

- Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} f(\cdot; \theta)$, em que $f(x; \theta) = \frac{1}{2}(1 + \theta x) I_{(-1,1)}(x)$, $-1 < \theta < 1$. Apresente estimadores consistentes¹ para θ e θ^2 .
- Sejam $X_{ij} \stackrel{\text{indep.}}{\sim} \text{normal}(\mu_i, \sigma^2)$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, k$.
 - Mostre que os EMV's de μ_i e σ^2 são $\hat{\mu}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}$, $i = 1, \dots, k$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \hat{\mu}_i)^2$.
 - Suponha n fixo. Prove que $\hat{\sigma}^2 \rightarrow \frac{n-1}{n} \sigma^2$, em probabilidade quando $k \rightarrow \infty$; logo, não é consistente (observe que o número de parâmetros $\rightarrow \infty$). Obtenha um estimador consistente de σ^2 .
- Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{uniforme}((0, \theta])$. Prove que $X_{(n)} = \max_{i=1, \dots, n} X_i$ é um estimador consistente para θ . É não viesado?
- Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{exponencial}(\lambda)$ e $X_{(1)} = \min_{i=1, \dots, n} X_i$. Prove que $n X_{(1)}$ é um estimador não viesado de $E_\lambda(X_1) = 1/\lambda$. É consistente?
- Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma população com função distribuição acumulada $F(\cdot)$. A função distribuição empírica é definida como

$$\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, t]}(X_i), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- A partir das observações $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$, esboce graficamente $\hat{F}_n(\cdot)$.
 - Prove que $\hat{F}_n(t)$ é um ENV e consistente para $F(t)$.
- Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma população com média μ e variância σ^2 , $0 < \sigma^2 < \infty$. Qual(is) dos seguintes estimadores é(são) consistente(s) para μ ?

$$(a) \hat{\mu}_1 = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i X_i, \quad (b) \hat{\mu}_2 = \frac{1}{[n/2]} (X_1 + \dots + X_{[n/2]}) \quad \text{e} \quad (c) \hat{\mu}_3 = X_n,$$

em que $[w]$ denota o maior inteiro menor do que ou igual a w .

- Nas mesmas condições do exercício 6, qual(is) dos seguintes estimadores é(são) consistente(s) para σ^2 ?

$$(a) \hat{\sigma}_1^2 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2}, \quad (b) \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 \quad \text{e} \quad (c) \hat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_2)^2,$$

em que μ_0 é conhecido no item b e $\hat{\mu}_2$ está definido no item 6b.

- Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{uniforme}(0, \theta)$, $\theta > 0$.
 - Prove que $(\prod_{i=1}^n X_i)^{1/n}$ é um estimador consistente para θ/e .
 - Utilizando o resultado do item a, apresente estimadores consistentes para $E_\theta(X_1)$ e $\text{Var}_\theta(X_1)$.

¹“Estimador consistente” refere-se a uma seqüência de estimadores consistente.