Análise de algoritmos

SCC-214 Projeto de Algoritmos

Thiago A. S. Pardo

Análise de algoritmos

- Existem basicamente 2 formas de estimar o tempo de execução de programas e decidir quais são os melhores
  - Empírica ou teoricamente
- É desejável e possível estimar qual o melhor algoritmo sem ter que executá-los
  - Função da análise de algoritmos

2

Calculando o tempo de execução

- Supondo que as operações simples demoram uma unidade de tempo para executar, considere o programa abaixo para calcular o resultado de $\sum_{i=1}^{n} i^3$

<u>Início</u>
declare soma_parcial numérico;
soma_parcial ← 0;
para i←1 até n faça
    soma_parcial←soma_parcial+i*i*i;
escreva(soma_parcial);
<u>Fim</u>

3

Calculando o tempo de execução

- Supondo que as operações simples demoram uma unidade de tempo para executar, considere o programa abaixo para calcular o resultado de $\sum_{i=1}^{n} i^3$

<u>Início</u>
declare soma_parcial numérico;
soma_parcial ← 0; → 1 unidade de tempo
para i←1 até n faça → 1 unidade para inicialização de i, n+1 unidades para testar se i≤n e n unidades para incrementar i = 2n+2
    soma_parcial←soma_parcial+i*i*i; → 4 unidades (1 da soma, 2 das multiplicações e 1 da atribuição) executada n vezes (pelo comando "para") = 4n unidades
escreva(soma_parcial); → 1 unidade para escrita
<u>Fim</u>

4

Calculando o tempo de execução

- Supondo que as operações simples demoram uma unidade de tempo para executar, considere o programa abaixo para calcular o resultado de $\sum_{i=1}^{n} i^3$

Início
declare soma_parcial numérico;
soma_parcial ← 0;
para i←1 até n faça
arcial+i*i*i;

1 unidade de tempo

1 unidade para inicialização de i, n+1 unidades para testar se i≤n e n unidades para incrementar i = 2n+2

4 unidades (1 da soma, 2 das multiplicações e 1 da atribuição) executada n vezes (pelo comando "para") = 4n unidades

Custo total: somando tudo, tem-se 6n+4 unidades de tempo, ou seja, a função é **O(n)**

1 unidade para escrita

5

Calculando o tempo de execução

- Ter que realizar todos esses passos para cada algoritmo (principalmente algoritmos grandes) pode se tornar uma tarefa cansativa

- Em geral, como se dá a resposta em termos do *big-oh*, costuma-se desconsiderar as constantes e elementos menores dos cálculos
  - No exemplo anterior
    - A linha soma_parcial←0 é insignificante em termos de tempo
    - É desnecessário ficar contando 2, 3 ou 4 unidades de tempo na linha soma_parcial←soma_parcial+i*i*i
    - O que realmente dá a grandeza de tempo desejada é a repetição na linha **para i←1 até n faça**

6

Regras para o cálculo

- Repetições
  - O tempo de execução de uma repetição é pelo menos o tempo dos comandos dentro da repetição (incluindo testes) vezes o número de vezes que é executada

7

Regras para o cálculo

- Repetições aninhadas
  - A análise é feita de dentro para fora
  - O tempo total de comandos dentro de um grupo de repetições aninhadas é o tempo de execução dos comandos multiplicado pelo produto do tamanho de todas as repetições
  - O exemplo abaixo é $O(n^2)$

```
para i←0 até n faça
   para j←0 até n faça
           faça k←k+1;
```

8

Regras para o cálculo

- Comandos consecutivos
  - É a soma dos tempos de cada um, o que pode significar o máximo entre eles
  - O exemplo abaixo é $O(n^2)$, apesar da primeira repetição ser $O(n)$

```
para i←0 até n faça
   k←0;
para i←0 até n faça
   para j←0 até n faça
            faça k←k+1;
```

9

Regras para o cálculo

- Se... então... senão
  - Para uma cláusula condicional, o tempo de execução nunca é maior do que o tempo do teste mais o tempo do maior entre os comandos relativos ao <u>então</u> e os comandos relativos ao <u>senão</u>
  - O exemplo abaixo é $O(n)$

```
se i<j
   então i←i+1
   senão para k←1 até n faça
                  i←i*k;
```

10

Regras para o cálculo

- Chamadas a sub-rotinas
  - Uma sub-rotina deve ser analisada primeiro e depois ter suas unidades de tempo incorporadas ao programa/sub-rotina que a chamou

11

Exercício

- Estime quantas unidades de tempo são necessárias para rodar o algoritmo abaixo

```
Início
declare i e j numéricos;
declare A vetor numérico de n posições;
i←1;
enquanto i≤n faça
   A[i]←0;
   i←i+1;
para i←1 até n faça
   para j←1 até n faça
     A[i]←A[i]+i+j;
Fim
```

12

Exercício

- Estime quantas unidades de tempo são necessárias para rodar o algoritmo abaixo

```
Início
declare i, j e x numéricos;
declare m uma matriz de N linhas por N colunas;
para i←1 até N faça
    j←1;
    enquanto j<N faça
              x←m[i,j];
              imprima(x);
              j←j+2;
imprima(i);
Fim
```

13

Exercício em duplas

- Analise a sub-rotina recursiva abaixo

```
sub-rotina fatorial(n: numérico)
início
   declare aux numérico;
   se n≤1
     então aux←1
     senão aux←n*fatorial(n-1);
   retorne aux;
fim
```

14

Regras para o cálculo

- Sub-rotinas recursivas
  - Se a recursão é um "disfarce" da repetição (e, portanto, a recursão está mal empregada, em geral), basta analisá-la como tal
  - O exemplo anterior é obviamente O(n)

```
sub-rotina fatorial(n: numérico)
início
declare aux numérico;
se n≤1
        então aux←1
        senão aux←n*fatorial(n-1);
retorne aux;
fim
```

Eliminando a recursão →

```
sub-rotina fatorial(n: numérico)
início
declare aux numérico;
aux←1;
enquanto n>1 faça
        aux←aux*n;
        n←n-1;
retorne aux;
fim
```

15

Regras para o cálculo

- Sub-rotinas recursivas
  - Em muitos casos (incluindo casos em que a recursividade é bem empregada), é difícil transformá-la em repetição
    - Nesses casos, para fazer a análise do algoritmo, pode ser necessário se recorrer à análise de recorrência
    - *Recorrência: equação ou desigualdade que descreve uma função em termos de seu valor em entradas menores*
      - Caso típico: algoritmos de **dividir-e-conquista**r, ou seja, algoritmos que desmembram o problema em vários subproblemas que são semelhantes ao problema original, mas menores em tamanho, resolvem os subproblemas recursivamente e depois combinam essas soluções com o objetivo de criar uma solução para o problema original
        - Exemplos?

16

Regras para o cálculo

- Exemplo de uso de recorrência
  - Números de Fibonacci
    - 0,1,1,2,3,5,8,13...
    - f(0)=0, f(1)=1, f(i)=f(i-1)+f(i-2)

```
sub-rotina fib(n: numérico)
início
declare aux numérico;
se n≤1
    então aux←1
    senão aux←fib(n-1)+fib(n-2);
retorne aux;
fim
```

17

Regras para o cálculo

- Exemplo de uso de recorrência
  - Números de Fibonacci
    - 0,1,1,2,3,5,8,13...
    - f(0)=0, f(1)=1, f(i)=f(i-1)+f(i-2)

```
sub-rotina fib(n: numérico)
início
declare aux numérico;
se n≤1
    então aux←1
    senão aux←fib(n-1)+fib(n-2);
retorne aux;
fim
```


Seja T(n) o tempo de execução da função.

Caso 1:
Se n=0 ou 1, o tempo de execução é constante, que é o tempo de testar o valor de n no comando se, mais atribuir o valor 1 à variável aux, mais o retorno da função; ou seja, T(0)=T(1)=3.

18

Regras para o cálculo

- Exemplo de uso de recorrência
  - Números de Fibonacci
    - 0,1,1,2,3,5,8,13...
    - f(0)=0, f(1)=1, f(i)=f(i-1)+f(i-2)

```
sub-rotina fib(n: numérico)
início
declare aux numérico;
se n≤1
   então aux←1
   senão aux←fib(n-1)+fib(n-2);
retorne aux;
fim
```

Caso 2:
Se n>2, o tempo consiste em testar o valor de n no comando se, mais o trabalho a ser executado no senão (que é uma soma, uma atribuição e 2 chamadas recursivas), mais o retorno da função; ou seja, a recorrência $T(n)=T(n-1)+T(n-2)+4$, para n>2.

Regras para o cálculo

- Muitas vezes, a recorrência pode ser resolvida com base na prática e experiência do analista
- Alguns métodos para resolver recorrências
  - Método da substituição
  - Método da árvore de recursão
  - Método mestre

20

Resolução de recorrências

- Método da substituição
  - Supõe-se (aleatoriamente ou com base na experiência) um limite superior para a função e verifica-se se ela não extrapola este limite
    - Uso de indução matemática
  - O nome do método vem da “substituição” da resposta adequada pelo palpite
  - Pode-se “apertar” o palpite para achar funções mais exatas

21

Resolução de recorrências

- Método da árvore de recursão
  - Esboça-se uma árvore que, nível a nível, representa as recursões sendo chamadas
  - Em seguida, em cada nível/nó da árvore, são acumulados os tempos necessários para o processamento
    - No final, tem-se a estimativa de tempo do problema
  - Este método pode ser utilizado para se fazer uma suposição mais informada no método da substituição

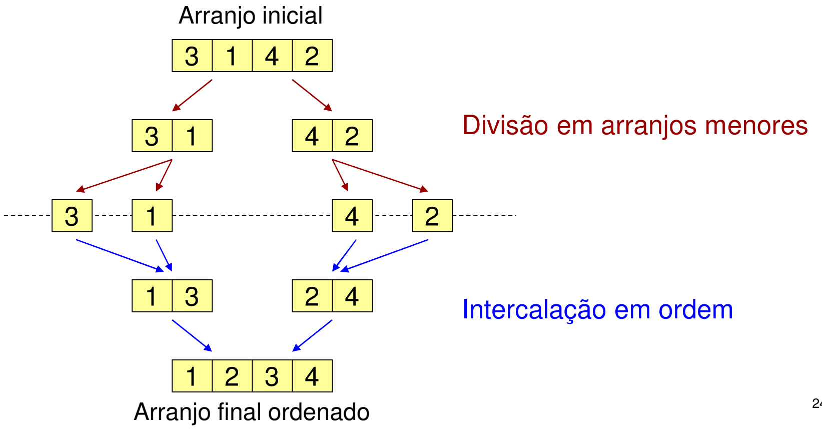
22

Resolução de recorrências

- Método da árvore de recursão
  - Exemplo: algoritmo de ordenação de arranjos por intercalação
    - Passo 1: divide-se um arranjo não ordenado em dois subarranjos
    - Passo 2: se os subarranjos não são unitários, cada subarranjo é submetido ao passo 1 anterior; caso contrário, eles são ordenados por intercalação dos elementos e isso é propagado para os subarranjos anteriores

Ordenação por intercalação

- Exemplo com arranjo de 4 elementos



Ordenação por intercalação

- Implemente a(s) sub-rotina(s) e calcule sua complexidade

25

Ordenação por intercalação

- Rotina principal: mergesort
  - Se n=1 elemento no arranjo, ordenação não é necessária: ?
  - Se n>1
    - O problema é inicialmente dividido em subproblemas: ?
    - Os subproblemas são processados: ?
    - As soluções são combinadas: complexidade da rotina auxiliar de intercalação

26

Ordenação por intercalação

- Rotina principal: mergesort
  - Se n=1 elemento no arranjo, ordenação não é necessária: 1 operação é realizada, tempo constante O(c)
  - Se n>1
    - O problema é inicialmente dividido em subproblemas: 3 operações, tempo constante O(c)
    - Os subproblemas são processados: 2 subproblemas, sendo que cada um tem metade do tamanho original = 2T(n/2)
    - As soluções são combinadas: O(n)

27

Ordenação por intercalação

- Equações de complexidade do algoritmo
  - ???

28

Ordenação por intercalação

- Equações de complexidade do algoritmo

  $T(n)=O(c)=1$, se $n=1$

  $T(n)=2T(n/2) + \underbrace{O(c) + O(n)}_{O(n),\ \text{já que } c<n \text{ em geral}}$, se $n>1$

Ordenação por intercalação

- Equações de complexidade do algoritmo

  $T(n)=1$, se $n=1$

  $T(n)=2T(n/2) + O(n)$, se $n>1$

Ordenação por intercalação

- Equações de complexidade do algoritmo

  $T(n)=1$, se $n=1$

  $T(n)=2T(n/2) + n$, se $n>1$

Ordenação por intercalação

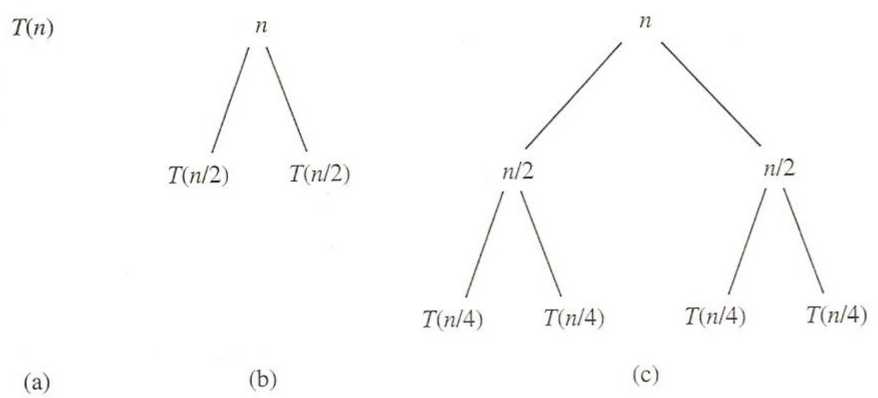
- Equações de complexidade do algoritmo

  $T(n)=1$, se $n=1$

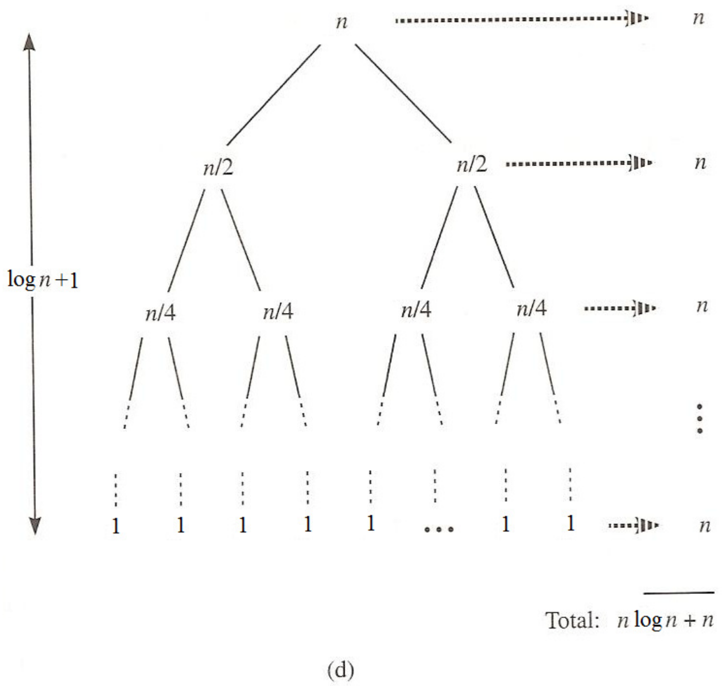
  $T(n)=2T(n/2) + n$, se $n>1$

  EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA, podendo ser resolvida via árvore de recorrência

Resolução de recorrências



33



34

Resolução de recorrências

- Tem-se que:
  - Na parte (a), há T(n) ainda não expandido
  - Na parte (b), T(n) foi dividido em árvores equivalentes representando a recorrência com custos divididos (T(n/2) cada uma), sendo n o custo no nível superior da recursão (fora da recursão e, portanto, associado ao nó raiz)
  - ...
  - No fim, nota-se que a altura da árvore corresponde a (log n)+1, o qual multiplica os valores obtidos em cada nível da árvore, os quais, nesse caso, são iguais
    - Como resultado, tem-se n logn + n, ou seja, O(n log n)

35

Busca binária

- Busca binária em um vetor ordenado
  - Exemplo: pesquisa pelo número 3

Vetor ordenado

1	3	5	6	8	11	15	16	17

É o elemento procurado?

1	3	5	6	8	11	15	16	17

É o elemento procurado?

1	3	5	6	8	11	15	16	17

É o elemento procurado?

36

Busca binária

- Implemente o algoritmo recursivo da busca binária em um vetor ordenado

Busca binária

- Teste e analise o algoritmo

Busca binária

- Análise de tempo
  - Se n=1, então tempo constante O(c), não importando se achou ou não o elemento
  - Se n>1, então
    - Comparações e divisão/diminuição do problema: tempo constante O(c)
    - Processamento do subproblema: T(n/2)

39

Busca binária

- Equações de complexidade de tempo
  - T(n)=O(c), se n=1
  - T(n)=T(n/2) + O(c), se n>1

40

Busca binária

- Equações de complexidade de tempo
  - T(n)=O(c), se n=1
  - $T(n)=\underbrace{T(n/2) + O(c)}_{T(n/2)}$, se n>1

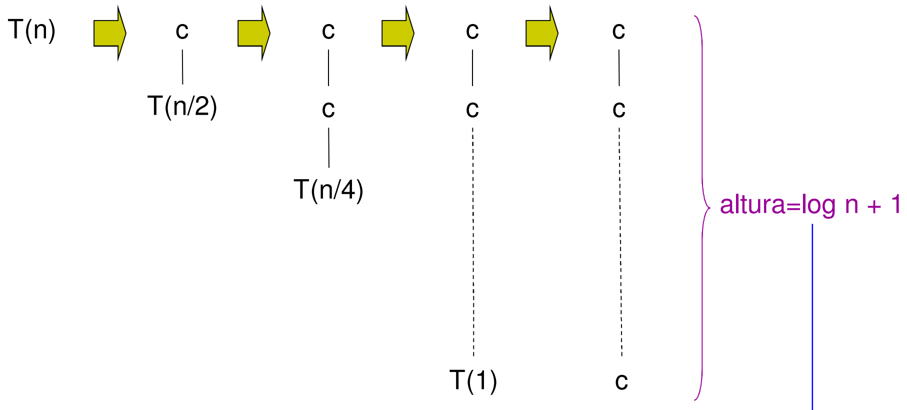
Busca binária

- Equações de complexidade de tempo
  - T(n)=O(c), se n=1
  - T(n)=T(n/2), se n>1

EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA, possível de resolver via árvore de recorrência

Busca binária

- Árvore de recorrência



$T(n) = c * (\log n + 1) = c \log n + c = O(\log n)$

43

Resolução de recorrências

- Método mestre
  - <u>Fornece limites</u> para recorrências da forma $T(n)=aT(n/b)+f(n)$, em que $a \geq 1$, $b>1$ e $f(n)$ é uma função dada
  - Envolve a memorização de alguns casos básicos que podem ser aplicados para muitas recorrências simples

44

Resolução de recorrências

- Método mestre
  - Fornece limites para recorrências da forma $T(n)=aT(n/b)+f(n)$, em que $a \geq 1$, $b>1$ e $f(n)$ é uma função dada
  - Envolve a memorização de alguns casos básicos que podem ser aplicados para muitas recorrências simples

TAREFA PARA CASA: estudar esse método

45