ICMC – USP

EST5510 – Tópicos de Teoria Assintótica – $2^{\underline{\text{o}}}$/2018

$8^{\underline{\text{a}}}$ lista de exercícios

1. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias $\overset{\text{iid}}{\sim}$ $\mathsf{Weibull}(\theta, 1)$, $\theta > 0$, com função densidade de probabilidade $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}\exp(-x^{\theta})I_{(0,\infty)}(x)$.
(a) Discuta a estimação de θ pelo método de máxima verossimilhança.
(b) Apresente, justificando, a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança de θ.

2. $(X_1, Y_1)^\top, \ldots, (X_n, Y_n)^\top$ é uma amostra aleatória de uma população $\mathsf{normal}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ com $\boldsymbol{\mu} = \big(\mathrm{E}(X_1), \mathrm{E}(Y_1)\big)^\top = (0, 0)^\top$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$. Um estimador para ρ é dado por $u_n = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i / n$, para $n \geq 1$.
(a) Verifique a consistência (forte e fraca) da sequência $(u_n)_{n\geq 1}$.
(b) Compare u_n com o estimador obtido no exercício 1(b) da $7^{\underline{\text{a}}}$ lista de exercícios.

3. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias $\overset{\text{iid}}{\sim}$ $\mathsf{normal}(\theta, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$.
(a) Prove que a informação de Fisher de θ é dada por $\mathcal{I}(\theta) = 1$.
(b) A fim de estimar θ, propõe-se o estimador

$$\widetilde{\theta}_n = \begin{cases} \overline{X}_n, & \text{se } |\overline{X}_n| \geq n^{-1/4}, \\ a\overline{X}_n, & \text{se } |\overline{X}_n| < n^{-1/4}, \end{cases}$$

em que $\overline{X}_n$ denota a média amostral e $a \in \mathbb{R}$.
Prove que a distribuição limite de $n^{1/2}(\widetilde{\theta}_n - \theta)$, quando $n \to \infty$, é $\mathsf{normal}(0, 1)$, se $\theta \neq 0$, e é $\mathsf{normal}(0, a^2)$, se $\theta = 0$.
(c) Compare o estimador $\widetilde{\theta}_n$ com o estimador de máxima verossilhança de θ em termos de eficiência relativa assintótica.

4. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias $\overset{\text{iid}}{\sim}$ $\mathsf{normal}(\theta, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$. A fim de estimar θ, propõe-se o estimador

$$\widetilde{\theta}_n = \begin{cases} \overline{X}_n, & \text{com probabilidade } 1 - 1/n, \\ n^2, & \text{com probabilidade } 1/n, \end{cases}$$

em que $\overline{X}_n$ denota a média amostral e a aleatorização, independente de X_n, é efetuada utilizando uma moeda com probabilidades $1 - 1/n$ e $1/n$.
(a) Calcule $\mathrm{E}(\widetilde{\theta}_n - \theta)$ e determine seu limite quando $n \to \infty$.
(b) Calcule $\mathrm{Var}(\widetilde{\theta}_n)$ e determine seu limite quando $n \to \infty$.
(c) Determine a distribuição limite de $n^{1/2}(\widetilde{\theta}_n - \theta)$ quando $n \to \infty$. A sequência $(\widetilde{\theta}_n)_{n\geq 1}$ é assintoticamente eficiente?

5. Suponha que $(V_n)_{n\geq 1}$ e $(V_n^*)_{n\geq 1}$ são duas sequências de estatísticas de teste tais que $V_n - V_n^* \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ quando $n \to \infty$. Se V_n tem uma distribuição limite contínua F_0 sob H_0, prove que a distribuição limite de (V_n^*) sob sob H_0 também é F_0.

6. Considere duas amostras independentes tais que $X_1, \ldots, X_m \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Poisson}(\lambda)$ e $Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Poisson}(\mu)$. O objetivo é testar $\mathrm{H}_0 : \lambda = \mu$ contra $\mathrm{H}_1 : \lambda \neq \mu$. Definindo $N = m + n$, suponha que $m/N \to \tau$ e $n/N \to 1 - \tau$ quando $n \to \infty$ e $m \to \infty$, em que $\tau \in (0, 1)$. Apresente estatísticas de teste para testar as hipóteses acima.