PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

2014

Probabilidade condicional e independência

A e *B são* dois eventos em um mesmo espaço amostral Ω. A probabilidade condicional de *A* dado que ocorreu o evento *B*, denotada por *P(A|B)*, é definida como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{se } P(B) > 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Exemplo. Selecionamos dois itens, ao acaso, um a um e sem reposição, de um lote que contém 10 itens do tipo A e 5 do tipo B. Qual é a probabilidade de que

(a) o primeiro item seja do tipo A?

(b) o segundo seja do tipo B se o primeiro item foi do tipo A?

Definimos os eventos

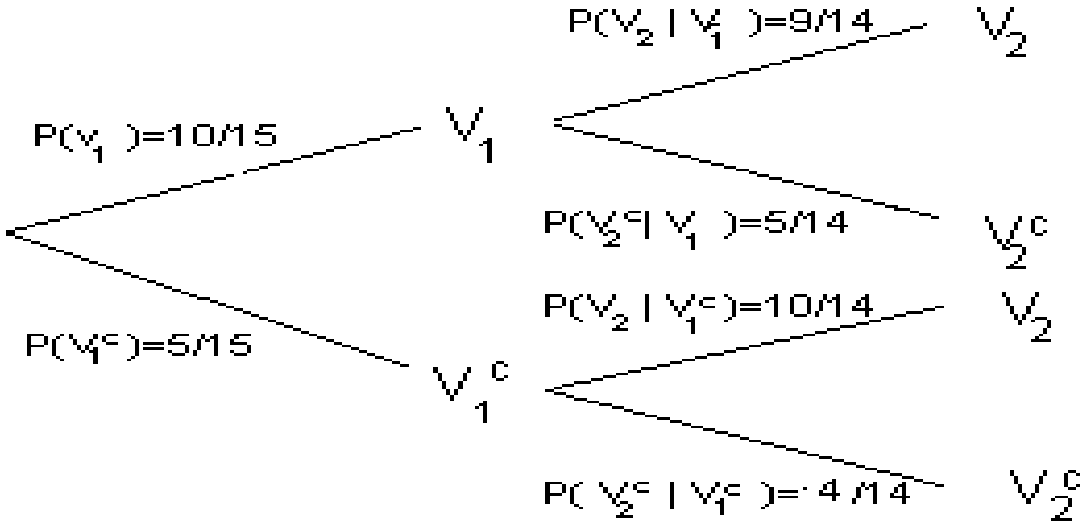
$$V_1 : \text{"o 1º item é do tipo A";}$$
$$V_2 : \text{"o 2º item é do tipo A"}$$

(a) $$P(V_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

(b) $$P(V_2^c \mid V_1) = \frac{5}{14}$$

Essas probabilidades podem ser representados em uma árvore de probabilidades.

Árvore de probabilidades



Da expressão (1) obtém-se uma relação útil:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B),$$

conhecida como regra do produto de probabilidades ou probabilidade da interseção.

Exemplo. No exemplo anterior suponha que temos interesse em determinar a probabilidade de que os dois itens selecionados sejam do tipo B.

$$\text{O evento é } V_1^c \cap V_2^c : \text{"o 1º e o 2º itens são do tipo B"}$$

$$\mathrm{P}(V_1^c \cap V_2^c) = P(V_1^c)P(V_2^c \mid V_1^c) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$$

Resultado. Se B é um evento em Ω tal que P(B) >0, então

$$1. P(\phi \mid B) = 0$$

$$2. \text{Se } \mathrm{A} \subset \Omega, \text{ então } \mathrm{P}(\mathrm{A}^c \mid B) = 1 - P(A \mid B) \text{ ou } P(A \mid B) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}^c \mid B)$$

$$3. Se\ A, C \subset \Omega, \text{então}$$

$$P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B) - P(A \cap C \mid B).$$

Exemplo. Um representante avalia que sua probabilidade de realizar um bom negócio em um certo dia é 0,35 e a probabilidade de realizar bons negócios em dois dias consecutivos é 0,25.

Se um bom negócio foi realizado no primeiro dia, qual a probabilidade de que no dia seguinte não seja realizado um bom negócio ?

Solução. Definimos os eventos A: ”um bom negócio é realizado no 1º dia” e B: ” um bom negócio é realizado no 2º dia”.

Do enunciado do problema temos $P(A) = 0,35$ e $P(A \cap B) = 0,25$. A probabilidade pedida é

$$P(B^c \mid A) = 1 - P(B \mid A) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{0,25}{0,35} = 0,286.$$

Independência de eventos

Dois eventos A e B em Ω são independentes se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A. Isto é,

$$P(A \mid B) = P(A), \quad P(B) > 0.$$

Logo, dois eventos A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemplo. Em uma fábrica 20% dos lotes produzidos têm componentes do fornecedor A, 8% têm componentes do fornecedor V e 4% têm componentes de ambos. Selecionamos ao acaso um item produzido nesta fábrica.

(a) Os eventos relacionados aos dois fornecedores são independentes?

(b) Se o lote selecionado tem componentes do fornecedor V, qual a probabilidade de que tenha componentes do fornecedor A?

(c) Qual é a probabilidade de um lote não ter componentes destes dois fornecedores?

Solução. A: “o lote tem componentes do fornecedor A”, V: “o lote tem componentes do fornecedor V”.

Do enunciado temos P(A) = 0,20, P(V) = 0,08 e P(A $\cap$ V) = 0,04.

(a) $P(V)P(A) = 0{,}08 \times 0{,}2 = 0{,}016$ e

$P(V \cap A) = 0{,}04.$

Como $P(V \cap A) \neq P(V)P(A)$, A e V não são independentes.

$$(b)\ P(A|V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{0{,}04}{0{,}08} = 0{,}50.$$

$$(c)\ P((V \cup A)^c) = 1 - P(V \cup A)$$

$$= 1 - \{P(V) + P(A) - P(V \cap A)\}$$

$$= 1 - (0{,}08 + 0{,}2 - 0{,}04) = 0{,}76.$$

Resultado. Se A e B são eventos independentes em Ω, então

(i) A e B^c são independentes.

(ii) A^c e B são independentes

(iii) A^c e B^c são independentes

Exemplo. Um atirador acerta 80% de seus disparos e outro (nas mesmas condições de tiro), 70%. Qual a probabilidade de o alvo ser acertado se ambos os atiradores dispararem simultaneamente?

$$\text{Eventos}: \mathrm{B}_i : \text{"o atirador } i \text{ acerta o alvo"}, \ \mathrm{i} = 1,2.$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_1) = 0{,}8 \text{ e } \mathrm{P}(B_2) = 0{,}7. \text{ Logo,}$$

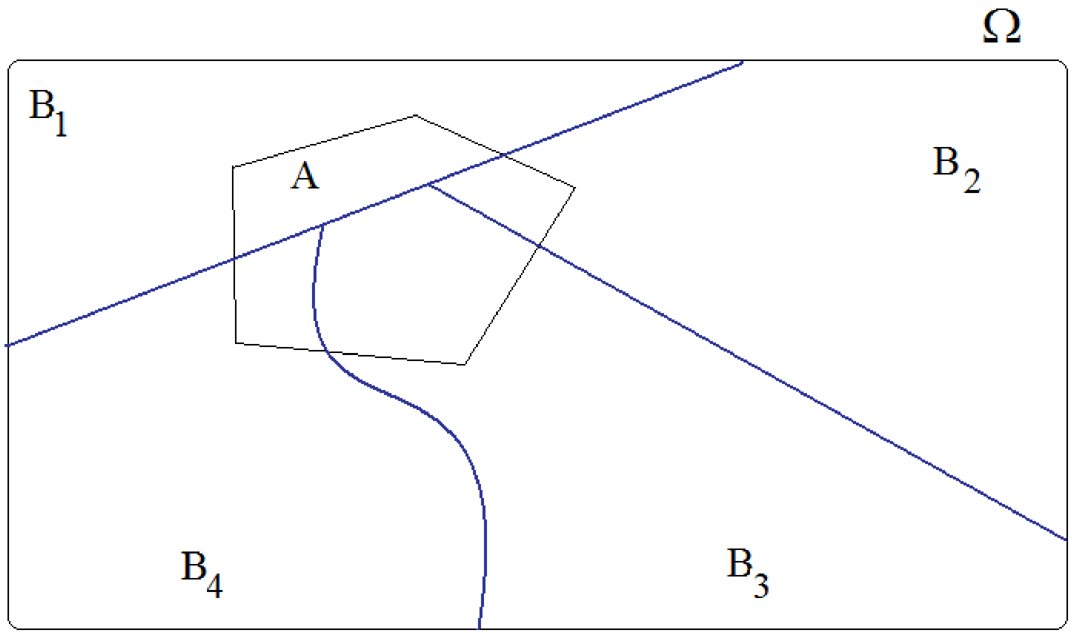
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B_1 \cup B_2) &= \mathrm{P}(\mathrm{B}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_2) - \mathrm{P}(B_1 \cap B_2) \\ &= \mathrm{P}(\mathrm{B}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_2) - \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)P(\mathrm{B}_2) \ \text{(supondo independência)} \\ &= 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}94.\end{aligned}$$

$$\text{Outra solução}:$$

$$\begin{aligned}P(B_1 \cup B_2) &= 1 - P((B_1 \cup B_2)^c) = 1 - P(B_1^c \cap B_2^c) = 1 - P(B_1^c)P(B_2^c) \\ &= 1 - [1 - \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)][1 - \mathrm{P}(\mathrm{B}_2)] = 1 - [1 - 0{,}8][1 - 0{,}7] = 0{,}94.\end{aligned}$$

Fórmula de Bayes

Partição do espaço amostral. Uma coleção de eventos $B_1,...,B_k$ forma uma partição do espaço amostral se eles são mutuamente exclusivos e se sua união é igual ao espaço amostral.



Fórmula da probabilidade total. Se $B_1,...,B_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω, então para qualquer evento A em Ω, vale

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + \cdots + P(B_k)P(A \mid B_k) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \mid B_i).$$

Exemplo. Em um programa de televisão são mostradas três portas (1, 2 e 3) fechadas e apenas uma delas guarda um valioso prêmio. O apresentador do programa sabe qual é a porta que leva ao prêmio. Um participante deve escolher uma das portas.

Em seguida, o apresentador informa o número de uma porta, diferente da escolha do participante, e que não guarda o prêmio.

O participante escolhe a porta 1. O apresentador informa que a porta 3 **não** guarda o prêmio e pergunta ao participante se ele gostaria de mudar sua escolha.

Se você fosse o participante, qual seria sua decisão? Vale a pena mudar a escolha?

Solução. Eventos:

X_i: "a porta número i guarda o prêmio" e Y_j: "apresentador informa que a porta número j **não** guarda o prêmio".

Observe que $P(X_1) = P(X_2) = P(X_3) = 1/3$. A pergunta pode ser respondida comparando $P(X_1|Y_3)$ e $P(X_2|Y_3)$, pois $P(X_3|Y_3) = 0$.

Levando em conta que o participante escolheu a porta 1, temos
$P(Y_2|X_1) = P(Y_3|X_1) = ½$, $P(Y_2|X_2) = P(Y_3|X_3) = 0$ e
$P(Y_2|X_3) = P(Y_3|X_2) = 1$, de modo que

$$P(Y_3) = P(Y_3|X_1)\, P(X_1) + P(Y_3|X_2)\, P(X_2) + P(Y_3|X_3)\, P(X_3)$$
$$= ½ \times 1/3 + 1 \times 1/3 + 0 \times 1/3 = ½ ,$$

$P(X_1|Y_3) = P(X_1 \cap Y_3)/P(Y_3) = P(Y_3|X_1)\, P(X_1)/P(Y_3) = (1/2x1/3)/1/2$
$= 1/3$ e

$P(X_2|Y_3) = P(X_2 \cap Y_3)/P(Y_3) = P(Y_3|X_2)\, P(X_2)/P(Y_3) = (1x1/3)/1/2$
$= 1/3 / 1/2 = 2/3$.

Vale a pena mudar a escolha!

Fórmula de Bayes. Se $B_1,...,B_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω, e A é evento em Ω com $P(A) > 0$, então

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \mid B_i)}.$$

Exemplo. Uma montadora trabalha com dois fornecedores (A e B) de uma determinada peça. Sabe-se que 10% e 5% das peças proveniente dos fornecedores A e B, respectivamente, estão fora das especificações. A montadora recebe 30% das peças do fornecedor A e 70% de B. Se uma peça do estoque inteiro é escolhida ao acaso,

(a) calcule a probabilidade de que ela esteja fora das especificações.

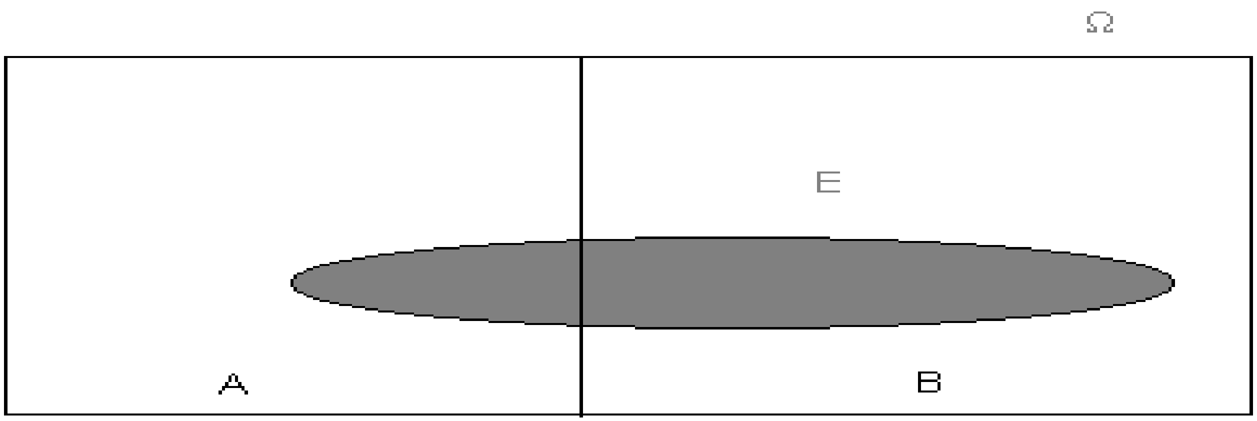
(b) se uma peça escolhida ao acaso está fora das especificações, qual é a probabilidade de que tenha sido fornecida por A ?

Solução. Eventos:

A: “ peça selecionada foi fornecida por A”,

B:” peça selecionada foi fornecida por B” e

E:”peça selecionada não atende às especificações”.



Do enunciado do problema temos P(A) = 0,30, P(B) = 0,70, P(E|A) = 0,10 e P(E|B) = 0,05.

(a) Fórmula da probabilidade total:

P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) = 0,30 × 0,10 + 0,70 × 0,05 = 0,065.

(a) P(A|E) = ?

Pela fórmula de Bayes,

$$P(A|E) = \frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B)} = \frac{0,30 \times 0,10}{0,30 \times 0,10 + 0,70 \times 0,05} = \frac{0,03}{0,065} = 0,46.$$

A solução do exemplo anterior é facilitada pela árvore de probabilidades: