

1. Simulação Estocástica e Números Pseudoaleatórios

USP/ICMC

1º/2023

Simulação

Simulação estocástica é a **arte** de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Simulação

Simulação estocástica é a **arte** de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Arte? Necessitamos de muitas técnicas para atingir o(s) objetivo(s) (Teoria dos Números, Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Computação, Análise Numérica, . . .)

Simulação

Simulação estocástica é a **arte** de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Arte? Necessitamos de muitas técnicas para atingir o(s) objetivo(s) (Teoria dos Números, Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Computação, Análise Numérica, . . .)

Variáveis aleatórias? Muitos problemas ou são de natureza não determinística ou porque é mais apropriado o tratamento estocástico.

Simulação

Simulação estocástica é a **arte** de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Arte? Necessitamos de muitas técnicas para atingir o(s) objetivo(s) (Teoria dos Números, Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Computação, Análise Numérica, . . .)

Variáveis aleatórias? Muitos problemas ou são de natureza não determinística ou porque é mais apropriado o tratamento estocástico.

Ambiente computacional? A complexidade e/ou o volume de dados impedem a busca de uma solução manual.

Simulação

Simulação estocástica é a **arte** de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Arte? Necessitamos de muitas técnicas para atingir o(s) objetivo(s) (Teoria dos Números, Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Computação, Análise Numérica, . . .)

Variáveis aleatórias? Muitos problemas ou são de natureza não determinística ou porque é mais apropriado o tratamento estocástico.

Ambiente computacional? A complexidade e/ou o volume de dados impedem a busca de uma solução manual.

Certo resultado? O **bom** uso da simulação estocástica fornece resultados **aproximados**.

Geração de Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias i.i.d. $\text{Uniforme}(0,1)$.

Geração de Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias i.i.d. **Uniforme(0,1)**.

Procedimentos para geração de números **pseudoaleatórios**: as sequências geradas, embora sejam determinísticas, devem ter a “aparência” de aleatoriedade.

Geração de Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias i.i.d. **Uniforme(0,1)**.

Procedimentos para geração de números **pseudoaleatórios**: as sequências geradas, embora sejam determinísticas, devem ter a “aparência” de aleatoriedade.

Testes de geradores de números aleatórios.

Geração de Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias i.i.d. **Uniforme(0,1)**.

Procedimentos para geração de números **pseudoaleatórios**: as sequências geradas, embora sejam determinísticas, devem ter a “aparência” de aleatoriedade.

Testes de geradores de números aleatórios.

Período da sequência, precisão, repetibilidade e portabilidade.

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1 x_0 : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça $i = 0$.

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1 x_0 : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça $i = 0$.
- 2 Calcular x_i^2 . Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que x_i^2 seja escrito como $d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$, em que $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$, para $j = 0, 1, \dots, 7$.

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1 x_0 : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça $i = 0$.
- 2 Calcular x_i^2 . Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que x_i^2 seja escrito como $d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$, em que $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$, para $j = 0, 1, \dots, 7$.
- 3 Fazer $x_{i+1} = d_5d_4d_3d_2$ (**meio do quadrado**).

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1 x_0 : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça $i = 0$.
- 2 Calcular x_i^2 . Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que x_i^2 seja escrito como $d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$, em que $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$, para $j = 0, 1, \dots, 7$.
- 3 Fazer $x_{i+1} = d_5d_4d_3d_2$ (**meio do quadrado**).
- 4 Faça $i = i + 1$ e retorne ao passo 2 até que $i = n$.

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1 x_0 : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça $i = 0$.
- 2 Calcular x_i^2 . Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que x_i^2 seja escrito como $d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$, em que $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$, para $j = 0, 1, \dots, 7$.
- 3 Fazer $x_{i+1} = d_5d_4d_3d_2$ (**meio do quadrado**).
- 4 Faça $i = i + 1$ e retorne ao passo 2 até que $i = n$.
- 5 Divida os elementos da sequência por 10.000.

Exemplos:

(a) $\{2100, 4100, 8100, 6100, 2100, \dots\}$,

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1 x_0 : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça $i = 0$.
- 2 Calcular x_i^2 . Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que x_i^2 seja escrito como $d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$, em que $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$, para $j = 0, 1, \dots, 7$.
- 3 Fazer $x_{i+1} = d_5d_4d_3d_2$ (**meio do quadrado**).
- 4 Faça $i = i + 1$ e retorne ao passo 2 até que $i = n$.
- 5 Divida os elementos da sequência por 10.000.

Exemplos:

(a) $\{2100, 4100, 8100, 6100, 2100, \dots\}$,

(b) $\{3792, 3792, \dots\}$,

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1 x_0 : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça $i = 0$.
- 2 Calcular x_i^2 . Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que x_i^2 seja escrito como $d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$, em que $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$, para $j = 0, 1, \dots, 7$.
- 3 Fazer $x_{i+1} = d_5d_4d_3d_2$ (**meio do quadrado**).
- 4 Faça $i = i + 1$ e retorne ao passo 2 até que $i = n$.
- 5 Divida os elementos da sequência por 10.000.

Exemplos:

(a) $\{2100, 4100, 8100, 6100, 2100, \dots\}$,

(b) $\{3792, 3792, \dots\}$,

(c) Considere $x_0 =$ ano de seu nascimento.

G2. Geradores congruenciais lineares (Lehmer, 1951)

G2. Geradores congruenciais lineares (Lehmer, 1951)

Gerar uma sequência de inteiros $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, M deve ser “grande”. Fazer $u_i = x_i/M$, $i = 1, \dots, n$, em que

$$x_i = (ax_{i-1} + c) \bmod M,$$

sendo que $a, c, x_0 \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, x_0 é chamado de **semente** e *mod* representa o resto da divisão inteira.

G2. Geradores congruenciais lineares (Lehmer, 1951)

Gerar uma sequência de inteiros $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, M deve ser “grande”. Fazer $u_i = x_i/M$, $i = 1, \dots, n$, em que

$$x_i = (ax_{i-1} + c) \text{ mod } M,$$

sendo que $a, c, x_0 \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, x_0 é chamado de **semente** e *mod* representa o resto da divisão inteira.

O terno **(a, c, M)** caracteriza o gerador.

G2. Geradores congruenciais lineares (Lehmer, 1951)

Gerar uma sequência de inteiros $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, M deve ser “grande”. Fazer $u_i = x_i/M$, $i = 1, \dots, n$, em que

$$x_i = (ax_{i-1} + c) \text{ mod } M,$$

sendo que $a, c, x_0 \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, x_0 é chamado de **semente** e *mod* representa o resto da divisão inteira.

O terno (a, c, M) caracteriza o gerador. Exemplos:

(a) Gerador do IMSL: $a = 16807$, $c = 0$, $M = 2^{31} - 1$, período = $2^{31} - 2 = 2.147.483.646$.

(b) IBM RANDU: $a = 2^{16} + 3$, $c = 0$, $M = 2^{31}$.

G3. Outros geradores

G3. Outros geradores

(1) Geradores com períodos 2^{60} , 2^{113} e $2^{19937} - 1 \cong 10^{6002}$ (Mersenne-Twister, *default* em R).

G3. Outros geradores

(1) Geradores com períodos 2^{60} , 2^{113} e $2^{19937} - 1 \cong 10^{6002}$ (Mersenne-Twister, *default* em R).

(2) Gerador natural (Y. Dodge, 1996, *International Statistical Review* 64, 329–344): algarismos decimais de π .

Sugestão: Gravar bilhões de dígitos da parte fracionária de π e usar como gerador.

G3. Outros geradores

(1) Geradores com períodos 2^{60} , 2^{113} e $2^{19937} - 1 \cong 10^{6002}$ (Mersenne-Twister, *default* em R).

(2) Gerador natural (Y. Dodge, 1996, *International Statistical Review* 64, 329–344): algarismos decimais de π .

Sugestão: Gravar bilhões de dígitos da parte fracionária de π e usar como gerador.

Obs. 1. Cálculo de π com $12,1 \times 10^{12}$ dígitos decimais em dez/2013 (<http://mathworld.wolfram.com/PiDigits.html>).

G3. Outros geradores

(1) Geradores com períodos 2^{60} , 2^{113} e $2^{19937} - 1 \cong 10^{6002}$ (Mersenne-Twister, *default* em R).

(2) Gerador natural (Y. Dodge, 1996, *International Statistical Review* 64, 329–344): algarismos decimais de π .

Sugestão: Gravar bilhões de dígitos da parte fracionária de π e usar como gerador.

Obs. 1. Cálculo de π com $12,1 \times 10^{12}$ dígitos decimais em dez/2013 (<http://mathworld.wolfram.com/PiDigits.html>).

Obs. 2. Cálculo de π com 100 trilhões de dígitos ("Even more pi in the sky: Calculating 100 trillion digits of pi on Google Cloud". Google Cloud Platform, 2022, <https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-100-trillion-digits-of-pi-on-google-cloud>

G3. Outros geradores

(1) Geradores com períodos 2^{60} , 2^{113} e $2^{19937} - 1 \cong 10^{6002}$ (Mersenne-Twister, *default* em R).

(2) Gerador natural (Y. Dodge, 1996, *International Statistical Review* 64, 329–344): algarismos decimais de π .

Sugestão: Gravar bilhões de dígitos da parte fracionária de π e usar como gerador.

Obs. 1. Cálculo de π com $12,1 \times 10^{12}$ dígitos decimais em dez/2013 (<http://mathworld.wolfram.com/PiDigits.html>).

Obs. 2. Cálculo de π com 100 trilhões de dígitos ("Even more pi in the sky: Calculating 100 trillion digits of pi on Google Cloud". Google Cloud Platform, 2022, <https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-100-trillion-digits-of-pi-on-google-cloud>).

Obs. 3. Há indicações de que "the decimal expansion of π is not statistically random" (R. E. Ganz, 2014, *Experimental Mathematics* 23, 99–104).

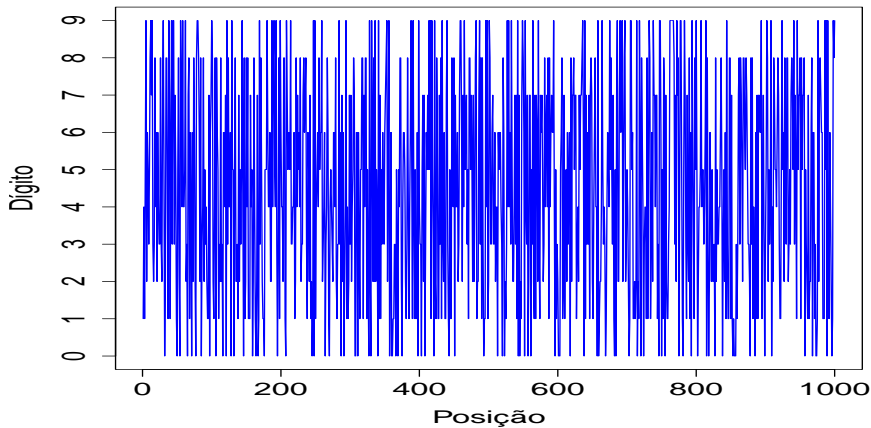


Figura 1: Sequência dos primeiros 1000 dígitos de π .

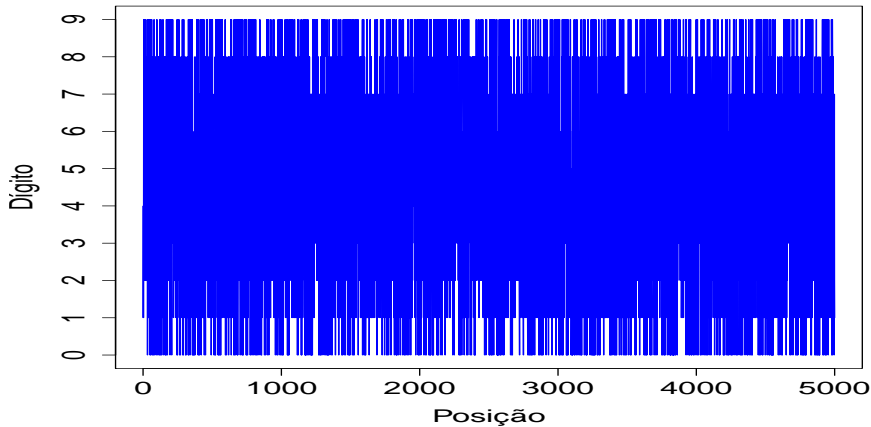


Figura 2: Sequência dos primeiros 5000 dígitos de π .

Frequências relativas dos primeiros 5000 dígitos de π :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,093	0,106	0,099	0,092	0,102	0,105	0,103	0,098	0,098	0,104

Frequências relativas dos primeiros 5000 dígitos de π :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,093	0,106	0,099	0,092	0,102	0,105	0,103	0,098	0,098	0,104

A distribuição é **uniforme**?

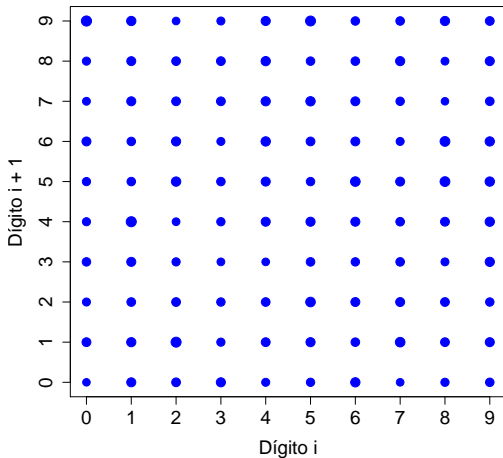


Figura 3: Distribuição dos primeiros 4999 pares (dígito i , dígito $i + 1$) de π .