Computabilidade

Uma introdução à indecilibidade – a forma máxima de complexidade!

Como qualquer outra ferramenta, computadores tem capacidades e limitações que devem ser entendidas para seu bom uso.

Um problema indecidível: Azulejamento (Tiling)

- Entradas: um conjunto finito T de descrições de azulejos.
- Problema (Versão 1): é possível azulejar qualquer área finita, de qualquer tamanho usando somente os azulejos descritos em T, respeitando-se a restrição de casamento de padrão dos lados? É assumido que um conjunto ilimitado de azulejos de cada tipo está disponível. Azulejos não podem ser rotacionados.

Figura 1

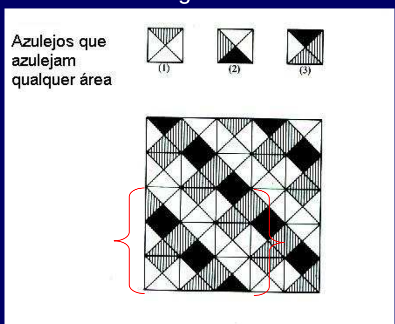


Figura 2

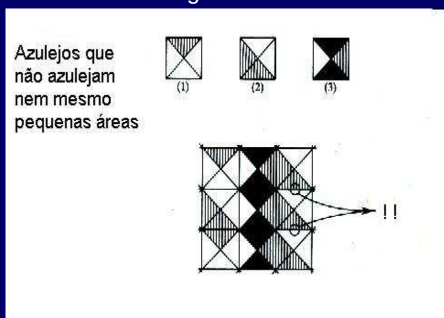
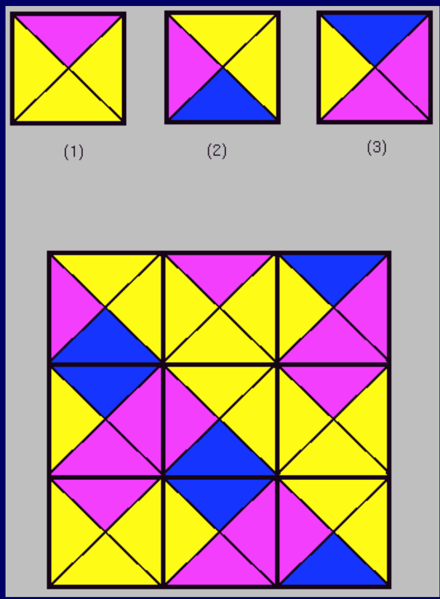


Figura 1 colorida



3

- Um algoritmo para o problema do azulejamento deveria responder "Sim" para as entradas como da Figura 1 e "Não" para aquelas como a Figura 2.

- Não existe e nunca existirá nenhum algoritmo para o problema do azulejamento! Problema indecidível.

- Problema Equivalente (Versão 2): suponha que temos agora como entrada um azulejo na forma de um polígono qualquer, sem restrição de casamento de padrão e que temos que azulejar todo o plano. Temos infinitos azulejos disponíveis. Problema indecidível!!!

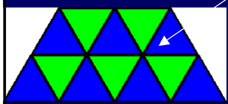
- Qual seria a razão?

4

Simplificando...fixando a forma (poligonos regulares – lados e ângulos tem a mesma medida), todos do mesmo tipo e cada vértice deve ser igual (Versão 3)

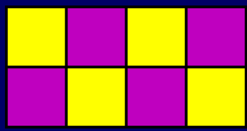
Vértice

Sim!!!



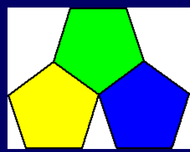
O que acontece em cada vértice?
60 + 60 + 60 + 60 + 60 + 60 = 360o

Sim!!!



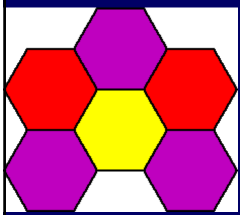
90 + 90 + 90 + 90 = 360o

Não!!!



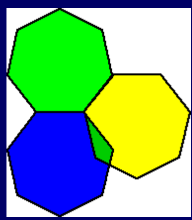
108 + 108 + 108 = 324º

Sim!!!



120 + 120 + 120 = 360º

Não!!!



Polígonos com mais de 6 lados se sobrepõem.

Para certas instâncias...

- O problema do azulejamento é decidível para certas instâncias. O que foi provado ser indecidível é o problema que pergunta se o azulejamento é possível para todos os polígonos.
- A razão é que existem conjuntos de azulejos que azulejam o plano porém não o fazem periodicamente (repetidamente)!

- **Caso contrário este problema seria resolvido por um algoritmo que**
  - checaria todas as áreas finitas exaustivamente, procurando por
    - uma área finita que não pode ser azulejada ou
    - uma que admita um azulejamento em todas as direções.

Tentativa de Algoritmo para o Problema do azulejamento – usa backtracking

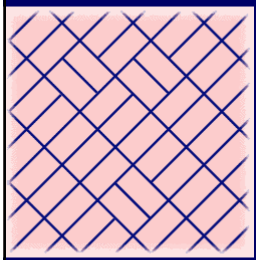
- Inputs:
  - A set of tile types.
  - In the tiling operations we can use any number of tiles from these tile types.
  - When these tiles are placed together the patterns or colors on adjacent edges must match.
- Output:
  - Output "yes" if it is possible to tile any area using tiles from the given tile types.
  - Output "no" if it is not possible to tile every possible area.
- Técnica: Backtracking is an algorithmic technique that places items in order. If it is not possible to place an item, then try to place the next item. If none of the items can be placed, then back up and reconsider the most recent decision and make the next selection for it.

- Potential algorithm for the Tiling Problem:
  - Place tile #1.
  - Build next larger square using backtracking. If we find that we need to backtrack to the very first tile and we find that none of the tile can be placed, then the input set of tiles cannot tile any space and we answer NO.
  - Check each square to see if the edges all repeat.
    - If the square does repeat then the input set of tiles can tile any space and we answer YES.
    - If the square does not repeat, then go to step 2 and repeat.

Trying the Tiling Algorithm.

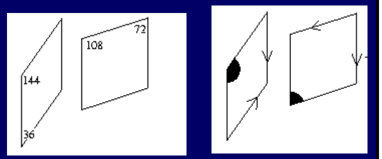
- **This algorithm works for the two cases in Figs 1 and 2. But it does not work for all cases.**
  - For example, there exists a set of 92 tile types that can tile any sized space, but that never form a repeating area.
  - Another example of a set of tiles that can cover any area without ever repeating is the Penrose tiles.

Alguns polígonos possuem azulejamento periódico e não periódico



Mas alguns só azulejam não periodicamente

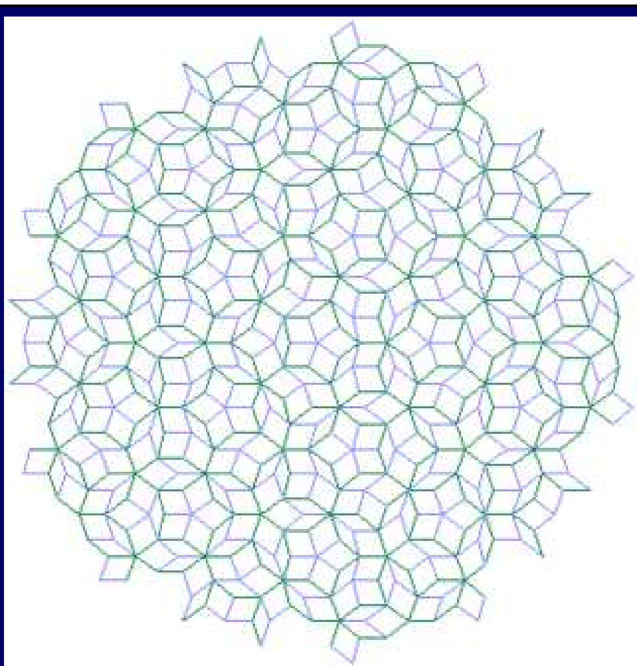
O padrão colorido ao lado contém somente dois polígonos: kites e darts. Eles foram descobertos em 1974 pelo matemático Penrose.



Em 1984, ele demonstrou que, quando colocados juntos de acordo com as regras: ***Two adjacent vertices must be of the same colour. Two adjacent edges must have arrows pointing in the same direction or no arrows at all***, eles cobrem um plano infinito em um número infinito incontável de arranjos.

O azulejamento apresenta simetrias locais, mas nenhum padrão específico é repetido, isto é, o sistema é aperiódico. Como um contraste, o padrão retangular que contorna os azulejos Penrose se expandem também infinitamente, mas se repetem formando um azulejamento periódico: cada padrão sempre se repete.

11



Bob - Penrose Tiling Generator and Explorer
http://www.stephencollins.net/Web/Penrose/Default.aspx

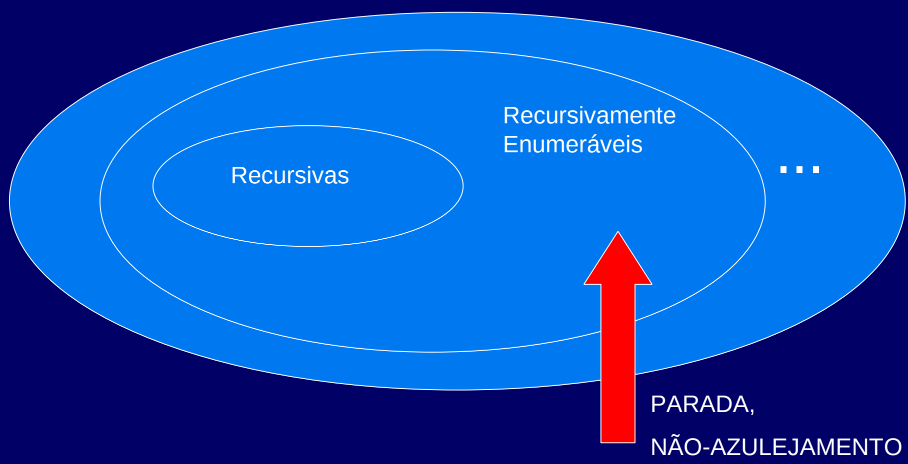
12

Problemas parcialmente decidíveis: certificados finitos

- **O certificado será a área que não pode ser azulejada.**
  - Para checar a área E (finita) que não pode ser azulejada, desde que o conjunto de azulejos também é finito, existe finitos modos (embora MUITOS!) de se testar todos em tempo finito.
- **Na verdade é o problema do Não-Azulejamento que permite certificado de resposta SIM.O do Azulejamento possui certificado de resposta Não.**
- **Problemas com certificados para SIM e para NÃO são decidíveis!!!**

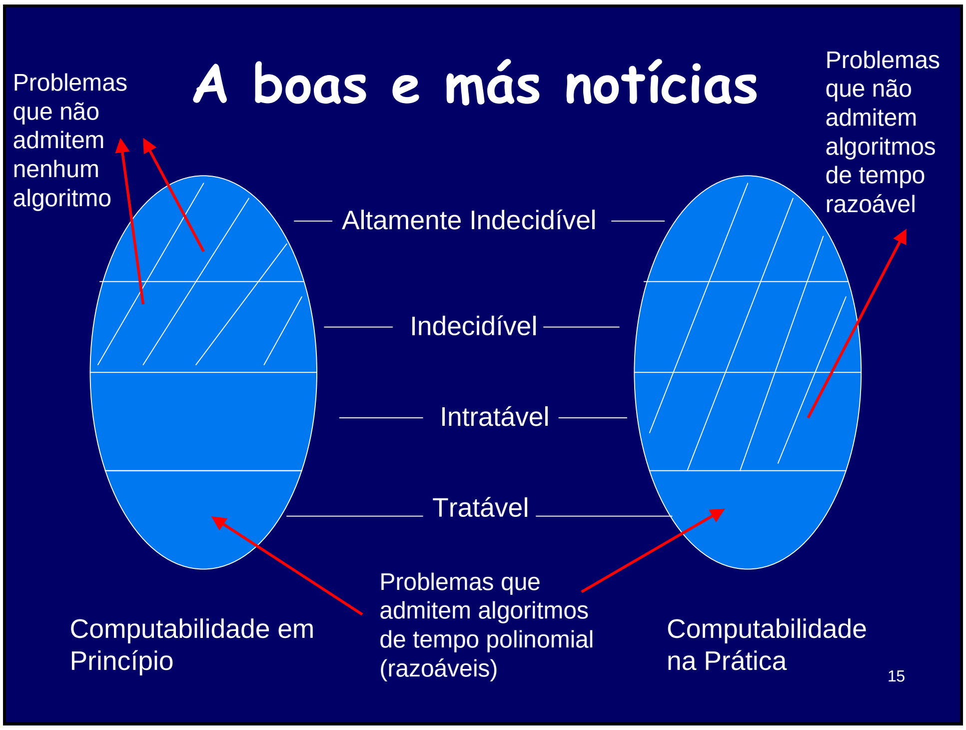
13

Parcialmente decidíveis = Recursivamente enumeráveis



- **Problemas parcialmente decidíveis páram e dizem SIM se SIM é a resposta, mas podem não terminar se a resposta é NÃO.**

14


A boas e más notícias
Problemas que não admitem nenhum algoritmo
Problemas que não admitem algoritmos de tempo razoável
Altamente Indecidível
Indecidível
Intratável
Tratável
Problemas que admitem algoritmos de tempo polinomial (razoáveis)
Computabilidade em Princípio
Computabilidade na Prática
15