes.

NID significa normal e identicamente distribuída.

Hipóteses: $H_0$: $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_a$

$H_1$: $\mu_i \neq \mu_j$ para pelo menos um par (i,j), i ≠ j.

Estatística de teste:

$$F_0 = \frac{SQtrat/(a-1)}{SQE/a(r-1)} = \frac{QMtrat}{QME} \underset{sobH_0}{\sim} F(a-1,\ a(r-1))$$

Se $F_0 > F_{\alpha,\ a-1,\ a(r-1)}$ rejeita-se $H_0$.

| Tabela da análise de variância de um experimento com um fator. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Fontes de variação | Soma de quadrados | Graus de liberdade | Quadrados médios | $F_0$ |
| Entre tratamentos | $SS_{Tratamentos}$ | a-1 | $QM_{Tratamentos}$ | $\frac{QM_{Tratamentos}}{QM_{Erro}}$ |
| Erro | $SS_{Erro}$ | N-a | $QM_{Erro}$ | |
| Total | $SS_T$ | N-1 | | |

Valor p

N = an

Exemplo: Considerando o exemplo 1, temos

| | Tratamentos (fornecedores) A | B | C | D | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 64 | 78 | 75 | 55 | a = 4 | |
| | 72 | 91 | 93 | 66 | r = 6 | |
| | 68 | 97 | 78 | 49 | ar = 24=n | |
| | 77 | 82 | 71 | 64 | | |
| | 56 | 85 | 63 | 70 | | |
| | 95 | 77 | 76 | 68 | | |
| Total ($y_{i.}$) | 432 | 510 | 456 | 372 | 1770 | $y_{..}$ |
| Média $(\bar{y}_{i.})$ | 72 | 85 | 76 | 62 | 73.75 | $\bar{y}_{..}$ |
| $\sum_j y_{ij}^2$ | 31994 | 43652 | 35144 | 23402 | 134192 | $\sum_{i,j} y_{ij}^2$ |

# Exemplo 1

$$SQT = 134192 - \underbrace{\frac{(1770)^2}{24}}_{FC} = 134192 - 130558 = 3654,$$

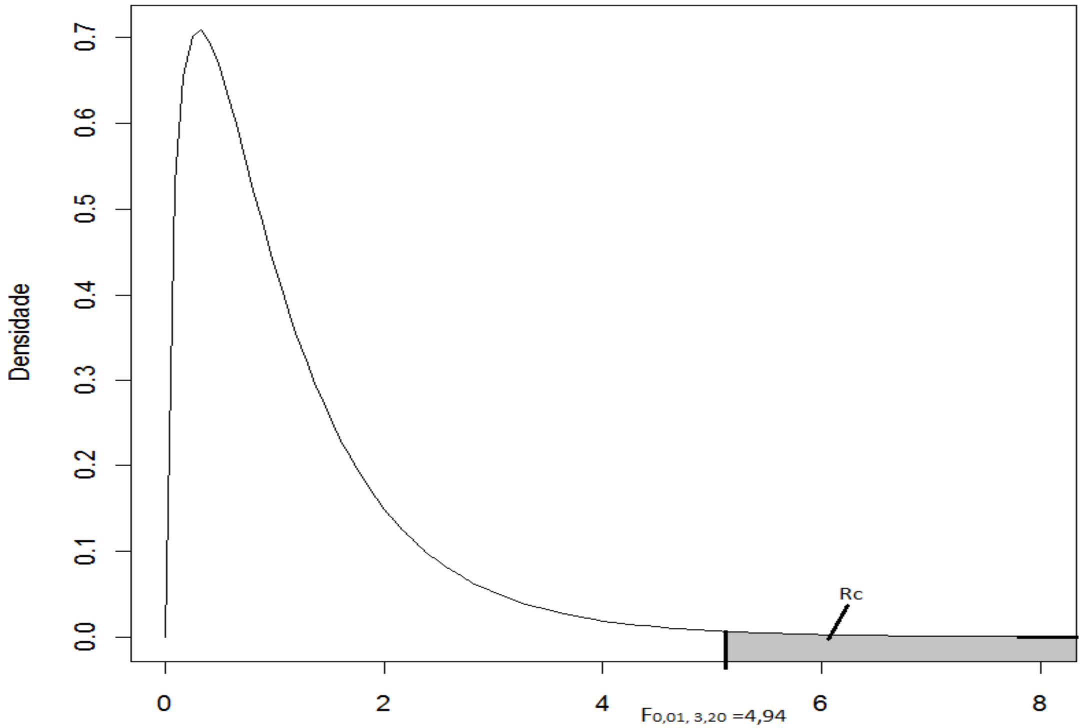
$$SQTrat = \frac{432^2 + 510^2 + 456^2 + 372^2}{6} - FC = 132174 - 130559 = 1636$$

e $SQE = SQT - SQTrat = 3654 - 1636 = 2018.$

| Fontes de variação | GL | SQ | QM | F |
|---|---|---|---|---|
| Fornecedores (entre fornecedores) | 3 | 1636 | 545,3 | 5,40** |
| Erro experimental (intra-fornecedores) | 20 | 2018 | 100,9 | |
| Total | 23 | 3654 | | |

$$F_{0.01;3,20} = 4,94$$

** Significativo a 1%.




$$F_0 = 5.40 > F_{0.01;3,20} = 4.94$$

A diferença entre médias de tratamentos é significativa ($p < 0.01$). Rejeita-se $H_{0}$.

## Conclusão

Os quatro fornecedores se diferenciam em termos da medida de dureza do aço vendido a um nível de significância de 1%.

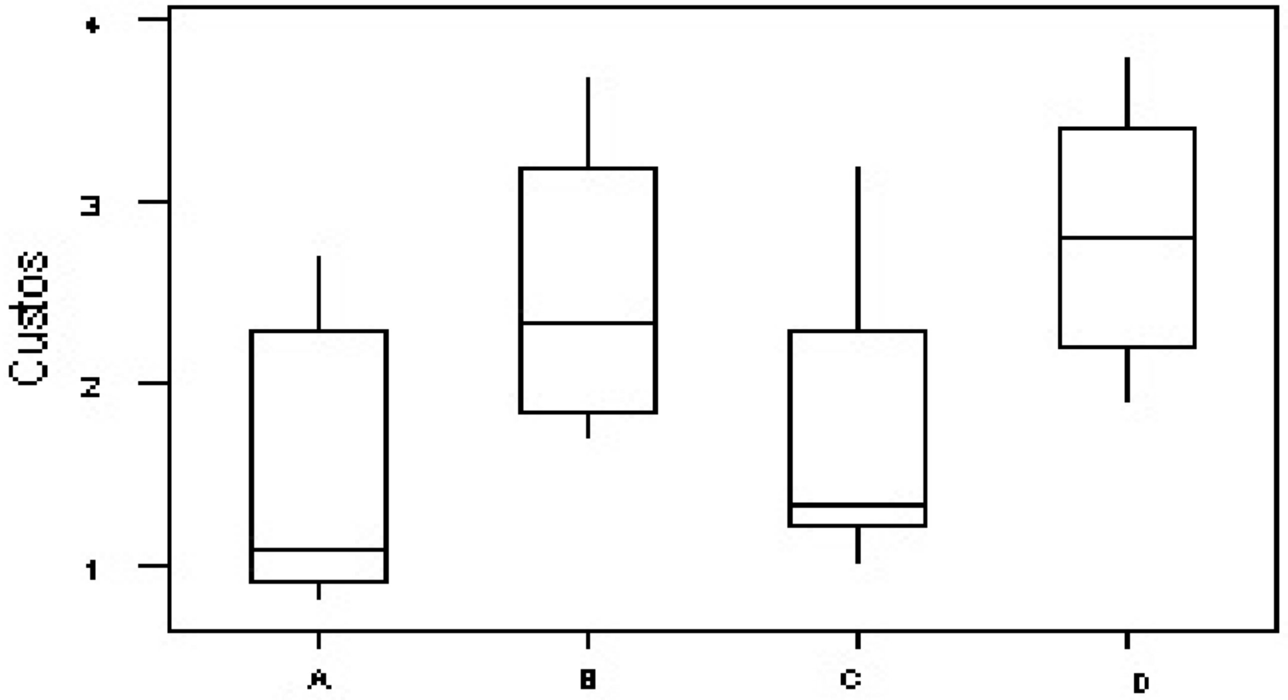
```
>dados = read.table("anovaplicada.txt", header = T)

attach(dados)

# Gráfico de caixas (boxplot)

>boxplot(dureza ~ fornecedor, xlab = “Fornecedor", ylab = “Dureza")

# Tabela de ANOVA

>fit = aov(dureza ~ fornecedor, dados)

> anova(fit)

Analysis of Variance Table


Response: dureza

                Df    Sum Sq    Mean Sq   F value   Pr(>F)

fornecedor   3      1636.5      545.5          5.4063    0.006876 **

Residuals   20      2018.0      100.9

---

Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

# Modelo de ANOVA com um fator desbalanceado

Exemplo 2. Um departamento governamental está preocupado com os aumentos dos custos dos projetos encomendados aos institutos A, B, C e D. Por esse motivo, decidiu analisar os custos associados a diferentes projetos, calculando, para cada um deles, a razão entre o custo final incorrido e o custo inicialmente previsto. Para cada projeto, ambos custos foram expressos em uma base constante.

Relação custos incorridos/custos previstos em projetos realizados pelos institutos A, B, C e D.

| Instituto A | Instituto B | Instituto C | Instituto D |
|---|---|---|---|
| 1,0 | 1,7 | 1,0 | 3,8 |
| 0,8 | 2,5 | 1,3 | 2,8 |
| 1,9 | 3,0 | 3,2 | 1,9 |
| 1,1 | 2,2 | 1,4 | 3,0 |
| 2,7 | 3,7 | 1,3 | 2,5 |
| | 1,9 | 2,0 | |




Obs. O gráfico é apenas ilustrativo, pois os números de observações são pequenos. Qual gráfico você sugere? (vide também lâmina 7).

# Modelo estatístico (unbalanced one-way)

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} = \underbrace{\mu + \tau_i}_{\mu_i} + \varepsilon_{ij}$$

i=1,2,...,a, (tratamentos)
j=1,2,...,$r_i$ (observações)

$y_{ij}$ é a j-ésima observação do i-ésimo tratamento,

$\mu_i$ é média do i-ésimo tratamento ,

$\mu$ é uma constante para todas as observações (média geral),

$\tau_i$ é o efeito do i-ésimo tratamento

e $\varepsilon_{ij}$ é o erro aleatório,

com a restrição $\sum_{i=1}^{a} r_i \tau_i = 0.$

Os estimadores de mínimos quadrados de $\mu$ e $\alpha_i$ são obtidos minimizando

$$Q = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r_i}\varepsilon_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij} - \mu - \tau_i\right)^2 \qquad (*)$$

Ao derivar a equação (*) em relação a $\mu$ e $\alpha$i e igualar a zero, obtemos

$$-2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i\right) = 0,$$

$$-2\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i\right) = 0,\ i = 1,\ldots,a$$

Após simplificar, obtemos as equações normais

$$
\begin{aligned}
&N\hat{\mu} + r_1\hat{\tau}_1 + r_2\hat{\tau}_2 + \cdots + r_a\hat{\tau}_a &&= Y_{\bullet\bullet} \\
&N\hat{\mu} + r_1\hat{\tau}_1 &&= Y_{1\bullet} \\
&N\hat{\mu} \qquad + r_2\hat{\tau}_2 &&= Y_{2\bullet} \\
&\vdots && \vdots \\
&N\hat{\mu} \qquad + \qquad r_a\hat{\tau}_a &&= Y_{2\bullet}
\end{aligned}
$$

$$\text{sendo N} = \sum_{\text{i}=2}^{\text{a}} \text{r}_\text{i},\ Y_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\text{r}_\text{i}} Y_{ij}, e\ Y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{\text{r}_\text{i}} Y_{ij}$$

Ao usar a restrição restrição $\sum r_i\alpha=0$, as soluções das equações normais são

$$\hat{\mu} = \overline{Y}_{\bullet\bullet}$$

$$\hat{\tau}_i = \overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}, \quad i = 1, \cdots, a$$

$$\hat{\mu}_i = \overline{Y}_{i\bullet}, \qquad i = 1, \cdots, a$$

em que $\overline{Y}_{\bullet\bullet} = \dfrac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij}}{N}.$

Considerando o exemplo 2, as estimativas dos parâmetros do modelo são

$$\hat{\mu}_1 = \overline{Y}_{1\bullet} = (1{,}0 + 0{,}8 + 1{,}9 + 1{,}1 + 2{,}7)/5 = 1{,}5$$

$$\hat{\mu}_2 = \overline{Y}_{2\bullet} = (1{,}7 + 2{,}5 + 3{,}0 + 2{,}2 + 3{,}7 + 1{,}9)/6 = 2{,}5$$

$$\hat{\mu}_3 = \overline{Y}_{3\bullet} = (1{,}0 + 1{,}3 + 3{,}2 + 1{,}4 + 1{,}3 + 2{,}0)/6 = 1{,}7$$

$$\hat{\mu}_4 = \overline{Y}_{4\bullet} = (3{,}8 + 2{,}8 + 1{,}9 + 3{,}0 + 2{,}5)/5 = 2{,}8$$

$$\hat{\mu} = \overline{Y}_{\bullet\bullet} = 2{,}12$$

$$\hat{\tau}_1 = 1{,}5 - 2{,}12 = -0{,}62$$

$$\hat{\tau}_2 = 2{,}5 - 2{,}12 = 0{,}38$$

$$\hat{\tau}_3 = 1{,}7 - 2{,}12 = -0{,}42$$

$$\hat{\tau}_4 = 2{,}8 - 2{,}12 = 0{,}67$$

# Análise de variância

A denominação de análise de variância resulta de decompor a variabilidade total dos dados em suas componentes. A soma de quadrado total (SQT) corrigido pela média global ,

$$SQT = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{r_i} \left( y_{ij} - \bar{y}_{..} \right)^2,$$

usa-se como medida de variabilidade total dos dados.

Pode-se mostrar que a soma de quadrados total pode ser escrita como

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{r_i} \left( y_{ij} - \bar{y}_{..} \right)^2}_{SQT} = \underbrace{\sum_{i=1}^{a} r_i \left( \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \right)^2}_{SQtrat} + \underbrace{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{r_i} \left( y_{ij} - \bar{y}_{i.} \right)^2}_{SQ_E}$$

SQT = SQTrat + SQE.

$$SQE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\left[\sum_{j=1}^{r_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2\right]$$

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{r_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2}{r_i - 1},\ i = 1, \ldots, a \qquad SQE = \sum_{i=1}^{a}(r_i - 1)S_i^2$$

$$QME = \frac{QME}{N - a} = \frac{\sum_{i=1}^{a}(r_i - 1)S_i^2}{\sum_{i=1}^{a}(r_i - 1)} \text{ (Variância ponderada)}$$

**Graus de liberdade**:

SQT tem *N-1* graus de liberdade; SQTrat tem *a-1* g.l. e SQE tem *N-a* g.l.

**Quadrados médios:**

$$QMTrat = \frac{SQTrat}{a-1} \qquad \mathrm{QME} = \frac{\mathrm{SQE}}{\mathrm{N\text{-}a}}$$

Esperanças dos quadrados médios:

$$E(QME) = \sigma^2$$

$$\mathrm{E(QMTrat)} = \sigma^2 + \frac{\sum_{i=1}^{a} r_i \tau_i^2}{a-1}$$

Hipóteses: $H_0$: $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_a$

$H_1$: $\mu_i \neq \mu_j$ para pelo menos um par (i,j)

Estatística de teste:

$$F_0 = \frac{SQtrat/(a-1)}{SQE/(N-a)} = \frac{QMtrat}{QME} \underset{sobH_0}{\sim} F(a-1,\ a(r-1))$$

Se $F_0 > F_{\alpha,\ a-1,\ N-a}$ rejeita-se $H_0$ .

Tabela da análise de variância de um experimento com um fator.

| Fontes de variação | Soma de quadrados | Graus de liberdade | Quadrados médios | $F_0$ |
|---|---|---|---|---|
| Entre tratamentos | $SS_{Tratamentos}$ | a-1 | $QM_{Tratamentos}$ | $\frac{QM_{Tratamentos}}{QM_{Erro}}$ |
| Erro | $SS_{Erro}$ | N-a | $QM_{Erro}$ | |
| Total | $SS_T$ | N-1 | | |

Considerando os dados do exemplo 2:

| | Instituto A | Instituto B | Instituto C | Instituto D | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1,0 | 1,7 | 1,0 | 3,8 | |
| | 0,8 | 2,5 | 1,3 | 2,8 | |
| | 1,9 | 3,0 | 3,2 | 1,9 | |
| | 1,1 | 2,2 | 1,4 | 3,0 | |
| | 2,7 | 3,7 | 1,3 | 2,5 | |
| | | 1,9 | 2,0 | | |
| Total $Y_{i.}$ | 7,5 | 15,0 | 10,2 | 14,0 | $Y_{..} = 46,7$ |
| Média $\bar{Y}_{i.}$ | 1,5 | 2,5 | 1,7 | 2,8 | $\bar{Y}_{..} = 2,12$ |

$$SQT = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$= 1,0^2 + 0,8^2 + \cdots + 2,5^2 - \frac{46,7^2}{22} = 16,619.$$

$$SQtrat = \sum_{i=1}^{4} \frac{Y_{i\bullet}^2}{r_i} - \frac{Y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$= \frac{(7{,}5)^2}{5} + \frac{(15{,}0)^2}{6} + \frac{(10{,}2)^2}{4} + \frac{(14{,}0)^2}{5} - \frac{(46{,}7)^2}{22} = 6{,}159$$

$$SQE = SQT - SQtrt = 16{,}619 - 6{,}159 = 10{,}46$$

| Fontes de variação | GL | SQ | QM | F |
|---|---|---|---|---|
| Tratamento (entre institutos) | 3 | 6,159 | 2,053 | 3,533* |
| Erro experimental (intra-institutos) | 18 | 10,460 | 0,581 | |
| Total | 22 | 16,619 | | |

$$F_{0{,}01;3{,}18} = 3{,}16$$

*Significativo a um nível de 5%.

## Conclusão

Concluímos que os institutos têm comportamentos diferentes no que diz respeito à relação custos incorridos/custos previstos dos projetos realizados.

## Diagnóstico do modelo

Verificar se as suposições básicas do modelo são válidas. Isso é realizado através de uma análise de resíduos. Define-se o resíduo da ij-ésima observação como

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij},$$

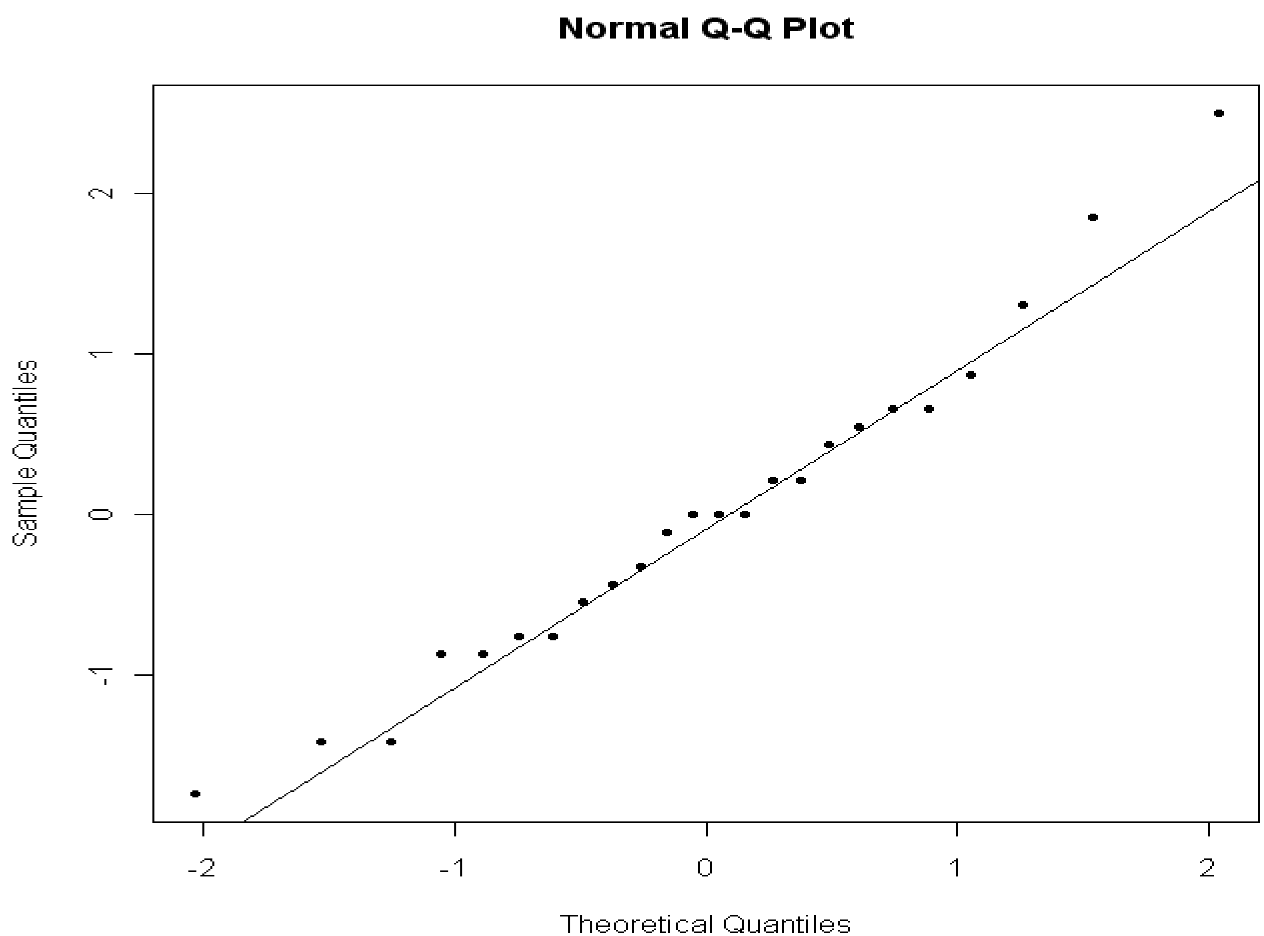
em que $\hat{y}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.}$ é o valor predito pelo modelo.

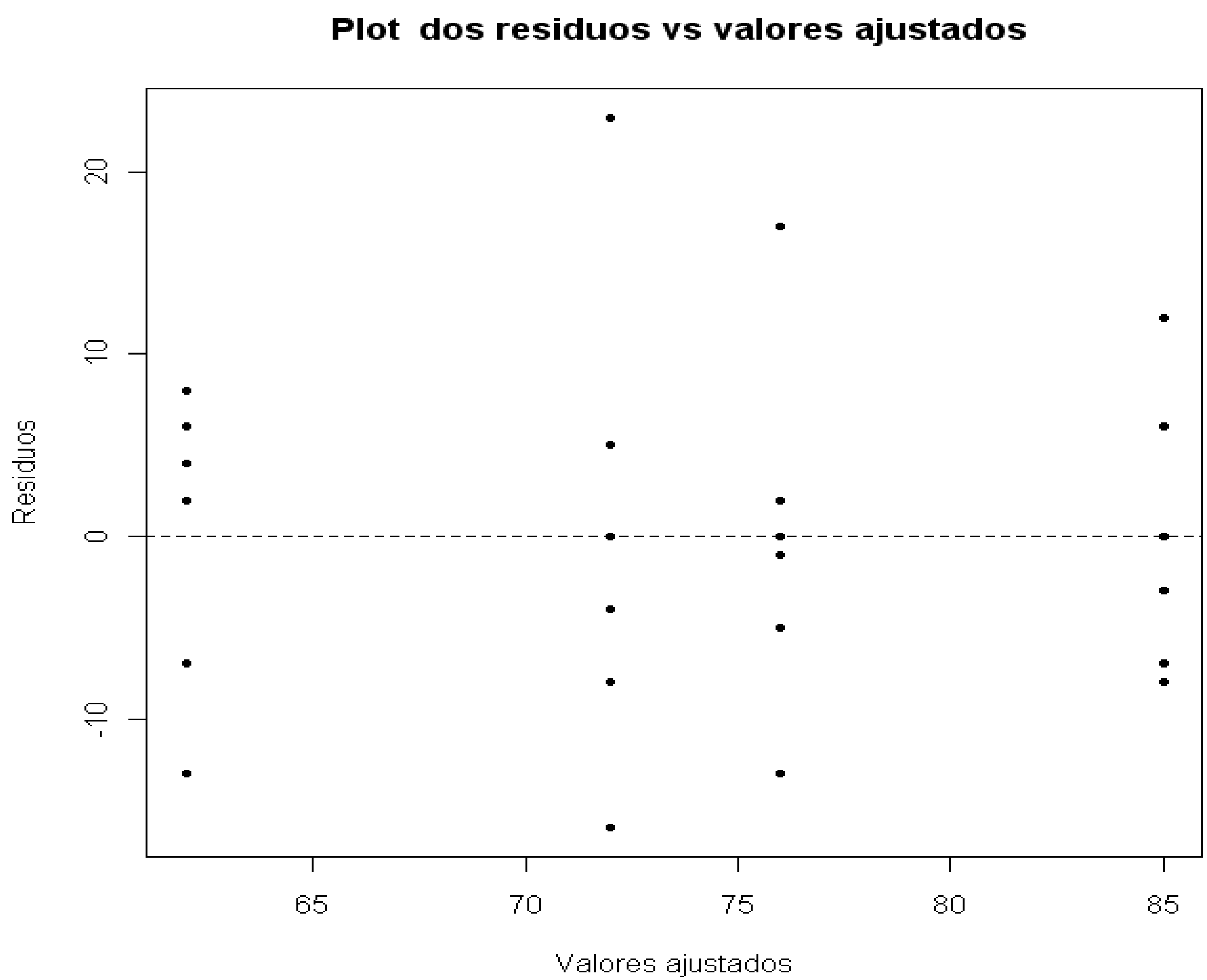
## Resíduo padronizado:

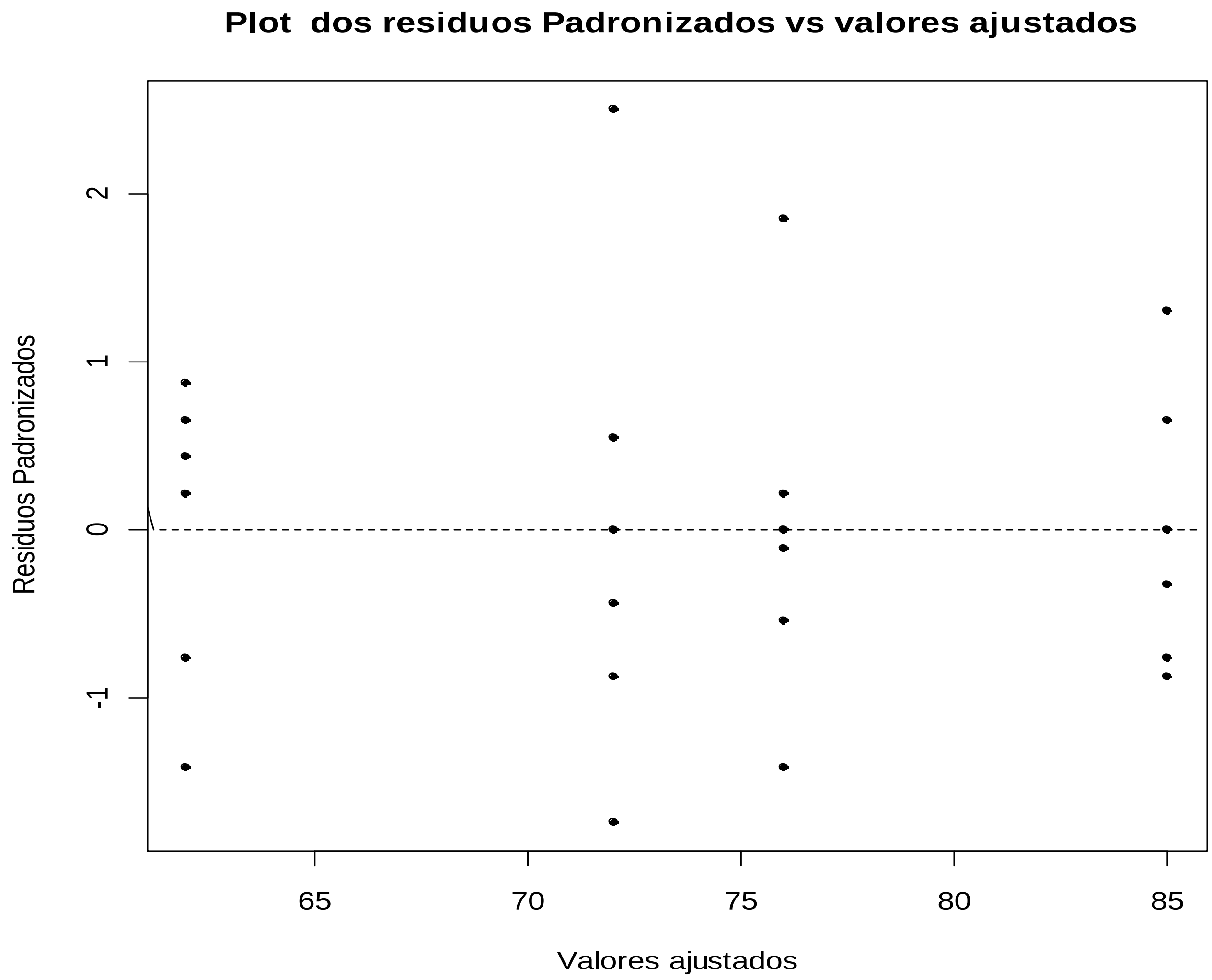
$$d_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{QME}}.$$

## Suposição de normalidade

Utilizamos o gráfico normal de probabilidades para os resíduos padronizados. Sob normalidade dos erros, este gráfico deve apresentar uma forma de reta.


Normal Q-Q Plot
Sample Quantiles
-1
0
1
2
-2
-1
0
1
2
Theoretical Quantiles


Plot dos residuos vs valores ajustados
Residuos
Valores ajustados
-10
0
10
20
65
70
75
80
85



Plot dos residuos Padronizados vs valores ajustados
Residuos Padronizados
-1
0
1
2
65
70
75
80
85
Valores ajustados

```
## Análise de  resíduos
V_ajustados = fitted(fit)          # Valores preditos
res = residuals(fit)                # Valores residuais
padr = rstandard(fit)               # Valores residuais padronizados
# Gráfico  de  probabilidade
qqnorm(res, pch = 20)
qqline(res)
## Gráfico de valores preditos e resíduos
plot(V_ajustados, res, pch = 20, ylab = "Residuos", xlab = "Valores ajustados")
abline(h = 0, lty = 2)
title(main=" Plot  dos residuos vs valores ajustados")
```

## Contraste

No Exemplo 1 a hipótese nula foi rejeitada. Deseja-se saber entre quais fornecedores há diferença. Por exemplo, tem-se interesse em verificar se as durezas médias obtidas com o aço dos fornecedores A e D são diferentes.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_4$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_4$$

Equivalentemente,

$$H_0 : \mu_1 - \mu_4 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_4 \neq 0$$

Suponha que tem-se interesse em verificar se a dureza média dos itens produzidos com o aço dos fornecedores A e B conjuntamente são as mesmas que a dos fornecedores C e D.

$$H_0 : \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4 \Rightarrow H_0 : \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 + \mu_2 \neq \mu_3 + \mu_4 \Rightarrow H_1 : \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 \neq 0$$

Em geral, um constraste é uma combinação linear dos parâmetros da forma

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$$

com a restrição $\sum_{i=1}^{a} c_i = 0.$

As hipóteses acima podem ser escritasem termos de contrastes:.

$$H_0 : \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i = 0$$

$$H_1 : \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i \neq 0$$

Uma estimador dos contrastes é dado por

$$C = \sum_{i=1}^{a} c_i \overline{Y}_{i\bullet}$$

A variância de C é

$$Var(C) = \frac{\sigma^2}{r} \sum_{i=1}^{a} c_i^2$$

quando os dados são balanceados.

Sob $H_0$,

$$Z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{a} c_i \overline{Y}_{i\bullet}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{r}\sum_{i=1}^{a} c_i^2}} \sim N(0,1).$$

Como $\sigma^2$ é desconhecido, seu estimador é QME. Sob $H_0$,

$$t_0 = \frac{\sum_{i=1}^{a} c_i \overline{Y}_{i\bullet}}{\sqrt{\frac{QME}{r}\sum_{i=1}^{a} c_i^2}} \sim t_{N-a}.$$

# Intervalo de confiança para contrastes

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$$

$$C = \sum_{i=1}^{a} c_i \overline{Y}_{i\bullet}$$

$$E(C) = E\left[\sum_{i=1}^{a} c_i \overline{Y}_{i\bullet}\right] = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i \quad \text{e} \quad Var(C) = \frac{\sigma^2}{r} \sum_{i=1}^{a} c_i^2$$

$$t = \frac{\sum_{i=1}^{a} c_i \overline{Y}_{i\bullet} - \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i}{\sqrt{\frac{QME}{r} \sum_{i=1}^{a} c_i^2}}$$

Intervalo de 100(1-$\alpha$)% confiança para o contraste C:

$$\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{Y}_{i\bullet} \pm t_{\alpha/2,N-a} \sqrt{\frac{QME}{r} \sum_{i=1}^{a} c_i^2}\,.$$

## Método de Scheffe para comparar todos os contrastes

Suponha um conjunto de m contrastes

$$\Gamma_j = c_{1j}\mu_1 + c_{2j}\mu_2 + \cdots + c_{aj}\mu_a, \quad j = 1, \cdots, m.$$

Os estimadores dos contrastes são

$$C_j = c_{1j}\overline{Y}_{1\bullet} + c_{2j}\overline{Y}_{2\bullet} + \cdots + c_{aj}\overline{Y}_{a\bullet}, \quad j = 1, \cdots, m.$$

Erro padrão do estimador do contraste $j$:

$$SC_j = \sqrt{QME \sum_{i=1}^{a} c_{ij}^2 / r_i},$$

Em que $r_i$ é o número de observações no $i$-ésimo tratamento. É possível demonstrar que o valor crítico com o qual $C_j$ deve ser comparado é

$$S_{\alpha,j} = SC_j \sqrt{(a-1) F_{\alpha, a-1, N-a}}.$$

Se $|C_j| > S_{\alpha,u}$ a hipótese nula de que o contraste $\Gamma_u$

é igual a 0 deve ser rejeitada.

Para ilustrar o procedimento considere os dados do exemplo 1 e suponha que o contraste de interesse é

$$\Gamma_1 : 3\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4.$$

Estimativa:

$$C_1 = 3\overline{Y}_{1\bullet} - \overline{Y}_{2\bullet} - \overline{Y}_{3\bullet} - \overline{Y}_{4\bullet}$$

$$C_1 = 3(72) - 85 - 76 - 62 = -7.$$

Erro padrão:

$$SC_1 = \sqrt{QME \sum_{i=1}^{a} c_{i1}^2 / r_i} = \sqrt{100{,}9(9+1+1+1)/6} = 14{,}2.$$

Valor crítico:

$$S_{0,05,1} = SC_1\sqrt{(a-1)F_{\alpha,a-1,N-a}} = 14{,}2\sqrt{(4-1)(4{,}3)} = 51{,}00.$$

Como $|C_1| < S_{0,05;\,1}$, conclui-se que o contraste $\Gamma 1$ é igual a zero a um nível de significância de 5%.

$$H_0 : \mu_i = \mu_j$$

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j \, , \forall i \neq j$$

Devem ser realizadas após o teste $F$ da análise de variância rejeitar a hipótese nula de igualdade de todas as médias.

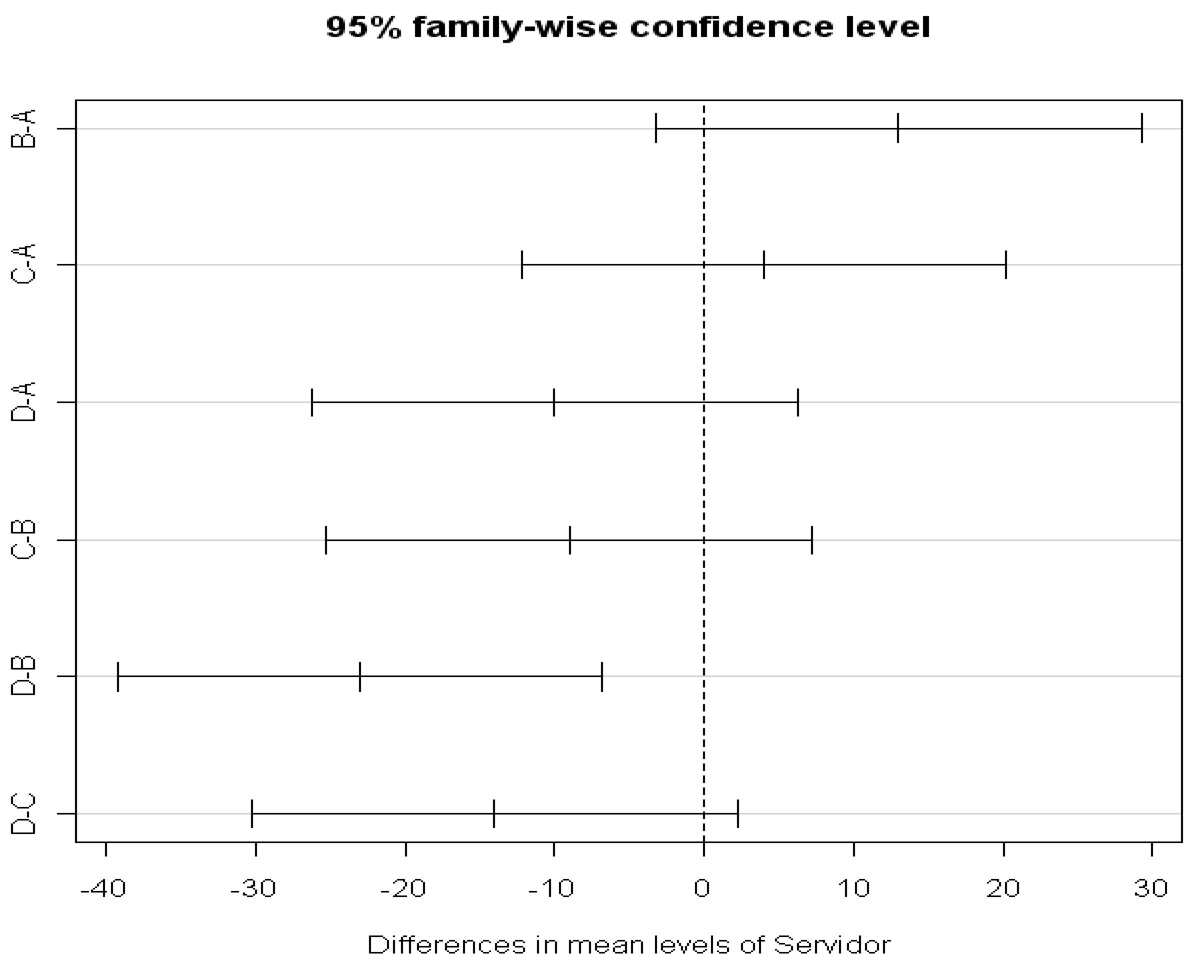
## Teste de Tukey (1953)

Duas médias são significativamente diferentes se a diferença das médias amostrais (em valor absoluto) for superior a $T_\alpha$ (diferença mínima significativa):

$$T_\alpha = \frac{q_\alpha(a, f)}{\sqrt{2}} \sqrt{QME\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}\right)},$$

em que $q_\alpha(a,f)$ é calculado a partir do número de níveis do tratamento ($a$) e dos graus de liberdade ($f$).

```
> TukeyHSD(fit,  ordered = TRUE)
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level
    factor levels have been ordered
Fit: aov(formula = dureza ~ fornecedor, data = dados)

$Fornecedor
      diff        lwr      upr       p adj
A-D   10  -6.232221 26.23222   0.3378150
C-D   14  -2.232221 30.23222   0.1065573
B-D   23   6.767779 39.23222   0.0039064
C-A    4 -12.232221 20.23222  0.8998057
B-A   13  -3.232221 29.23222  0.1461929
B-C    9  -7.232221 25.23222  0.4270717
```


95% family-wise confidence level
B-A
C-A
D-A
C-B
D-B
D-C
-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
Differences in mean levels of Servidor

# Comparações com a média de um tratamento controle

Em muitos experimentos, um dos tratamentos é um controle e o pesquisador tem interesse em comparar cada um dos a-1 tratamentos restantes com o tratamento controle. Um procedimento para esse caso foi densenvolvido por Dunnett (1964).

$$H_0 : \mu_i = \mu_a$$
$$H_1 : \mu_i \neq \mu_a \,, i = 1, \ldots, a-1$$

O procedimento de Dunnett é uma modificação do teste $t$.

Para cada uma das diferenças em H1, obtenha a diferença entre as médias amostrais:

$$\left|\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{a\bullet}\right|, \; i = 1, \ldots, a-1$$

A hipótese nula é rejeitado ao nível de significância $\alpha$ se

$$\left|\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{i}\bullet} - \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{a}\bullet}\right| > d_{\alpha}(a-1, f)\sqrt{\mathrm{QME}\left(1/\mathrm{r}_{\mathrm{i}} + 1/\mathrm{r}_{\mathrm{a}}\right)},$$

sendo que a constante $d_\alpha(a\text{-}1,f)$ encontra-se tabelada.