Introdução a Sistemas Inteligentes

Tópicos em Redes Neurais II:
Redes Neurais RBF – 1ª Parte

Prof. Ricardo J. G. B. Campello

ICMC / USP

Aula de Hoje

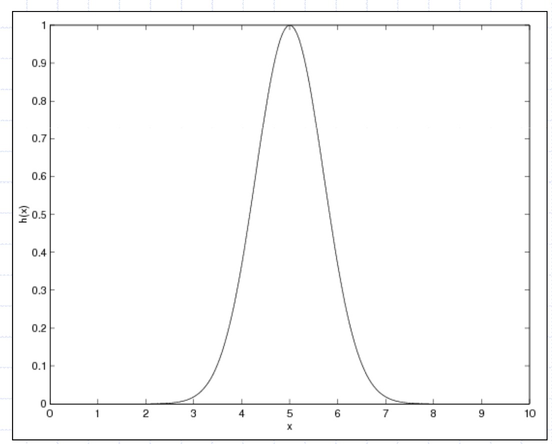
- Neurônios de Resposta Radial
- Modelos Neurais RBF
  - Única Saída
  - Múltiplas Saídas
  - Representação Matricial
  - Exemplo em Classificação Não Linear

Redes RBF

- Redes RBF (*Radial Basis Functions*) são uma classe de redes com arquitetura *feedforward*
  - Assim como as MLPs, os valores das entradas se propagam na rede em um único sentido
- Essas redes diferem das MLPs especialmente no modelo de neurônio que utilizam
  - Neurônios com *resposta radial* a excitações
  - Modelam o conceito biológico de *campo receptivo*

Redes RBF

- Resposta Radial Típica:

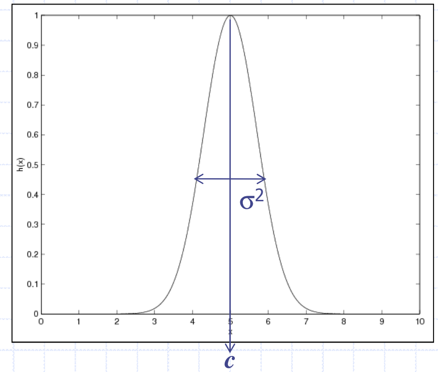


Redes RBF

- Resposta Radial
  - Presentes em alguns tipos de células nervosas:
    - Células auditivas: possuem maior sensibilidade a freqüências *próximas* a um determinado tom
    - Células da retina: maior sensibilidade a excitações luminosas *próximas* ao centro do seu campo receptivo
  - Modelo matemático:
    - **Função de Base Radial**

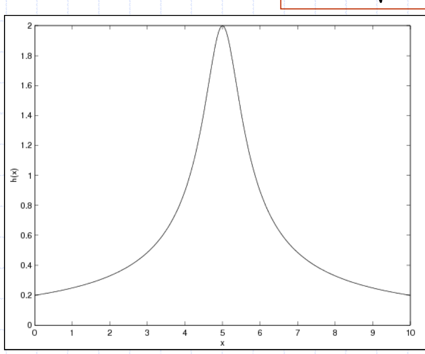
Função de Base Radial

- Diferentes Modelos Matemáticos Possíveis
  - Gaussiana: $h(x) = \exp\left(-\dfrac{(x-c)^2}{\sigma^2}\right)$



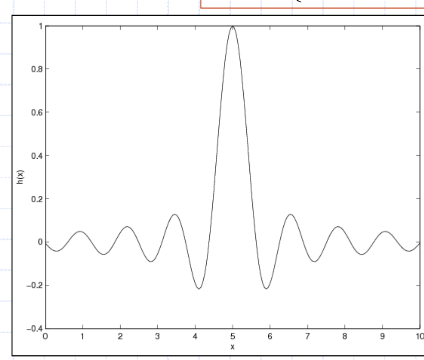
Função de Base Radial

- Diferentes Modelos Matemáticos Possíveis
  - Multi-Quadrática Inversa: $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-c)^2 + \sigma^2}}$



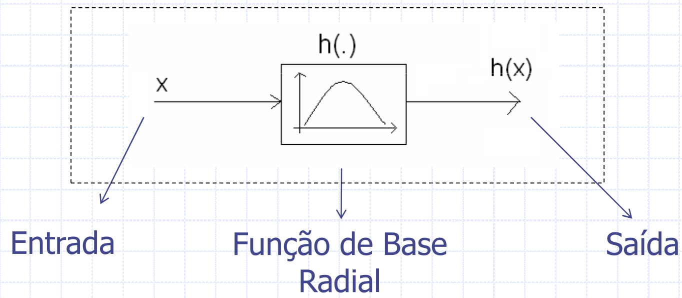
Função de Base Radial

- Diferentes Modelos Matemáticos Possíveis
  - Chapéu Mexicano: $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((x-c)/\sigma\right)}{\left((x-c)/\sigma\right)} & \text{se } \; x \neq c \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$

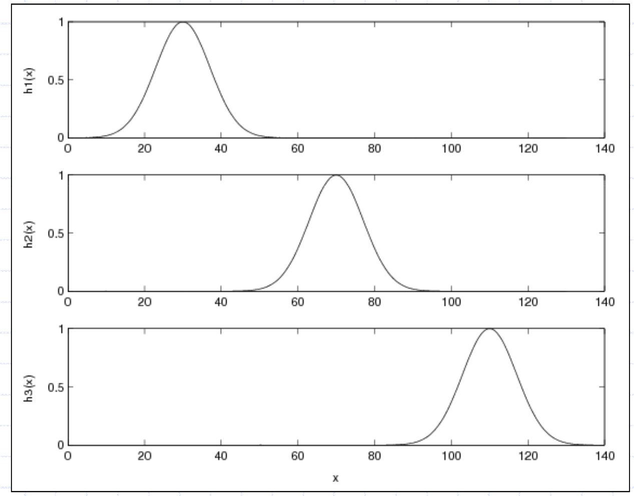


Modelo do Neurônio RBF

- Modelo Básico do Neurônio:

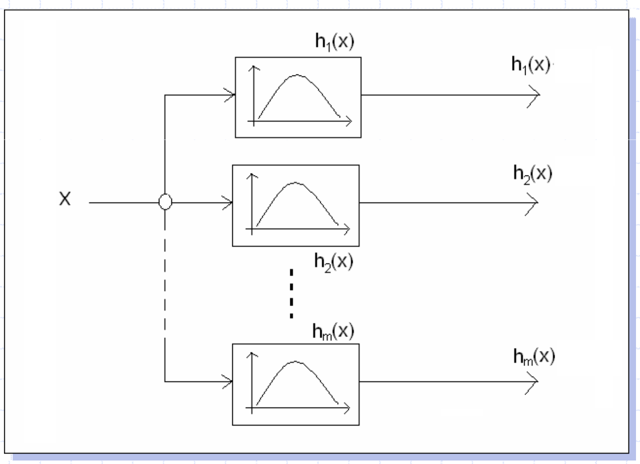


Campos Receptivos Distintos

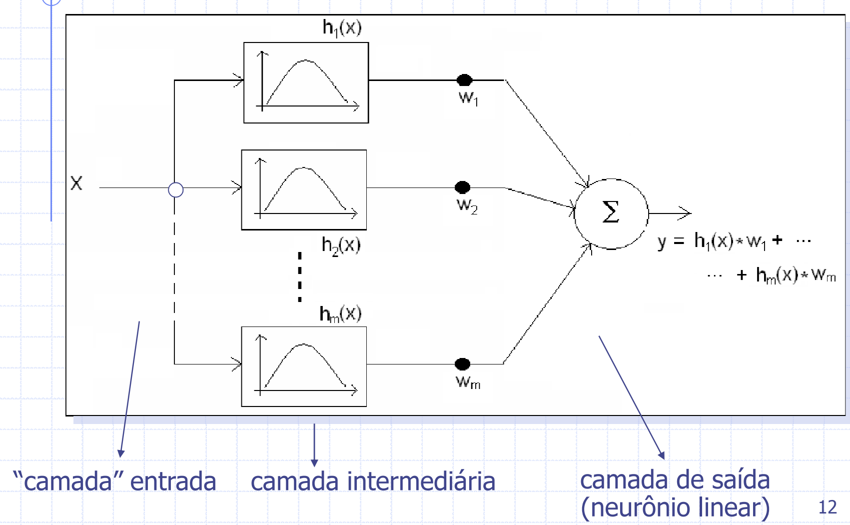


Múltiplos Neurônios

- Neurônios com campos receptivos distintos:

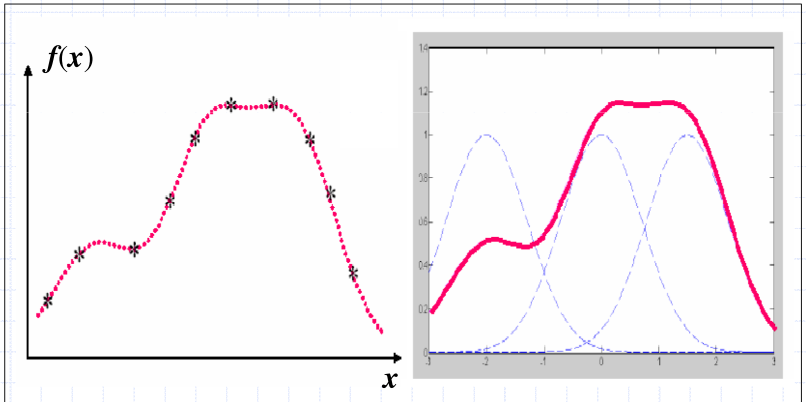


Modelo RBF (1 entrada)



Regressão Não Linear

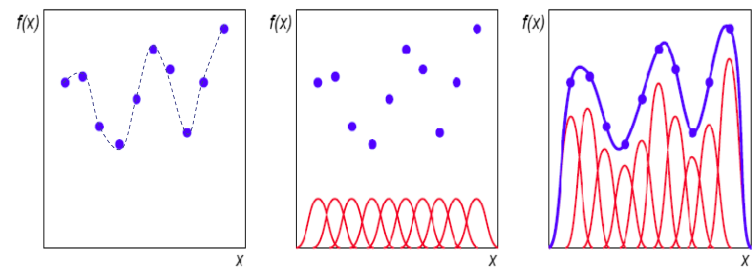
- RBFs são **Aproximadores Universais** !



http://people.sabanciuniv.edu/berrin/cs512/lectures/8-nn6-rbf.ppt (09/2008)

Regressão Não Linear

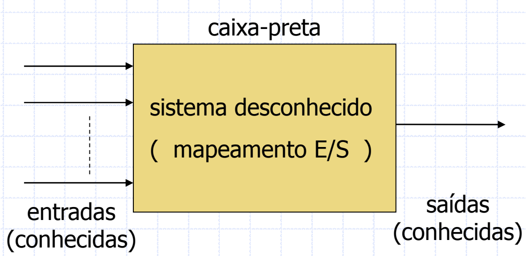
- Tais como MLPs, RBFs são **Aproximadores Universais**:
  - Basta aumentar o número de neurônios (funções de base radial) para obter a capacidade de aproximação desejada.
  - Tomando cuidado com super-treinamento (*overfitting*) !



http://people.sabanciuniv.edu/berrin/cs512/lectures/8-nn6-rbf.ppt (09/2008)

Regressão Não Linear

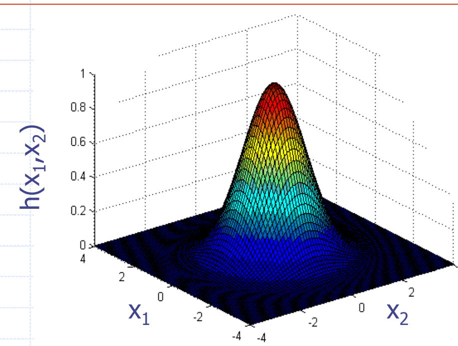
- RBFs são **Aproximadores Universais**:
  - Diversos problemas podem ser representados como problemas de aproximação de funções
    - Previsão, Tomada de decisão, Classificação*, etc
    - Por exemplo, operador humano de um processo complexo...



Modelo RBF (2 entradas)

- Função Radial para 2 Entradas (Gaussiana):

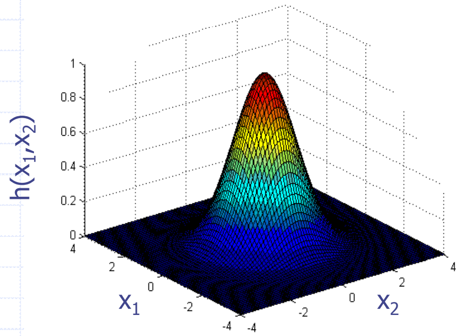
$$h(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{(x_1 - c_1)^2}{\sigma_1^{\,2}}\right) \times \exp\left(-\frac{(x_2 - c_2)^2}{\sigma_2^{\,2}}\right)$$



Modelo RBF (2 entradas)

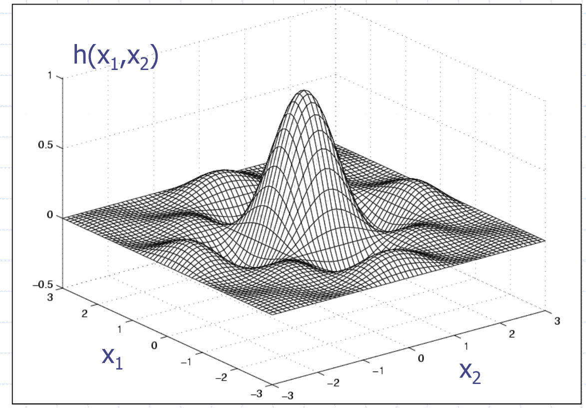
- Função Radial para 2 Entradas (Gaussiana):

$$h(x_1,x_2)=\exp\left(-(\mathbf{x}-\mathbf{c})^{\mathrm{T}}\cdot\begin{bmatrix}1/\sigma_1^2 & 0\\ 0 & 1/\sigma_2^2\end{bmatrix}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{c})\right)\qquad \begin{cases}\mathbf{x}=[x_1 \quad x_2]^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{c}=[c_1 \quad c_2]^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

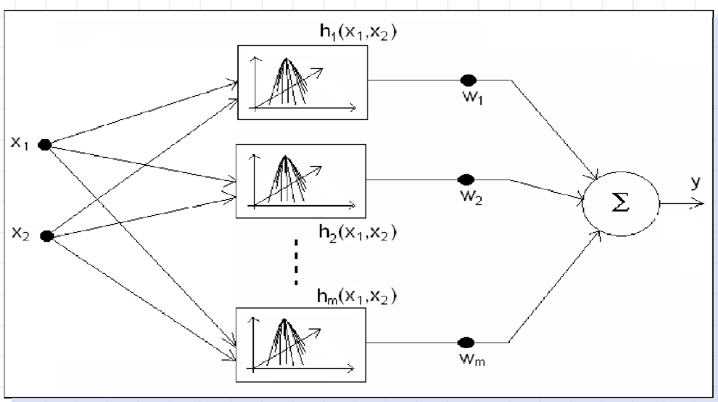


Modelo RBF (2 entradas)

- Função Radial para 2 Entradas (Chapéu Mexicano):

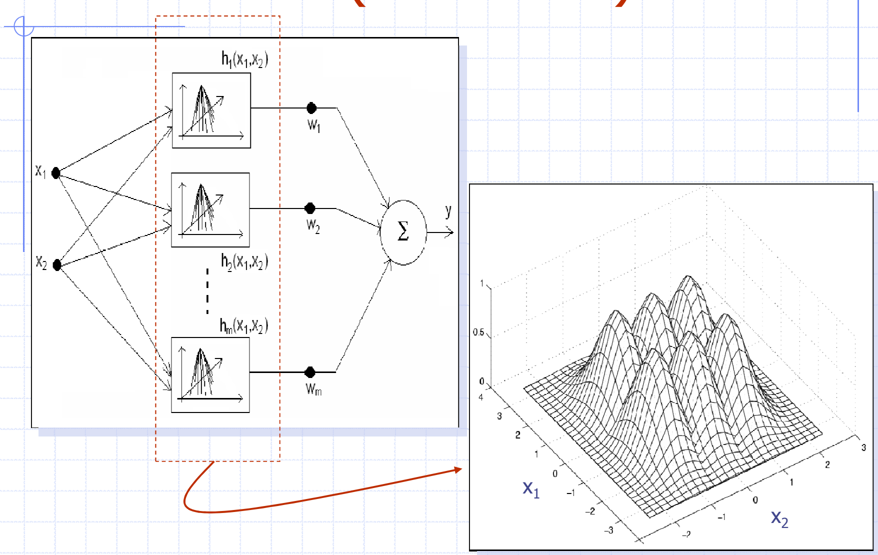


Modelo RBF (2 entradas)



$$y=\sum_{i=1}^{m} w_i\cdot h_i(x_1,x_2)$$

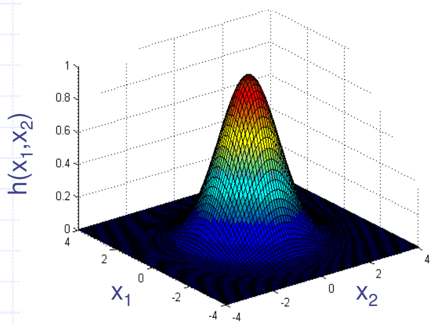
Modelo RBF (2 entradas)



Modelo RBF (n entradas)

- Função Radial para n Entradas (Gaussiana):

$$h(x_1,\ldots,x_n)=\exp\left(-\frac{(x_1-c_1)^2}{\sigma_1^{\,2}}\right)\times\cdots\times\exp\left(-\frac{(x_n-c_n)^2}{\sigma_n^{\,2}}\right)$$



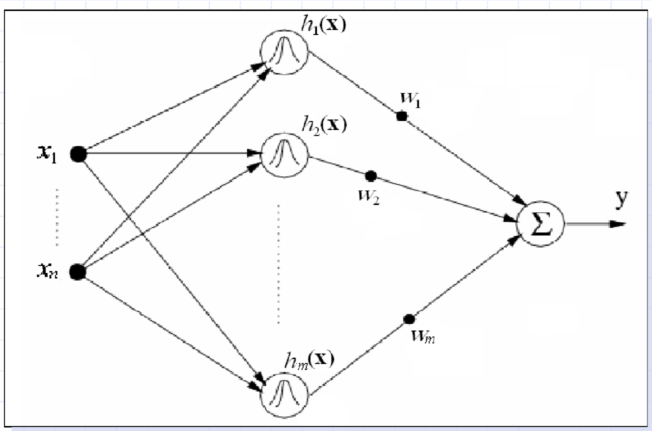
Modelo RBF (n entradas)

- Função Radial para n Entradas (Gaussiana):

$$\boxed{h(x_1,\cdots,x_n)=\exp\left(-(\mathbf{x}-\mathbf{c})^{\mathrm{T}}\cdot\Phi^{-1}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{c})\right)}$$

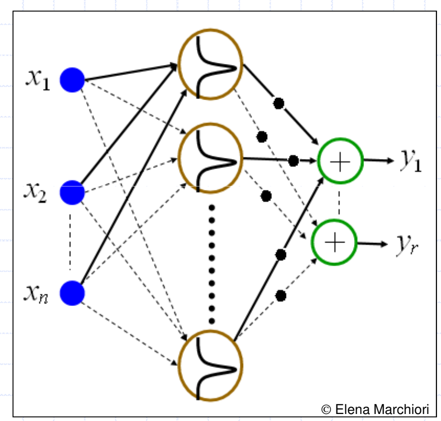
$$\begin{cases}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1 & \cdots & c_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \Phi=\operatorname{diag}\left(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_n^2\right)\end{cases}$$

Modelo RBF (n entradas)



$$\boxed{y=\sum_{i=1}^{m}w_i\cdot h_i(x_1,\cdots,x_n)\quad=\quad\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{h}}$$

Modelo RBF (n entradas / r saídas)



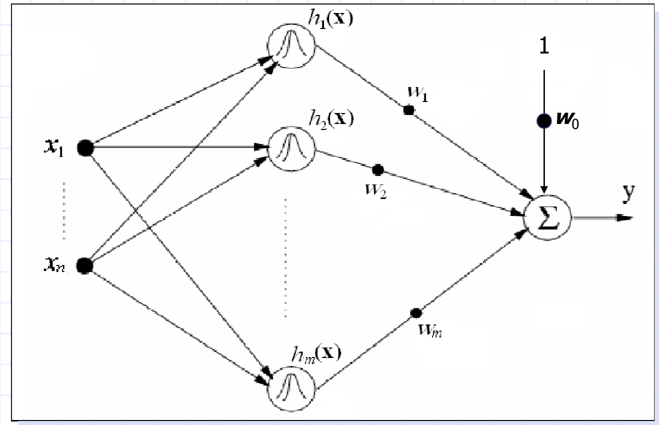
$$\boxed{y_j=\sum_{i=1}^{m}w_{ji}\cdot h_i(x_1,\cdots,x_n)}$$ ou $$\boxed{\mathbf{y}=\mathbf{W}\cdot\mathbf{h}}$$

RBF vs. MLP

- Algumas diferenças e semelhanças entre RBFs e MLPs:

MLP	RBF
Aproximadores Universais	Aproximadores Universais
1 ou mais camadas intermediárias	Em geral 1 camada intermediária
Em geral demandam menos neurônios / parâmetros para uma mesma precisão	Em geral demandam mais neurônios / parâmetros para uma mesma precisão
Treinamento mais complexo	Treinamento mais simples
Difícil interpretação, senão impossível	Possível interpretação (se vista como sistema fuzzy)

Nota (Adição de Termo Constante)

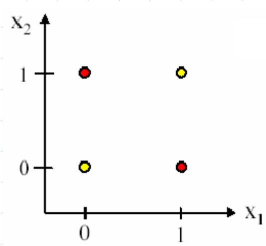


$$y = w_0 + \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot h_i(x_1, \cdots, x_n)$$

Exercício (classificação)

- Sabemos que o problema XOR consiste em classificar 4 padrões (descritos por 2 variáveis) em 2 classes diferentes, ou seja:

x_1	x_2	Classe
0	0	1
0	1	2
1	0	2
1	1	1

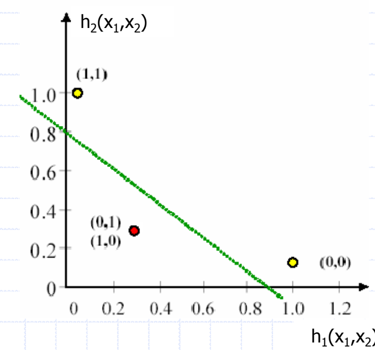


Note que esse problema não é linearmente separável, ou seja, não existe uma função linear que separe as classes no espaço $x_1 \times x_2$

Exercício (cont.)

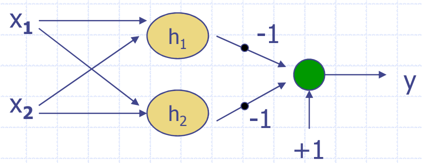
- No entanto, os padrões podem passar a ser linearmente separáveis após serem processados por funções de base radial, desde que essas sejam escolhidas de forma apropriada. P. ex., escolhendo 2 funções Gaussianas h_1 e h_2 com centros dados por [0,0] e [1,1], respectivamente, e desvios padrão unitários para ambas, tem-se:

x_1	x_2	$h_1(x_1,x_2)$	$h_2(x_1,x_2)$
0	0	1	0,1353
0	1	0,3679	0,3679
1	0	0,3679	0,3679
1	1	0,1353	1



Exercício (cont.)

- Considere então a rede RBF com essas funções de base radial e pesos $w_1 = w_2 = -1$ e $w_0 = 1$ (aditivo na saída):



- Escreva analiticamente a expressão da saída da rede em função das entradas x_1 e x_2 e mostre que essa rede é capaz de classificar corretamente os padrões XOR assumindo que esses padrões pertencem à classe 1 se $y<0$ e à classe 2 se $y>0$

Referências

- Haykin, S., *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, Prentice Hall, 2nd Edition, 1999
- Braga, A. P., Carvalho, A. C. P. L. F., Ludemir, T. B., *Redes Neurais Artificiais: Teoria e Aplicações*, LTC, 2a Edição, 2007
- Kovács, *Redes Neurais Artificiais: Fundamentos e Aplicações*, Collegium Cognitio, 2ª Edição, 1996