Notas de do Curso de SLC534
Desenho Geométrico e Geometria Descritiva

Prof. Wagner Vieira Leite Nunes

São Carlos - Agosto de 2011

Sumário

Avisos Importantes Para o Curso:

1. Minha página na web: www.icmc.usp.br/ wvlnunes/index.html
2. Página do curso: www.icmc.usp.br/˜ wvlnunes/slc534/slc534.html
3. Meu email: wvlnunes@icmc.usp.br
4. Minha sala no ICMC: 3-128
5. Meu ramal no Campus: (3373-) 9745
6. Horário e local das aulas: 4.as das 19:00 às 22:40
7. Fim do semestre: 7 de dezembro (4.a-feira)
8. Ementa da disciplina
9. Bibliografia
10. Livro texto:
    Desenho Geométrico - Edurado Wagner - Construções Geométricas - IMPA/VITAE
    Geometria Descritiva: Apostila de Geometria Desfritiva -
11. Horários de monitoria: não haverá monitoria
12. Horários de atendimento do professor: 3.as-feiras das 10:00 às 12:00
13. Listas de exercícios: na página da disciplina
14. Critério de avaliação: duas provas, com pesos dois e trÊs, respectivamente.
15. Datas das provas:

    1.a Prova: 21 de setembro (4.a-feira)

    2.a Prova: 30 de novembro (4.a-feira)

    Prova Substitutiva: 7 de dezembro (4.a-feira)
16. Gabaritos das provas: serão divulgados logo após o final das mesmas na página da disciplina.
17. Freqüência: **somente serão aceitas assinaturas** na lista de presença
18. Prova substitutiva: **somente para quem perdeu** uma das duas provas
19. Outros:

Capítulo 1

Construções Elementares

3.08.2011 - 1.a e 2.a

1.1 Introdução

Citando a introdução do Livro Construções Geométricas do Prof. Eduardo Wagner (Proj. IMPA/VITAE), as construções geométricas já haviam sido consideradas no século V a.C. .

A palavra *número* era usada somente para os inteiros e uma fração (ou número racional) era vista como a razão entre dois números inteiros.

A noção de número real estava ainda longe de ser concebida.

Nos problemas, as grandezas que apareciam, em vez de serem associadas a números, eram vistas como medidas de segmentos de reta.

Com isto, muitos problemas poderiam ser resolvidos geometricamente (mesmo que não se conhece o valor do mesmo do ponto de vista numérico), ou seja, *resolver* uma equação poderia estar associada a idéia de *construir* a solução.

Como motivação o autor considera o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.1 *Encontrar uma solução x da equação $ax = bc$, onde a, b, c são valores conhecidos (ou seja, medidas de segmentos de retas dados, com $a \neq 0$).*

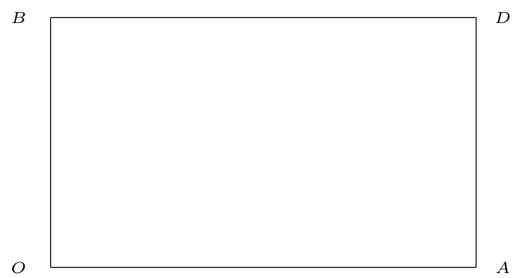
Resolução:

Um modo como essa equação poderia ser resolvida era encará-la da seguinte forma: tentar encontrar a altura, de comprimento $\underline{x}$, de um retângulo de base de comprimento $\underline{a}$ que tivesse a mesma área de um retângulo com altura de comprimento $\underline{b}$ e base de comprimento $\underline{c}$.

Para tanto agia-se da seguinte forma:

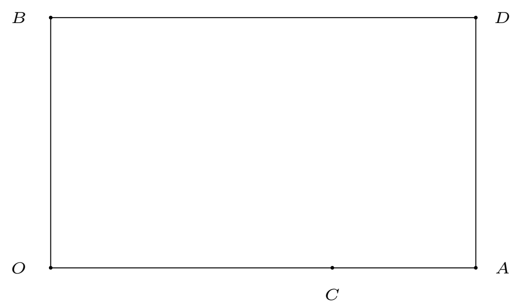
1^o: Constrói-se, geometricamente, o retângulo $\square OBDA$ (veja figura abaixo) de tal modo que

$$OA = a \quad \text{e} \quad OB = b.$$



2^o: Sobre o lado $\overline{OA}$ encontra-se o ponto C de tal modo que (veja figura abaixo)

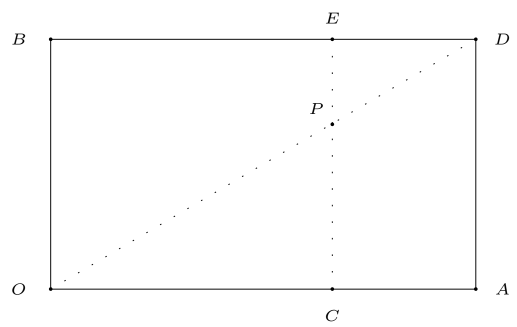
$$OC = c.$$



Observemos que caso $c > a$ então o ponto C estará no prolongamento do lado $\overline{OA}$.

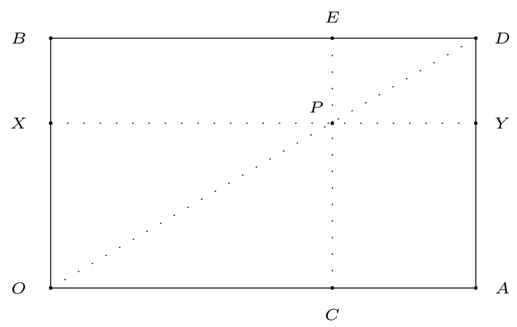
3^o: Traça-se a reta paralela a reta que contém lado $\overline{OB}$ que passa pelo ponto C.

Esta reta encontrará a diagonal (ou o prolongamento da mesma) $\overline{OD}$ do retângulo $\square OBDA$ no ponto P e também encontrará o lado $\overline{BD}$ do retângulo $\square OBDA$ no ponto E (veja figura abaixo).



4. Traça-se por P a reta paralela a reta que contém o lado $\overline{OA}$.

   Esta encontrará os lados $\overline{OB}$ e $\overline{AD}$, do retângulo $\square OADB$, nos pontos X e Y, respectivamente (veja figura abaixo).



5. A solução da nossa equação será
$$x = OX.$$

Para demonstrar isso observemos que:

1. Como, por construção, as retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{XY}$, $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{CE}$, $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são paralelas segue que os triângulos ΔODA, ΔOBD são congruentes (caso LL L comum); os triângulos ΔOPC, ΔOXP são congruentes (caso LL L comum) e os triângulos ΔPDY, ΔPED também são congruentes (caso LL L comum).

   Portanto, dois a dois, eles têm mesma área.

2. Temos que
$$\text{Área}(\Delta OBD) = \text{Área}(\Delta ODA).$$
   Assim
$$\text{Área}(\Delta OBD) = \text{Área}(\Delta OXP) + \text{Área}(\square XBEP) + Area(\Delta PED)$$
$$\text{Área}(\Delta ODA) = \text{Área}(\Delta OPC) + \text{Área}(\square CPYA) + \text{Área}(\Delta PDY).$$
   Mas
$$\text{Área}(\Delta OPC) = \text{Área}(\Delta OXP);$$
$$\text{Área}(\Delta PDY) = \text{Área}(\Delta PED)$$
   logo
$$\text{Área}(\square XBEP) = \text{Área}(\square CPYA).$$
   Logo os retângulos $\square XBEP$ e $\square CPYA$ têm mesma área.

3. Temos também que
$$\begin{aligned}
\text{Área}(\square OBEC) &= \text{Área}(\Delta OPC) + \text{Área}(\Delta OXP) + Area(\square XBEP) \\
&\overset{[\text{Área}(\Delta OPC)=\text{Área}(\Delta OXP)]}{=} 2\text{Área}(\Delta OPC) + \text{Área}(\square XBEP) \\
&\overset{[\text{Área}(\square XBEP)=\text{Área}(\square CPYA)]}{=} 2\text{Área}(\Delta OCP) + \text{Área}(\square CPYA) \\
&\overset{[\text{Área}(\Delta OPC)=\text{Área}(\Delta OXP)]}{=} \text{Área}(\Delta OCP) + \text{Área}(\Delta OXP) + \text{Área}(\square CPYA) \\
&= \text{Área}(\square OXYA).
\end{aligned}$$
   Logo os retângulos $\square OBEC$ e $\square OXYA$ têm mesma área, ou seja,
$$OC.OB = OA.OX \quad \text{isto é,} \quad bc = ax.$$
   Assim encontramos, geometricamente, a solução $\underline{x}$ para nossa equação!

1.2 Perpendiculares

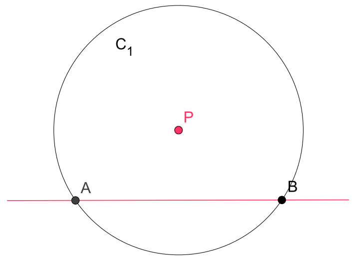
Problema 1.2.1 *Dados uma reta $\underline{r}$ e um ponto $\underline{P}$ encontrar, geometricamente, a reta perpendicular à reta $\underline{r}$ que contém pelo ponto $\underline{P}$.*

1.2.1 O ponto $\underline{P}$ não pertence à reta $\underline{r}$:

Como encontrar, geometricamente, a reta perpendicular a uma reta $\underline{r}$ dada por um ponto $\underline{P}$ que não pertence a reta $\underline{r}$?

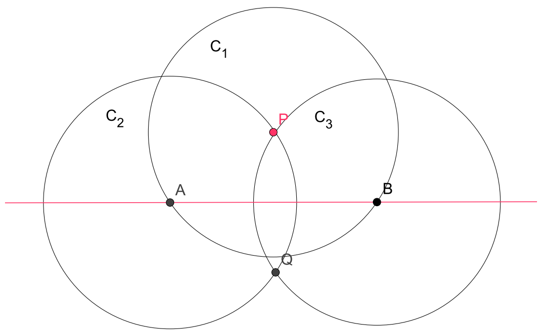
Uma construção possível seria:

1. Centrando o compasso no ponto $\underline{P}$, com uma abertura maior que a distância do ponto $\underline{P}$ à reta $\underline{r}$, tracemos uma circunferência, $\mathcal{C}_1$, que interceptará a reta r nos pontos, distintos, A e B (ver figura abaixo);

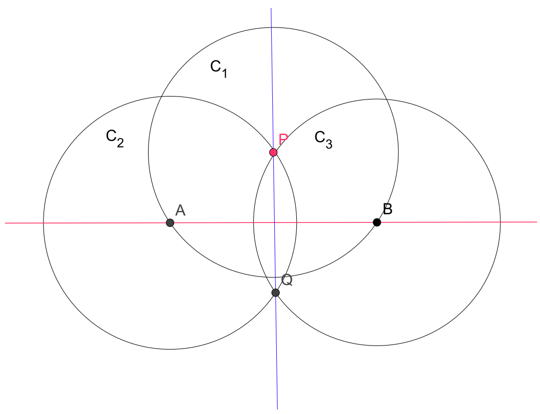


2. Centrando o compasso no ponto A, com a abertura AP, tracemos a circunferências, $\mathcal{C}_2$ e centrando o compasso no ponto B, com a abertura AP, tracemos a circunferências $\mathcal{C}_3$.

   Com isto temos que as circunferências $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ se interceptam nos pontos P e Q (ver figura abaixo);



3. A reta que contém os pontos P e Q é a reta perpendicular a reta r e que contém o ponto P (ver figura abaixo).



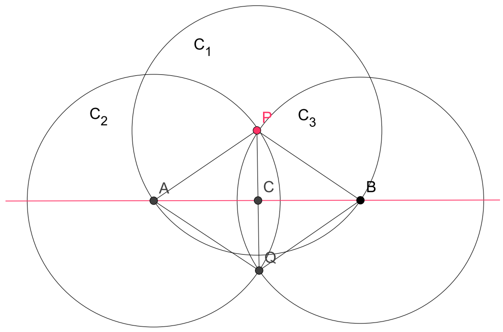
Para mostrar que isto é verdade, seja C o ponto de intersecção da reta r com a reta que contém P e Q.

Observemos que (veja figura abaixo):

$$\Delta PBQ \equiv \Delta PQA \ (LLL \text{ comum}) \Rightarrow \widehat{CPB} \equiv \widehat{APC}.$$

$$\Delta APC \equiv \Delta CPB \ (LAL \text{ comum}) \Rightarrow AC = CB \text{ e } \widehat{PCA} \equiv \widehat{BCP}.$$

$$\text{Como } \widehat{PCA} + \widehat{BCP} = \pi \quad \overset{\widehat{PCA} \equiv \widehat{BCP}}{\Rightarrow} \quad \widehat{PCA} = \frac{\pi}{2}.$$



Portanto a retas r e a reta que contém os pontos P e Q são perpendiculares, como queríamos mostrar.

Observação 1.2.1 *Na verdade acabamos de provar que as diagonais do losango $\Diamond APBQ$ cruzam-se perpendicularmente, pois*

$$\frac{\pi}{2} = \widehat{PCA} = \widehat{BCP} = \widehat{ACQ} = \widehat{QCB},$$

e nos seus respectivos pontos médios, pois ,

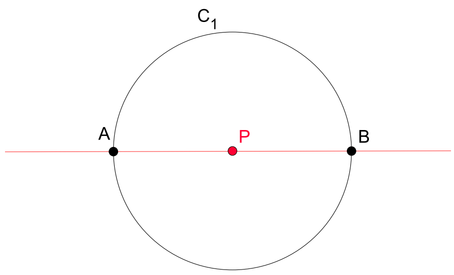
$$AC = CB \quad e \quad CP \equiv QC.$$

1.2.2 O ponto P pertence à reta r:

Como encontrar, geometricamente, a reta perpendicular a uma reta r dada por um ponto P que pertence a reta r?

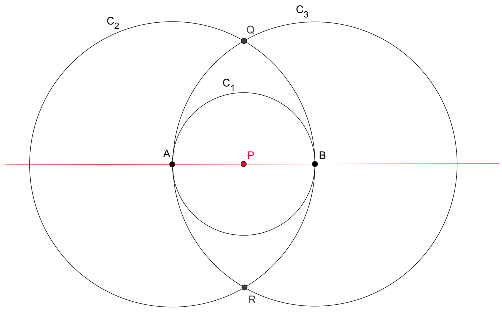
Uma construção possível seria:

1. Centrando o compasso no ponto P, com uma abertura qualquer tracemos uma circunferência, $\mathcal{C}_1$, que intercepta a reta r nos pontos A e B;

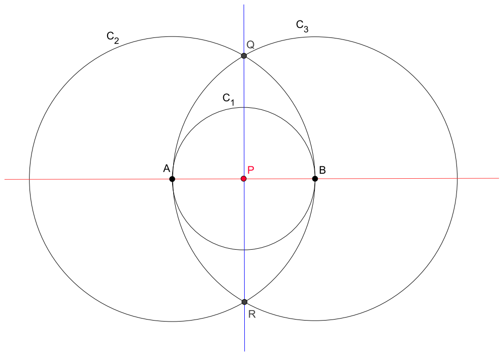


2. Centrando o compasso no ponto A, com a abertura AB (poderíamos ter escolhido qualquer abertura maior que AP), tracemos a circunferência $\mathcal{C}_2$ e centrando o compasso no ponto B, com a abertura AB (ou a mesma escolhida anteriormente), tracemos a circunferência $\mathcal{C}_3$.

   Com isto temos que as circunferência $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ se interceptam no ponto Q (e no ponto R);

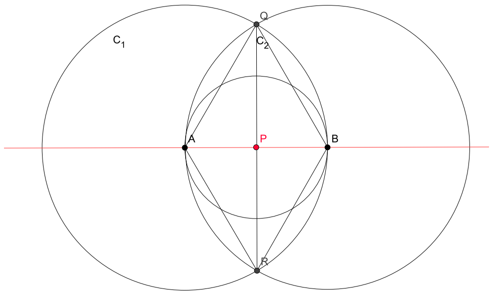


3. A reta que contém os pontos P e Q é a reta perpendicular a reta r e que passa pelo ponto P (veja figura abaixo).



Para mostrarmos que isto é verdade, observemos que o quadrilátero $\Diamond AQBR$ é um losango (pois seus lados têm mesma medida que é igual ao raio da circunferência $\mathcal{C}_2$ ou $\mathcal{C}_3$ - ver figura abaixo).

Logo suas diagonais cruzam-se perpendicularmente, isto é, a reta r e a reta que contém os pontos Q e R são perpendiculares e a segunda contém o ponto P (que será o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e do segmento $\overline{RQ}$).



□

1.3 Mediatriz

Definição 1.3.1 *Se A e B são pontos distintos.*

*A **Mediatriz** do segmento $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes do ponto A e do pomto B.*

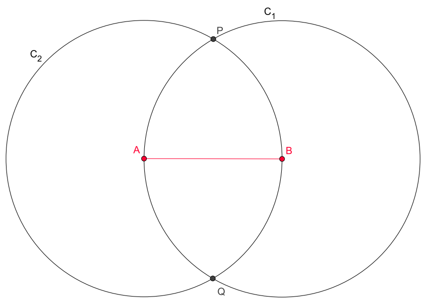
Problema 1.3.1 *Encontrar, geometricamente, a mediatriz do segmento* $\overline{AB}$.

Resolução:

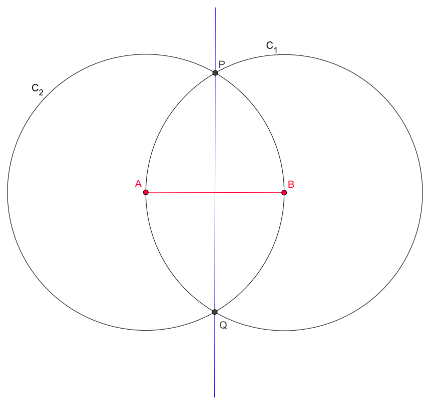
Uma construção possível seria:

1. Centrando o compasso nos pontos A, com a abertura AB, tracemos a circunferência $\mathcal{C}_1$ e centrando o compasso nos pontos B, com a abertura AB (bastaria ser maior que $\dfrac{AB}{2}$), tracemos a circunferência $\mathcal{C}_2$.

   As circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ se interceptarão nos pontos P e Q (ver figura abaixo);



2. Afirmamos que a reta que contém P e Q é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.



Mostremos que a afirmação acima é verdadeira.

Para isto observemos que o quadrilátero $\lozenge APBQ$ é um losango (pois seus lados têm mesma medida que é igual ao raio da circunferência $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$, a saber AP - veja figura abaixo).

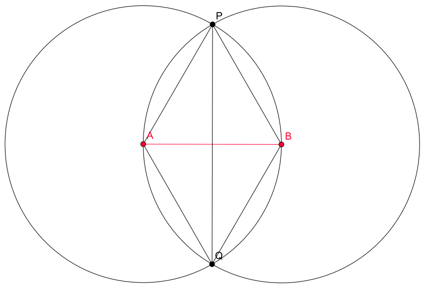
Logo suas diagonais cruzam-se perpendicularmente nos seus pontos médios, isto é, os pontos P e Q estão na mediatriz.

Falta mostrar que todo ponto da reta que contém os pontos P e Q são equidistantes dos pontos A e B.

Isso será deixado como exercício para o leitor (a seguir)

Exercício 1.3.1 $\boxed{\textbf{Valor: } +0.5}$

Mostrar a afirmação acima.



1.4 Paralelas

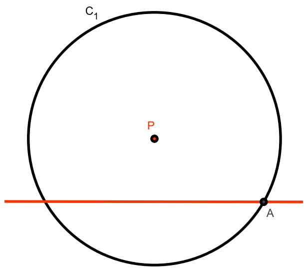
Problema 1.4.1 *Encontrar, geometricamente, a reta paralela a uma reta* $\underline{r}$ *dada que passa pelo ponto* P*, que não pertence à reta* r*.*

Resolução:

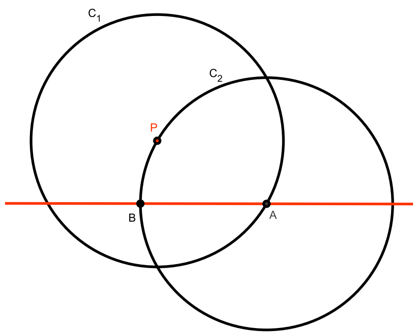
Daremos três possibilidades para a construção:

1.4.1 1.a construção da paralela

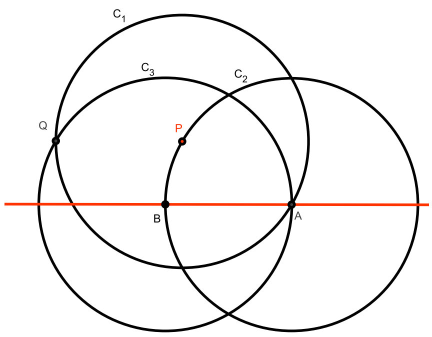
1. Centrando o compasso no ponto P escolha uma abertura PA de tal modo que a circunferência $\mathcal{C}_1$ obtida intercepte a reta r em um ponto A (no caso de obter dois pontos; escolha um deles);



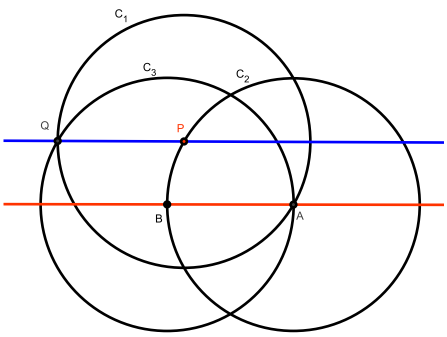
2. Centrando o compasso no ponto A, com a abertura anterior, tracemos a circunferência $\mathcal{C}_2$ que intercepterá a reta r em um ponto B (na verdade obteremos dois pontos; escolha um deles);



3. Centrando o compasso no ponto B, com a abertura anterior, tracemos a circunferência $\mathcal{C}_3$ que intercepterá a circunferência $\mathcal{C}_1$ em um ponto Q que está no mesmo semi-plano determinado pela reta r que contém o ponto P (na verdade também interceptará a reta r no ponto A);



4. Afirmamos que a reta que contém os pontos P e Q é uma reta paralela a reta r (e contém o ponto P).



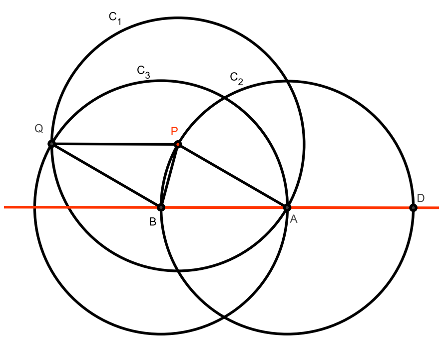
Mostremos que a afirmação acima é verdadeira.

Para isto, observemos que quadrilátero $\lozenge PABQ$ é um losango (pois seus lados têm mesma medida que é igual ao raio da circunferência - ver figura abaixo).

Logo seus lados adjacentes são paralelos o que mostra que a reta r e a reta que contém os pontos P e Q são paralelas.

Observação 1.4.1 *Uma outra demonstração seria:*

Consideremos D o outro de intersecção da reta r com a circunferência $\mathcal{C}_2$ (veja figura abaixo).



Observemos que o triângulo ΔPAB é isóceles (pois os lados $\overline{PA}$ e $\overline{AB}$ têm mesma medida e são iguais a medida do raio da circunferência $\mathcal{C}_2$).

Assim $\widehat{BPA} \equiv \widehat{ABP}$.
Os triângulos ΔPAB *e* ΔPBQ *são congruentes (LL L comum) logo* $\widehat{BPA} = \widehat{QPB}$.
Do triângulo ΔPAB*, temos que*

$$\widehat{BPA} + \widehat{ABP} + \widehat{PAB} = \pi \quad \overset{[\widehat{BPA}=\widehat{ABP}]}{\Rightarrow} \quad 2\,\widehat{BPA} + \widehat{PAB} = \pi. \quad (**)$$

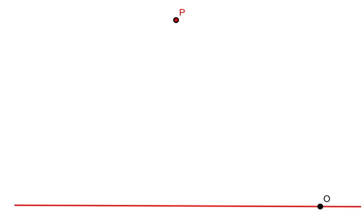
Por outro lado,

$$\widehat{DAP} + \widehat{PAB} = \pi \quad \overset{(**)}{\Rightarrow} \quad \widehat{DAP} = 2\,\widehat{BPA} \overset{[\widehat{BPA}=\widehat{QPB}]}{=} \widehat{BPA} + \widehat{QPB} = \widehat{QPA}.$$

Conclusão: $\widehat{DAP} = \widehat{QPA}$.
Portanto as retas r *e que contém os pontos* P *e* Q *são paralelas (pois a reta que contém os pontos* A *e* P *tem ângulos alternos internos iguais).*

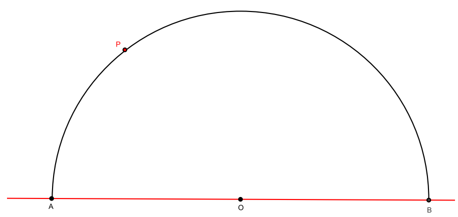
1.4.2 2.a construção da paralela

1. Escolha um ponto O sobre a reta r que não esteja na reta perpendicular a reta r que contém o ponto P (veja figura abaixo);

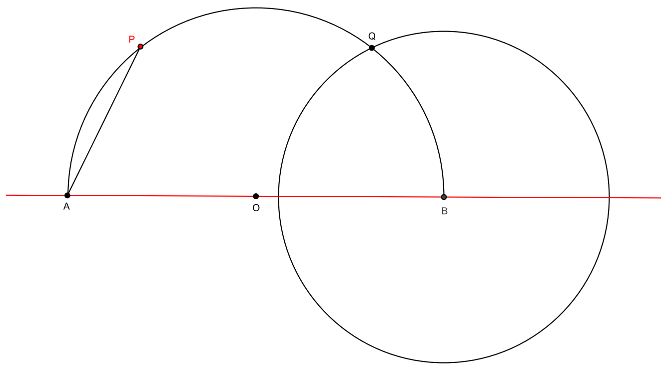


2. Centrando o compasso no ponto O tracemos a semi-circunferência, $\mathcal{C}_1$, que passa pelo ponto P (ou seja seu raio será OP) e está contida no semi-plano determinado pela reta r que contém P.

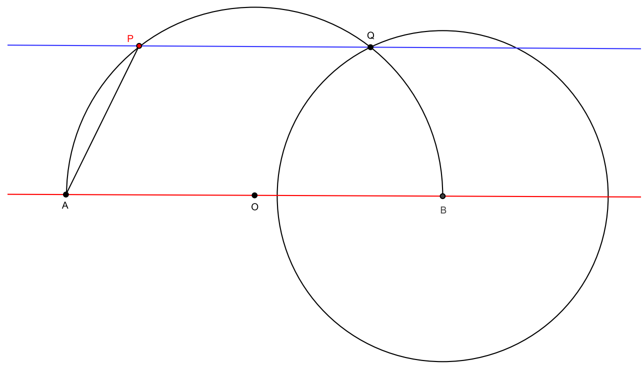
   Ela intercepta a reta r nos pontos A e B (ver figura abixo);



3. Centrando o compasso no ponto B tracemos a circunferência, $\mathcal{C}_2$, com abertuta igual a AP, que intercepterá a semi-circunferência $\mathcal{C}_1$ em um ponto Q (figura abaixo);

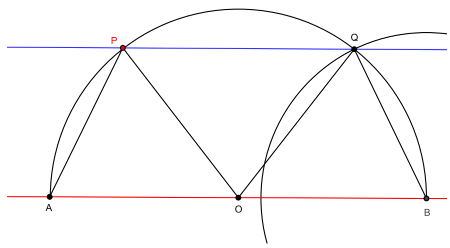


4. A reta que contém os pontos P e Q é uma reta paralela a reta r (e contém o ponto P) (figura abaixo).



Mostremos que realmente a reta encontrada é a reta paralela à reta r que contém o ponto P. Observemos que os triângulos ΔOAP, ΔOQB e ΔOPQ são isóceles logo (figura abaixo)

$$\widehat{OAP} \equiv \widehat{APO}, \quad \widehat{QBO} \equiv \widehat{OQB} \quad \text{e} \quad \widehat{OPQ} \equiv \widehat{PQO}.$$



Além disso os triângulos ΔOAP, ΔOQB são congruentes (caso LLL), logo $\widehat{POA} = \widehat{BOQ}$. Do triângulo ΔOPQ temos

$$\pi = \widehat{OPQ} + \widehat{QOP} + \widehat{PQO} = 2\widehat{OPQ} + \widehat{QOP}.$$

Mas

$$\pi = \widehat{POA} + \widehat{QOP} + \widehat{BOQ} = 2\widehat{POA} + \widehat{QOP}.$$

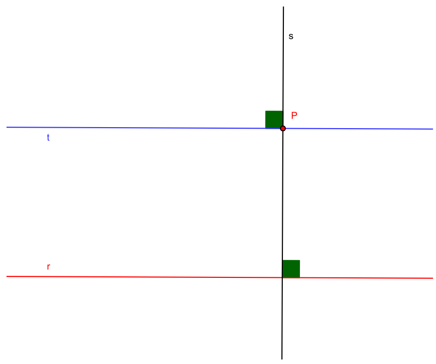
Logo $\widehat{POA} = \widehat{OPQ}$, mostrando que as retas $\underline{r}$ e a que contém os pontos P e Q são paralelas (são ângulos alternos internos).

□

1.4.3 3.a construção da paralela

1. Tracemos a reta perpendicular, $\underline{s}$, a reta $\underline{r}$ que contém o ponto P (como na seção (1.2));
2. Tracemos a reta perpendicular, $\underline{t}$, a reta s que contém o ponto P (como na seção (1.2));
4. A reta $\underline{t}$ que contém os pontos P é a reta paralela a reta $\underline{r}$ (e contém o ponto P).

   A figura abaixo ilustra a situação.



A demonstração, neste caso, é muito simples visto que a reta $\underline{t}$ (que contém o ponto P) e a reta $\underline{r}$ são perpendiculares a reta $\underline{s}$ logo devem ser paralelas.

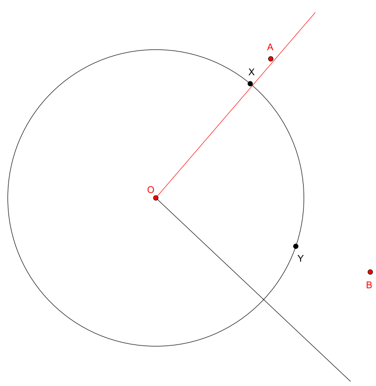
1.5 Bissetriz

Lembremos que a **Bissetriz** de um ângulo $\widehat{BOA}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes dos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ do ângulo dado.

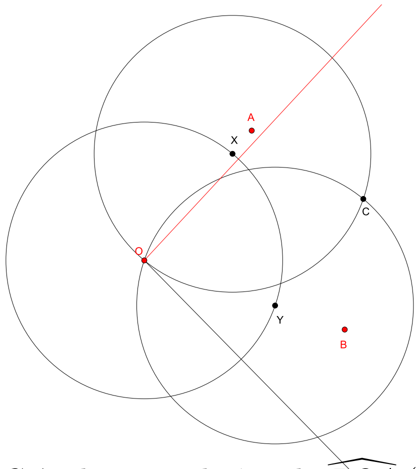
Como traçar a reta bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$?

Uma construção possível seria:

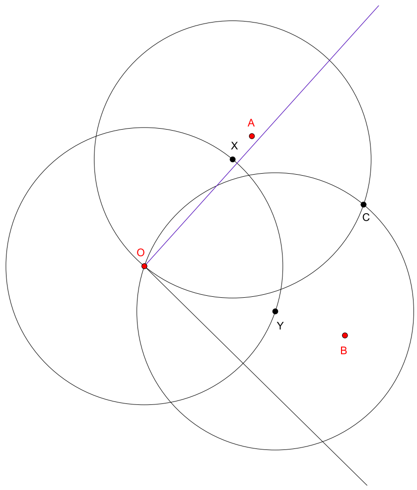
1. Centrando o compasso no ponto O, com uma abertura qualquer, tracemos uma circunferência que intercepta os lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ do ângulo nos pontos X e Y (figura abaixo);



2. Centrando o compasso nos pontos X e Y, com abertura anterior, tracemos as circunferências que se interceptam no ponto C (e no ponto O) (figura abaixo);

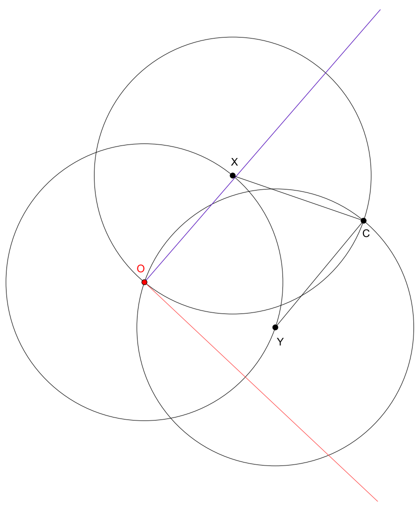


3. A semi-reta que contém O e C é a bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$ (figura abaixo).

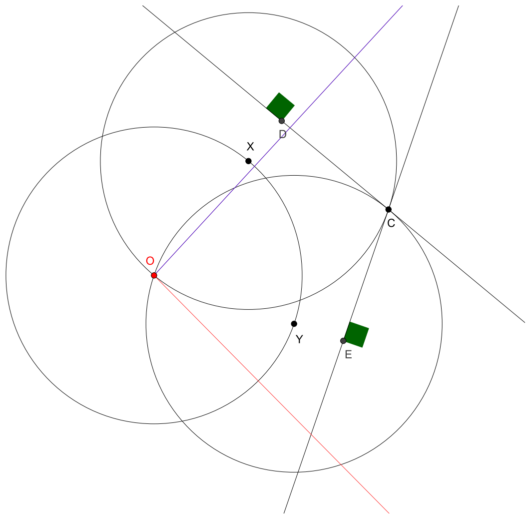


A seguir exibiremos a demonstração que a construção acima nos fornece, realmente, a bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$.

Observemos que os triângulos ΔOXC e ΔOCY são congruentes (LLL comum) assim $\widehat{COX} \equiv \widehat{COY}$ (figura abaixo).



Consideremos as retas perpendiculares aos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ que passam pelo ponto C, que interceptarão os mesmos nos pontos D e E, respectivamente (figura abaixo).



Os triângulos ΔODC e ΔOCE são congruentes (L comum AA oposto ao lado comum, que é reto)) logo $CD \equiv CE$ mostrando que o ponto C está na bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$.

Falta mostrar que todo ponto da semi-reta que contém os pontos O e C é equidistante dos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ do ângulo $\widehat{BOA}$. Isso será deixado como exercício (a seguir) para o leitor.

$\square$

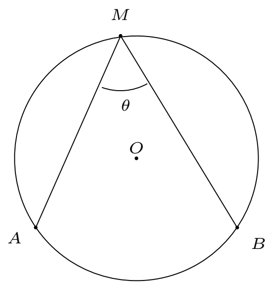
Exercício 1.5.1 **Valor: +0.5**

Mostre que a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$.

10.08.2011 - 3.a e 4.a

1.6 Arco Capaz

Consideremos os pontos A e B, distintos, de uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro no ponto O.



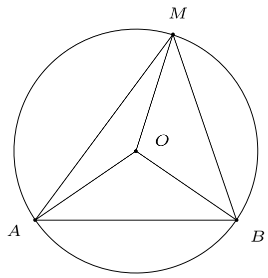
Afirmamos que para todo ponto M sobre um dos arcos da circunferência $\mathcal{C}$ determinados pelos pontos A e B o ângulo $\theta \doteq \widehat{AMB}$ é constante.

De fato, observemos que (veja figura abaixo):

$$\begin{aligned}
&\Delta OAM \text{ é um triângulo isósceles } \Rightarrow \alpha \doteq \widehat{OAM} = \widehat{AMO}\\
&\Delta AOB \text{ é um triângulo isósceles } \Rightarrow \beta \doteq \widehat{BAO} = \widehat{OBA}\\
&\Delta BOM \text{ é um triângulo isósceles } \Rightarrow \gamma \doteq \widehat{MBO} = \widehat{OMB}.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\theta = \widehat{AMO} + \widehat{OMB} = \alpha + \gamma.$$



Do triângulo ΔAOB temos que

$$\pi = \widehat{BAO} + \widehat{AOB} + \widehat{OBA} = 2\beta + \widehat{AOB} \tag{1.1}$$

Do triângulo ΔAMB temos que

$$\begin{aligned} \pi &= \widehat{AMB} + \widehat{MBA} + \widehat{BAM} = (\alpha + \gamma) + (\gamma + \beta) + (\beta + \alpha) \\ &= 2[(\alpha + \gamma) + \beta] \overset{[\alpha+\gamma=\theta]}{=} 2\theta + 2\beta \end{aligned} \tag{1.2}$$

Comparando (1.1) com (1.2) teremos que

$$2\beta + \widehat{AOB} = \pi = 2\theta + 2\beta,$$

ou seja, $2\theta = \widehat{AOB}$ o que implicará

$$\theta = \frac{\widehat{AOB}}{2},$$

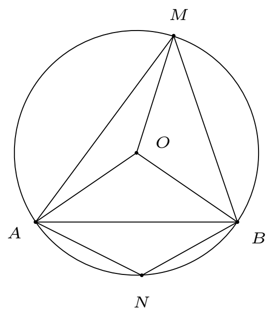
, ou seja, o ângulo θ será constante, como queríamos demonstrar.

Definição 1.6.1 *O arco* $A\overset{\frown}{M}B$ *será denominado* **arco capaz do ângulo** $\underline{\theta = \widehat{AMB}}$ *sobre o segmento* $\overline{AB}$.

Observação 1.6.1

1. *Podemos concluir que um observador que anda sobre o arco determinado pelos pontos A e B da circunferência $\mathcal{C}$ (o arco capaz) vê o segmento $\overline{AB}$ sempre sob um mesmo ângulo (o ângulo θ).*

2. *Se um ponto N está sobre o outro arco da circunferência $\mathcal{C}$ determinado pelos pontos A e B então o ângulo $\widehat{BNA}$ também será constante e, além disso, será igual a $\pi - \theta$.*

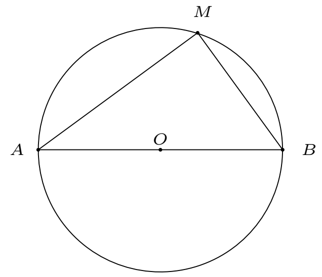


De fato, sabemos que o ângulo $\widehat{AOB} = 2\theta$ *e que o ângulo* $2\,\widehat{BNA}$ *é igual ao suplementar do ângulo* $\widehat{AOB}$ *(pelo arco capaz* $A\overset{\frown}{N}B$*), ou seja,*

$$2\,\widehat{BNA} = 2\pi - 2\theta, \qquad \textit{ou ainda} \qquad \widehat{BNA} = \pi - \theta.$$

3. *Um caso particular importante é quando o segmento* $\overline{AB}$ *é o diâmetro da circunferência. Neste caso temos que o ângulo* $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{2}$*, ou seja, o triângulo* ΔAMB *é retângulo no vértice* M*.*

   Com isto acabamos de demonstrar que uma triângulo que tenha como um de seus lados o diâmetro de uma circunferência e o outro vértice sobre um dos arcos da semi-circunferência deverá ser um triângulo retângulo e o ângulo reto corresponderá ao oposto ao lado que é o diâmetro da circinferência (na figura abaixo o ângulo $\widehat{M}$*).*

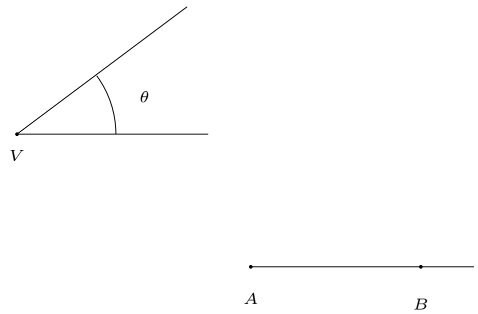


4. *Devido ao fato acima, uma semi-circunferência será chamada de* **<u>arco capaz do ângulo $\dfrac{\pi}{2}$</u>**.

Nosso objetivo é construir, geometricamente, o arco capaz de um ângulo dado.
Para isto precisamos saber como transportar, geometricamente, ângulos.

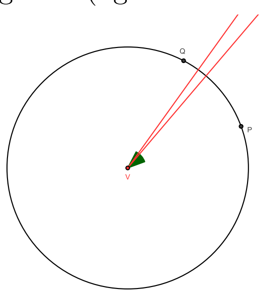
1.6.1 Transporte de ângulos

Consideremos um ângulo θ com vértice em V e dois pontos distintos A, B dados.
Queremos encontrar um ponto X de tal modo que o $\widehat{BAX} = \theta$.

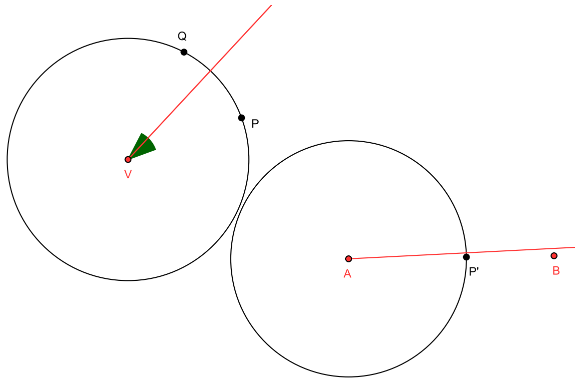


Neste caso agiremos da seguinte forma:

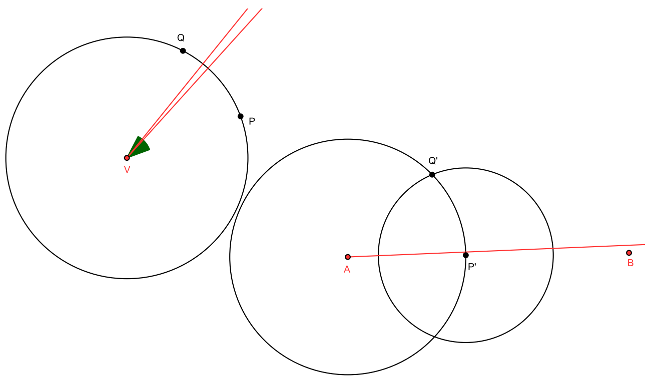
1. Traçamos uma circunferência $\mathcal{C}$ centrada no ponto V com raio qualquer, que determinará os pontos P e Q sobre os lados do ângulo θ (figura abaixo);



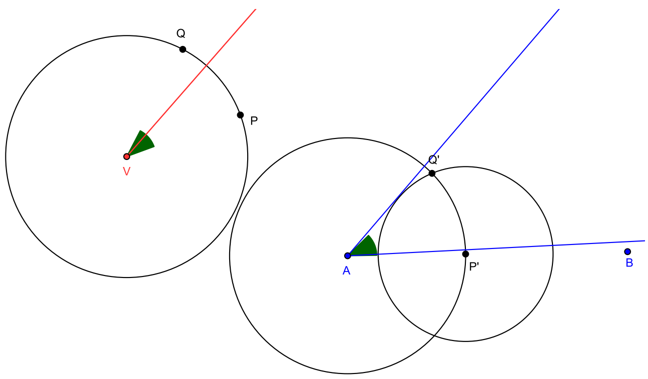
2. Traçamos uma circunferência $\mathcal{C}'$ centrada no ponto A com o mesmo raio da circunferência $\mathcal{C}$ do item 1., que determinará o ponto P' sobre a semi-reta determinada pelos pontos A e B que tem como extremo o ponto A (figura abaixo);



3. Traçamos por B uma circunferência centrada no ponto P' com o raio igual a PQ que interceptará a circunferência $\mathcal{C}'$ do item 2. no ponto Q' (na verdade temos um outro ponto que poderia ser escolhido) (figura abaixo).



4. Com isto afirmamos que $\widehat{P'AQ'} = \widehat{PVQ} = \theta$, ou seja, transportamos, geometricamente, o ângulo θ.

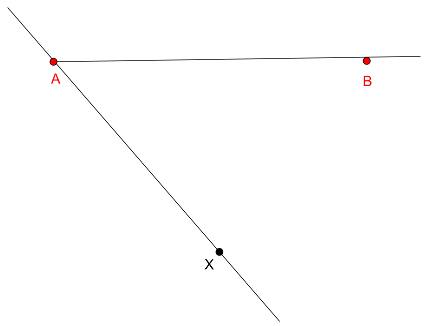


Para mostrar isto, observemos que, por construção, os triângulos ΔPVQ e $\Delta P'AQ'$ são conguentes (caso LLL), em particular, teremos $\widehat{P'AQ'} = \widehat{PVQ}$, com queríamos demonstrar.

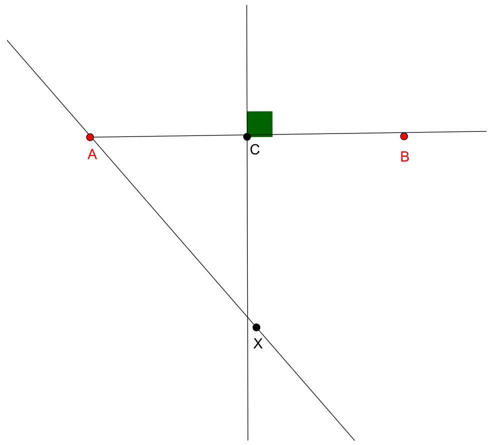
1.6.2 Construção do arco capaz

A seguir faremos a construção do arco capaz do ângulo θ associado ao segmento $\overline{AB}$ dados.

1. Suponhamos que o ponto X seja de tal modo que $\widehat{XAB} = \theta$ (aqui usamos o transporte do ângulo θ - veja figura abaixo).

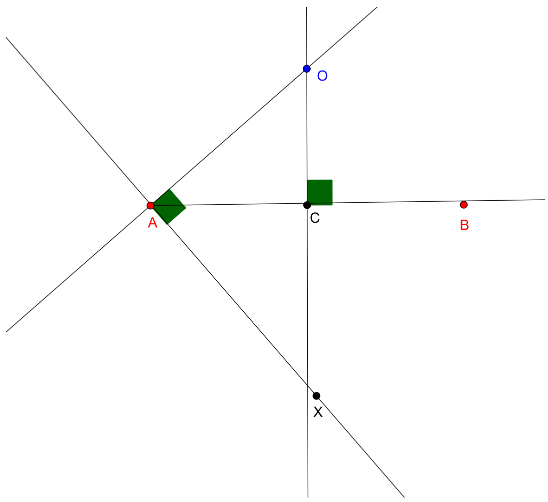


2. Tracemos a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ que encontra o segmento $\overline{AB}$ no seu ponto médio C (veja figura abaixo).

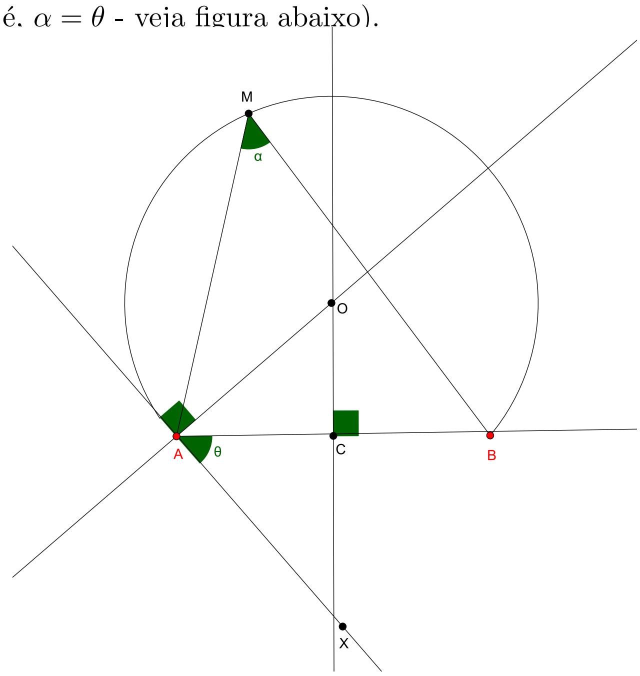


3. Tracemos a reta perpendicular à reta que contém os pontos A e X pelo ponto A.

   Esta encontrará a mediatriz do item 2. no ponto O que afirmamos ser o centro do arco capaz do segmento $\overline{AB}$ (veja figura abaixo).

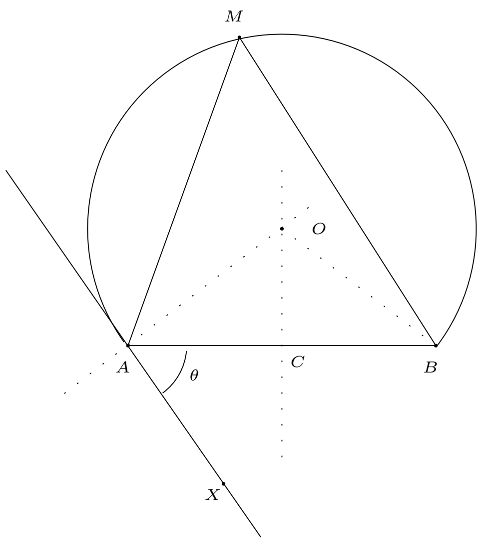


4. O arco capaz do ângulo θ associado ao segmento $\overline{AB}$ será o arco da circunferência de centro em O e raio $\overline{OA}$ situado no semi-plano oposto ao ponto X relativamente à reta que contém os pontos A e B (isto é, $\alpha = \theta$ - veja figura abaixo).



Mostremos que realmente $\alpha = \theta$, ou seja, o arco de circunferência obtido acima é o arco capaz do ângulo θ associado ao segmento $\overline{AB}$.

Para isto, observemos que os triângulos ΔAOC e ΔBCO são congruentes (caso LL L comum - veja figura abaixo).



Logo

$$\widehat{AOC} = \widehat{COB}, \quad \text{ou seja,} \quad \widehat{AOC} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} \overset{[\text{arco capaz}]}{=} \widehat{AMB} \tag{1.3}$$

Do triângulo ΔAOC temos que

$$\pi = \widehat{OCA} + \widehat{CAO} + \widehat{AOC} \overset{[\widehat{OCA}=\frac{\pi}{2}]}{=} \frac{\pi}{2} + \widehat{CAO} + \widehat{AOC},$$

isto é,

$$\widehat{AOC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{CAO}. \tag{1.4}$$

No ponto A temos que

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \widehat{CAO} + \widehat{XAC} \overset{[\widehat{XAC}=\theta]}{=} \frac{\pi}{2} + \widehat{CAO} + \theta, \quad \text{isto é,} \quad \frac{\pi}{2} - \widehat{CAO} = \theta. \tag{1.5}$$

Logo de (1.4) e (1.5) temos que $\widehat{AOC} = \theta$.

Portanto $\overbrace{\widehat{AMB}}^{=\alpha} \overset{(1.3)}{=} \widehat{AOC} = \theta$, ou seja, $\alpha = \theta$, ou ainda, $A\overset{\frown}{M}B$ arco capaz do ângulo θ sobre o segmente $\overline{AB}$, como queríamos demonstrar.

1.7 Divisão de um Segmento em Partes Iguais

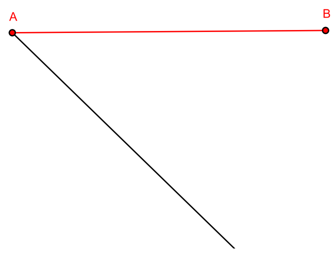
Sejam A, B dois pontos distintos.

Apresentaremos, a seguir, um método muito simples de dividir um segmento $\overline{AB}$ dado em $\underline{n}$ partes iguais, onde $n \in \mathbb{N}$.

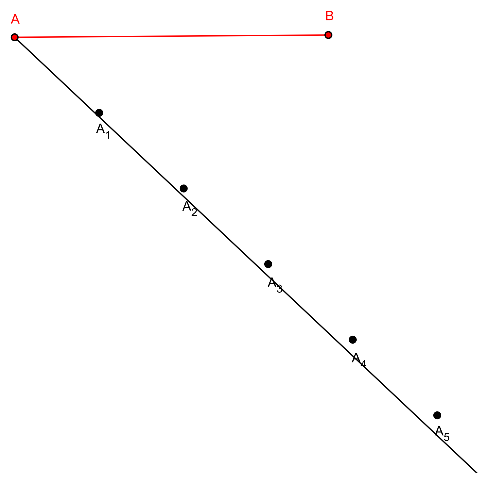
Para ilustrar, consideraremos o caso em que $n = 5$, ou seja, dividiremos o segmento $\overline{AB}$ em 5 segmentos justapostos onde todos estes têm mesmo comprimento.

Agimos da seguinte forma:

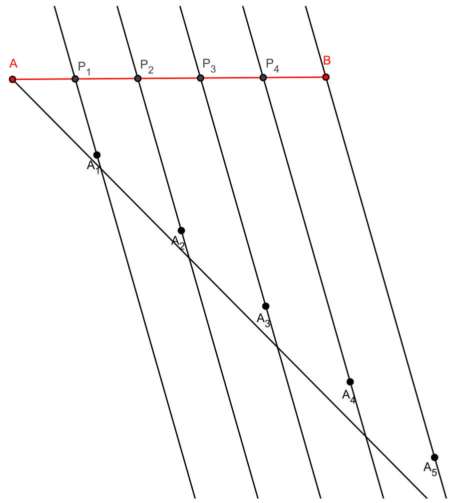
1. Tracemos uma semireta qualquer com extremo no ponto A, distinta da que contém o ponto B (veja figura abaixo);



2. Sobre esta semireta construímos, com uso do compasso, 5 segmentos justapostos, de mesmo comprimento, que denominaremos por: $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$ (veja figura abaixo);



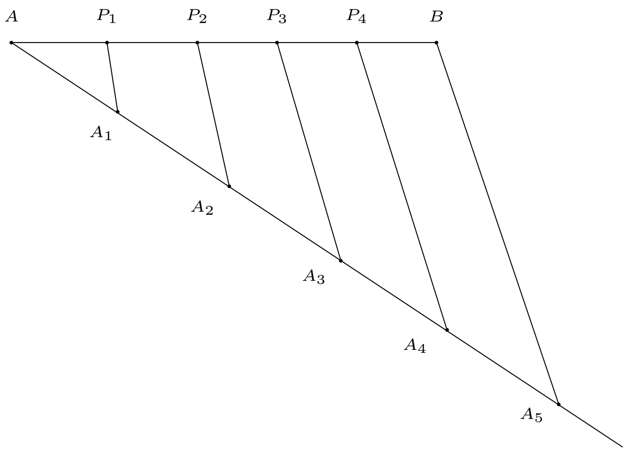
3. Tracemos as retas paralelas à reta que contém os pontos B e A_5 pelos pontos A_1, A_2, A_3 e A_4, que encontrarão o segmento de reta $\overline{AB}$ nos pontos P_1, P_2, P_3, P_4 (veja figura abaixo);



4. Afirmamos que os segmentos $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ e $\overline{P_4B}$ têm mesmo comprimento e assim dividem o segmento $\overline{AB}$ em 5 partes iguais.

Mostremos que isto realmente é verdade.

Para isto, observemos que os triângulos ΔAP_1A_1 e ΔAP_2A_2 são semelhantes, pois à reta que contém os pontos P_1 e A_1 é paralela à reta que contém os pontos P_2 e A_2 (caso AAA - veja figura abaixo).



Logo, pelo Teorema de Thales, temos que a razão entre os comprimentos de lados correspondentes dos triângulos acima deverão ser iguais, em particular, teremos:

$$\frac{AP_1}{AP_2} = \frac{AA_1}{AA_2} \overset{AA_2=2.AA_1}{=} \frac{AA_1}{2.AA_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow AP_2 = 2AP_1 \Rightarrow P_1P_2 = AP_2 - AP_1 = 2AP_1 - AP_1 = AP_1,$$

portanto

$$P_1P_2 = AP_1. \tag{1.6}$$

De modo semelhante, os triângulos ΔAP_1A_1 e ΔAP_3A_3 são semelhantes, pois à reta que contém os pontos P_1 e A_1 é paralela à reta que contém os pontos P_3 e A_3 (caso AAA).

Novamente, pelo Teorema de Thales, teremos que a razão entre o comprimento de lados correspondentes dos triângulos acima deverão ser iguais, em particular, teremos:

$$\frac{AP_1}{AP_3} = \frac{AA_1}{AA_3} \overset{AA_3=3.AA_1}{=} \frac{AA_1}{3.AA_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow AP_3 = 3.AP_1$$
$$\Rightarrow P_2P_3 = AP_3 - AP_1 - P_1P_2 \overset{(1.6)}{=} 3AP_1 - AP_1 - AP_1 = AP_1,$$

logo

$$P_2P_3 = AP_1$$

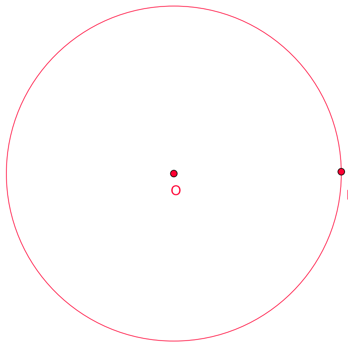
e assim por diante.

Com isto obtemos a divisão do semgento $\overline{AB}$ em 5 segmentos justapostos, sendo que todos estes têm o mesmo comprimento.

1.8 Traçado de Tangentes a uma Circunferência

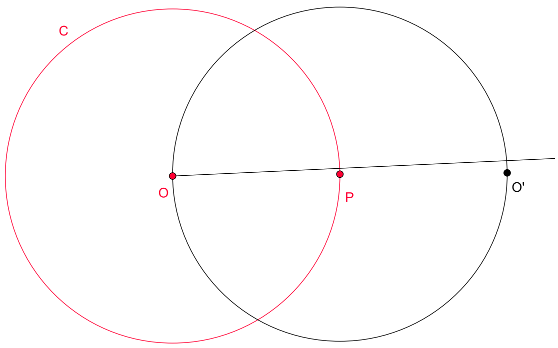
1.8.1 Reta tangente a uma circunferência por um ponto da mesma

A primeira situação que consideraremos é de encontrar, geometricamente, a reta tangente a uma circunferência $\mathcal{C}$, de centro em O, que contém um ponto P (distinto do ponto O - veja figura abaixo).

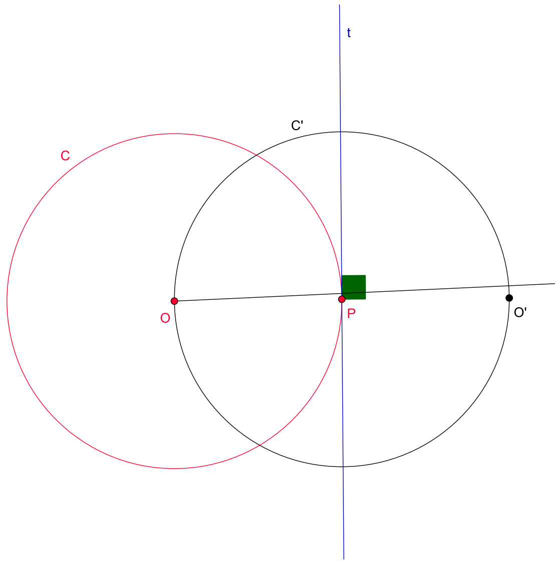


Para este fim agiremos da seguinte forma:

1. Tracemos uma circunferência $\mathcal{C}'$, de centro no ponto P e raio PO que encontrará a reta que contém os pontos O e P no ponto O', diferente do ponto O (veja figura abaixo);



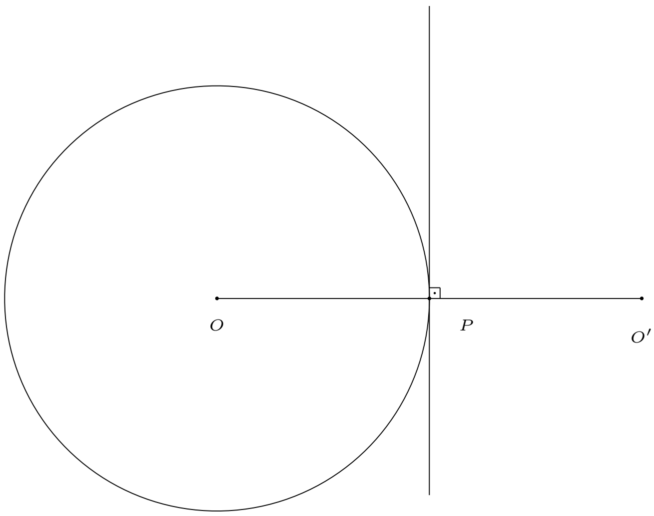
2. Tracemos a mediatriz do segmento $\overline{OO'}$ (que, por construção, tem o ponto P como seu ponto médio) (figura abaixo);



3. Afirmamos que a mediatriz obtida no item 2. é a reta tangente $\underline{t}$ a circunferência $\mathcal{C}$ pelo ponto P (figura abaixo).

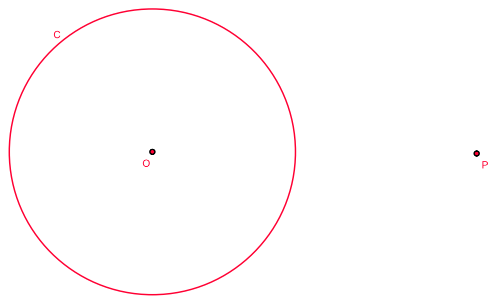
Mostremos que isto é realmente verdade.

Para isto, observemos que como a mediatriz obtida no item 2. acima é perpendicular ao segmento $\overline{OP}$ (e contém o ponto P) segue que ela deverá ser, necessariamente, a reta tangente à circunferência $\mathcal{C}$ que contém o ponto P (veja figura abaixo).



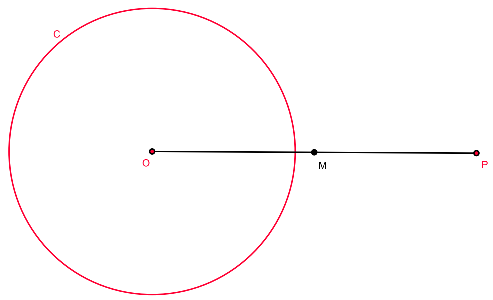
1.8.2 Reta tangente a uma circunferência por um ponto exterior a mesma

A segunda situação que consideraremos é de encontrar, geometricamente, a reta tangente a uma circunferência $\mathcal{C}$, de centro em O, que contenha um ponto P que está no exterior do círculo determinado pela circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo).



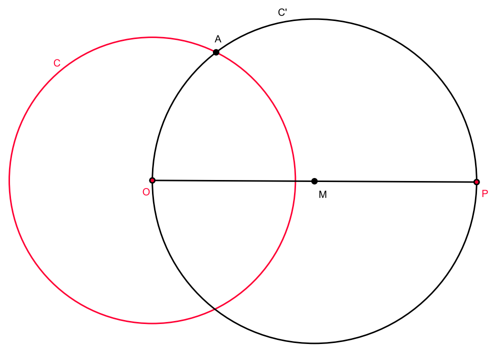
Para este fim agiremos da seguinte forma:

1. Por meio da construção da mediatriz do segmento $\overline{OP}$, encontremos o ponto médio, M, do segmento $\overline{OP}$ (figura abaixo);

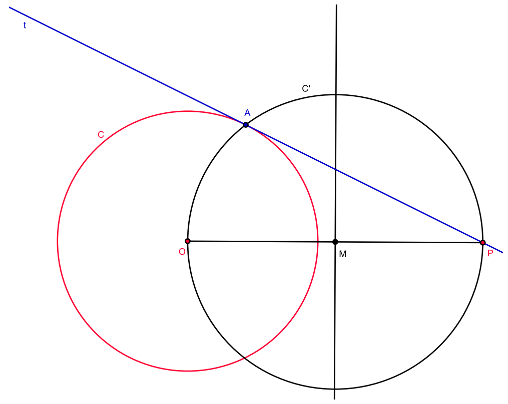


2. Tracemos a circunferência, $\mathcal{C}'$, de centro em M e raio MO (que é igual a MP).

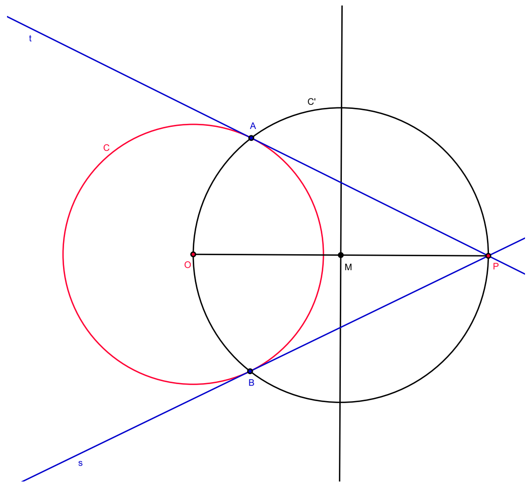
   Esta circunferência intercepta a circunferência inicial no ponto A (e um outro ponto B) (figura abaixo);



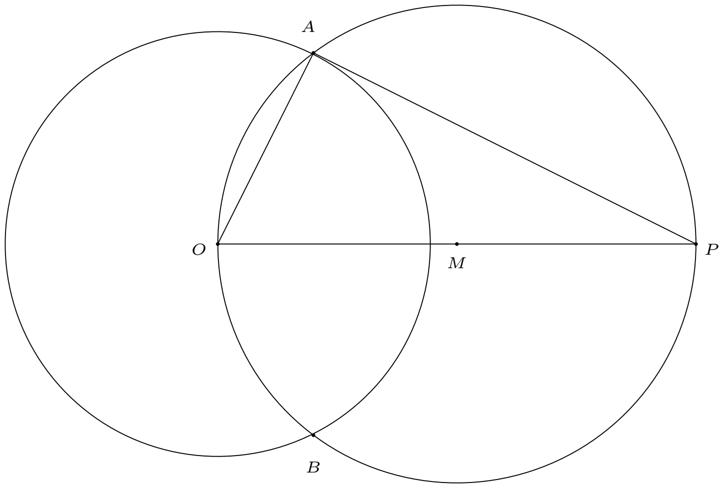
3. Afirmamos que a reta $\underline{t}$ que contém os pontos A e P é uma reta tangente a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto A (a outra reta tangente será a que contém o ponto P e o ponto B) (figuras abaixo).



Notemos que teremos uma outra reta tangente que será a que contém o ponto P e o ponto B (figura abaixo).



De fato, o ângulo $\widehat{OAP}$ é $\dfrac{\pi}{2}$, isto é, é reto pois ele é o ângulo do arco capaz associado ao segmento $\overline{PO}$ que é diâmetro da circunferência de centro em M e raio MP, logo o ângulo $\widehat{OMP} = \pi$ (figura abaixo).



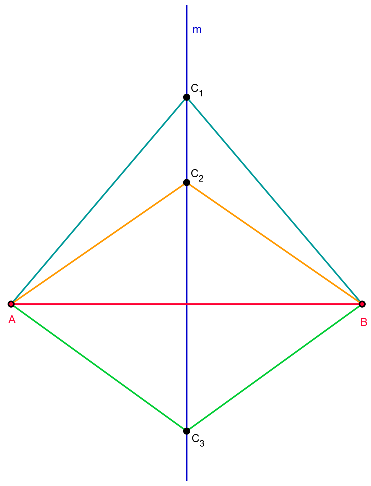
Portanto a reta que contém os pontos P e A é uma reta tangente à circunferência $\mathcal{C}$ no ponto A (pois o segmento $\overline{OA}$ que é raio da circunferência $\mathcal{C}$ é perpendicular o segmento $\overline{AP}$).

De modo semelhante obtemos que a reta que contém os pontos B e P também será uma reta tangente à circunferência $\mathcal{C}$ no ponto B.

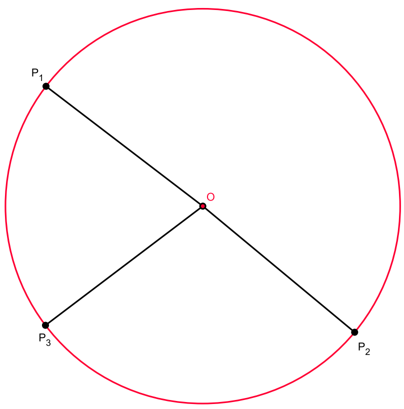
1.9 Exemplos

Lembremos que a expressão **lugar geométrico no plano** corresponde ao conjunto formado pelos pontosdo plano que satisfazem a uma determinada propriedade.

Por exemplo, a **mediatriz** é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de dois pontos distintos fixados (figura abaixo);



De modo semelhante a **circunferência** é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à uma distância fixada de um ponto fixado (figura abaixo).

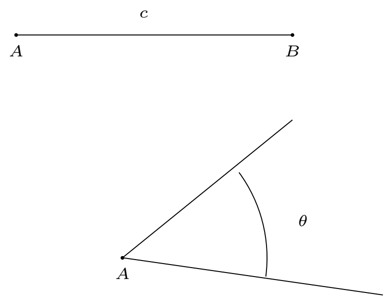


Ao dizermos que uma figura geométrica $\mathcal{F}$ é o lugar geométrico dos pontos que possuem uma determinada propriedade $\mathcal{P}$, queremos dizer que todos os pontos do conjunto $\mathcal{F}$ possuim a propriedade $\mathcal{P}$ e nenhum ponto fora do conjunto $\mathcal{F}$ tem a propriedade $\mathcal{P}$.

Por exemplo, nos dois exemplos acima, a mediatriz de um segmento e a circunferência de centro em um ponto e raio fixados, geometricamente, as figuras acima representam os únicos conjuntos dos pontos do plano geométrico que satisfazem as correspondentes propriedades que determinam a mediatriz de um segmento e a circunferência de centro em um ponto e raio fixados, respectivamente.

A seguir consideraremos alguns exemplos relacionados com a situação acima.

Exemplo 1.9.1 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento dos lados $AB = c$, $BC = a$ e o ângulo $\widehat{A} = \theta$ dados, geometricamente, como na figura abaixo.*

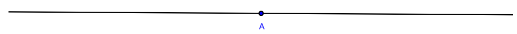


Resolução:

Temos várias possibilidade para a construção de um triângulo ΔABC com as três propriedades acima.

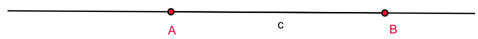
Vamos apresentar uma das possíveis construções:

1. Escolha uma reta e um ponto da mesma que chamaremos de A (figura abaixo);

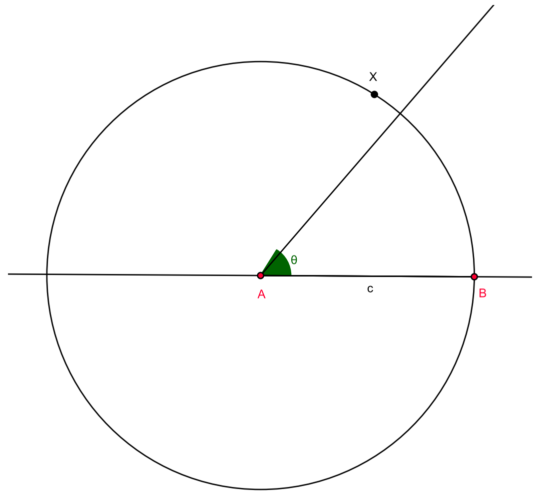


2. Traçando uma circunferência de centro em A e raio $AB = c$ obteremos o ponto B na intersecção desta circunferência com a reta.

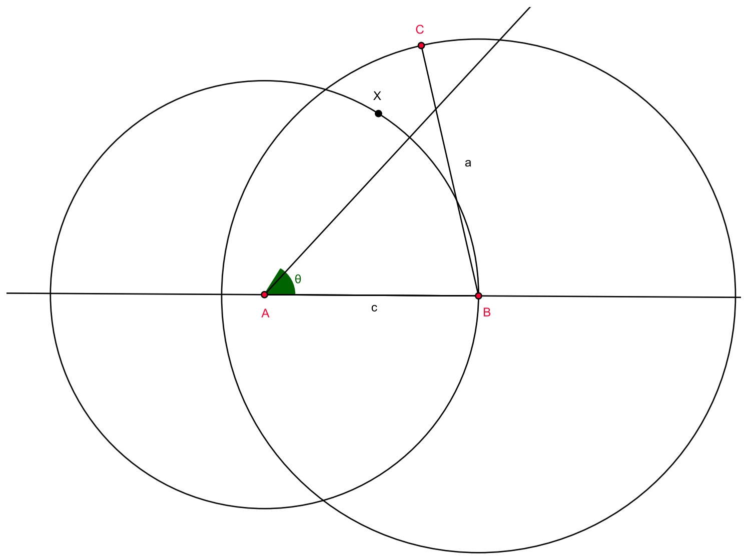
   Notemos que teremos um outro ponto com a mesma propriedade que dará origem a um outro triângulo congruente ao que iremos construir (figura abaixo).



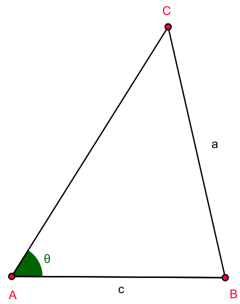
3. Encontremos um ponto X de tal modo que $\widehat{BAX} = \theta$ (transporte do ângulo $\widehat{A}$) (figura abaixo).



4. Tracemos a circunferência de centro em B e raio $BC = a$ que interceptará a semireta que contém o ponto A (como extremo) e o ponto X no ponto C (figura abaixo);



5. A, B e C são os vértices do triângulo procurado. (figura abaixo);



Na verdade há uma infinidade de triângulos que podem ser construídos com as três propriedades acima.

Deixaremos como exercício para o leitor a construção de outros casos.

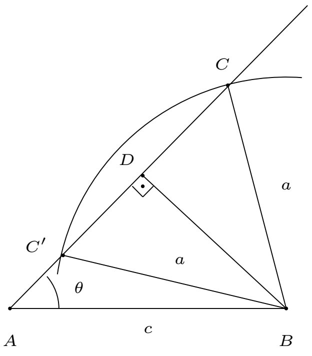
Observação 1.9.1

1. *Observemos que se fixarmos os lados do ângulo* $\widehat{A}$ *e* $c\,\mathrm{sen}(\theta) < \mathrm{a} < \mathrm{c}$ *então teremos apenas duas soluções para o nosso problema.*

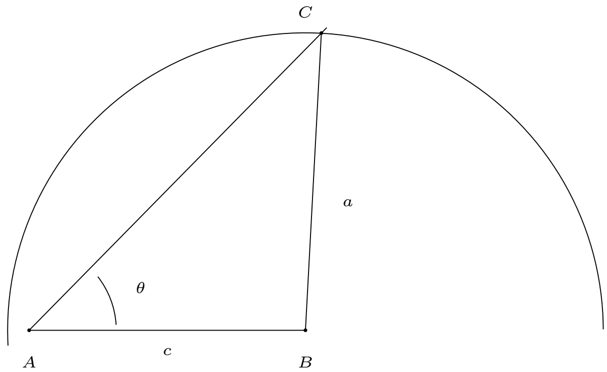
   De fato, o valor $c\,\mathrm{sen}(\theta)$ *deve ser o valor mínimo para o raio* $\underline{a}$*, para que a circunferência centrada em* B *com esse raio intercepte a reta que contém* A *e* X*, pois sabemos que*

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{c}}, \qquad \textit{logo} \qquad \mathrm{BD} = \mathrm{c}\ \mathrm{sen}(\theta).$$

Portanto, se $c\,\mathrm{sen}(\theta) < \mathrm{a} < \mathrm{c}$*, poderemos construir dois triângulos com as propriedades requeridas (na figura abaixo:* ΔABC *e* $\Delta ABC'$*).*



2. *Se* $a > c$ *então a solução será única, pois neste caso a circunferência centrada em* B *e raio* a *só interceptará a semireta que cotém o ponto* A *em um único ponto (figura abaixo: só teremos o triângulo* ΔABC *como solução para o problema).*



3. *A construção acima mostra porque as três propriedade (dados: ângulo* $\widehat{A}$*, lados* AB *e* BC*) acima* **não** *necessariamente implicam em congruência de triângulos já que os triângulos* ΔACB *e* $\Delta AC'B$ *do item 1. possuem as três propriedades e mas* **não** *são congruentes.*

4. *Acrescentando uma propriedade adicional às três acima poderemos ter um novo caso de congruência, a saber:*

   Se dois triângulos ΔABC *e* $\Delta A'B'C'$ *tem as seguintes propriedades:*

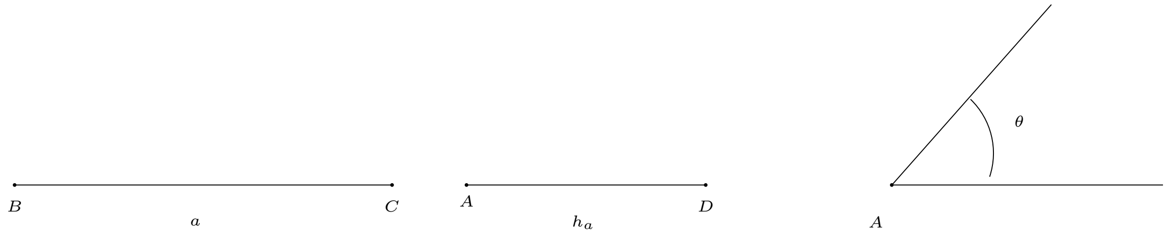
   $$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad AB = A'B', \quad BC = B'C' \quad \text{e} \quad BC > AB$$

   então os triângulos são, necessariamente, congruentes.

   Para provar isto basta notar que na Observação acima item 2. que a circunferência centrada no ponto B *e raio* $a = BC$ *só encontra a semireta em um único ponto, no caso o ponto* C*.*

   Logo só podemos construir um, e somente um, triângulo (ou seja, um único) com as propriedade requeridas se fixarmos o ângulo $\widehat{A}$ *e os comprimentos* $BC = a$ *e* $AB = c$*.*

Exemplo 1.9.2 *Construir um triângulo ΔABC sendo dados o lado $BC = a$, a altura h_a relativa a esse lado e o ângulo $\widehat{A} = \theta$.*



Resolução:

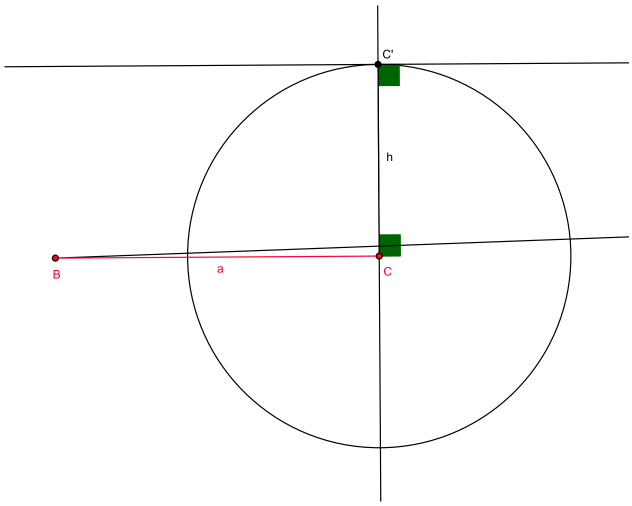
Vamos a uma possui construção:

1. Escolhamos uma semireta com extremo no ponto B e encontremos o ponto C sobre a mesma de tal modo que $BC = a$ (utilizando o compasso para transportar a medida do segmento $\overline{BC}$ - figura abaixo)).

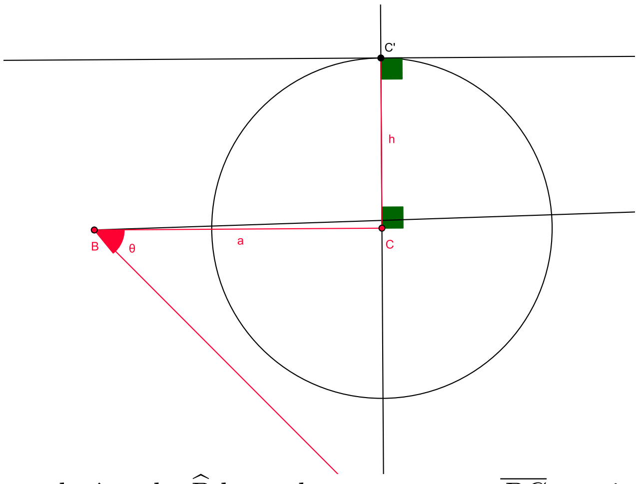
2. Encontremos uma reta paralela a semireta do item 1. que dista da mesma h_a.

   Podemos fazer isto construindo-se, por exemplo, a reta perpendicular $\underline{t}$ à semireta do item 1. pelo ponto C e, com ajuda do compasso, encontramos o ponto C' sobre essa perpendicular de tal modo que $CC' = h_a$ (na verdade existem dois pontos sobre a perpendicular que distam h_A do ponto C).

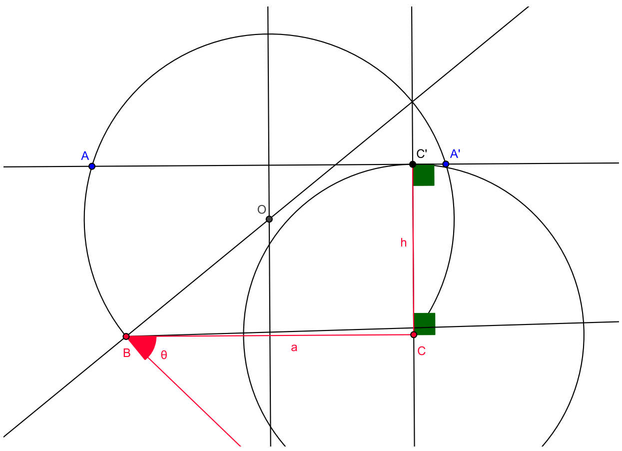
   Depois traçamos a reta perpendicular a reta $\underline{t}$ pelo ponto C' (figura abaixo).



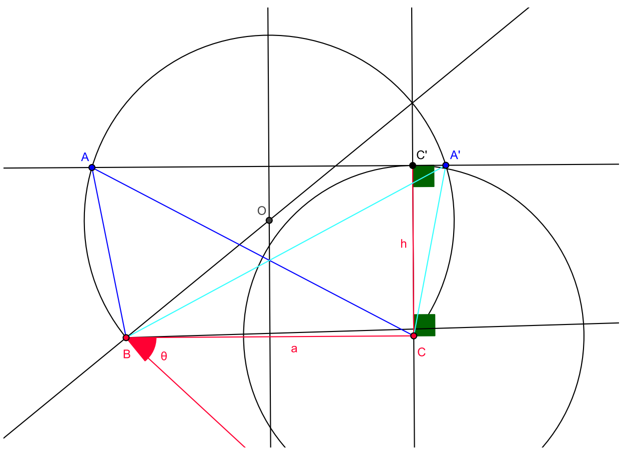
3. Transportemos o ângulo $\widehat{A}$ para o ângulo $\widehat{B}$ de tal modo que um lado do ângulo seja o segmento $\overline{BC}$ e o outro esteja contido no semiplano determinado pela reta que contém os pontos B e C e não contenha o ponto C' (figura abaixo).



4. Tracemos o arco capaz do ângulo $\widehat{B}$ baseado no segmento $\overline{BC}$ que interceptará a reta paralela do item 2. em A (e possivelmente em outro ponto A').



5. O triângulo ΔACB satisfaz as condições requeridas.



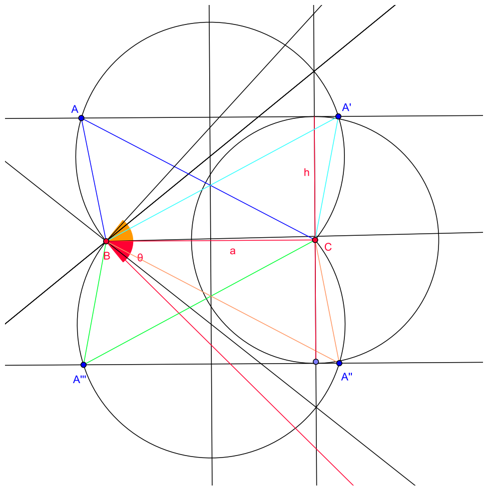
Observação 1.9.2

1. *No exemplo acima, fixado o lado* $\overline{BC}$ *e um dos semiplanos determinado pela reta que contém os pontos* B *e* C, *temos duas soluções possíveis, a saber os triângulos* ΔACB *e* $\Delta A'CB$ *(como na figura acima).*

   Vale observar que eles são congruentes (caso LAL*) (um é imagem do outro por uma reflexão em relação a mediatriz do segmento* $\overline{BC}$*).*

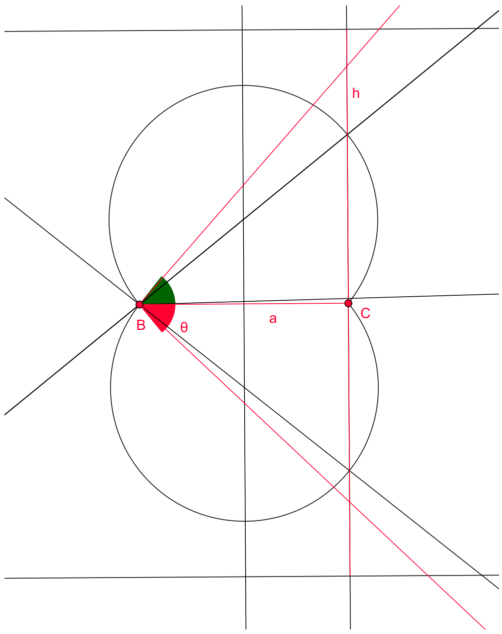
   Por abuso de notação, diremos que a solução é única (pois todas as soluções são congruentes duas a duas).

   Na verdade poderemos ter 4 soluções, todas congruentes duas a duas (na figura abaixo temos os triângulos ΔACB, $\Delta A'CB$, $\Delta A''CB$ *e* $\Delta A'''CB$*).*



2. *Dependendo das escolhas dos valores de* a, h_a *e* $\widehat{A}$ *podemos* **não** *ter necessariamente solução para o problema.*

   Por exemplo, se h_a *for muito grande a reta paralela a semireta que contém os pontos* B *e* C *que dista* h_a *da mesma não interceptará o arco capaz do ângulo* $\widehat{A}$ *associado ao segmento* $\overline{BC}$. *Nestes caso* **não** *existirá nenhum triângulo com as propriedades requeridas (figura abaixo).*



Exercício 1.9.1 **Valor: +0.5**

Mais precisamente, na situação acima se

$$h_a > \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\text{sen}\widehat{\text{A}}} + \frac{1}{\text{tg}\widehat{\text{A}}}\right)$$

não *existirá tal triângulo.*

Antes de exibirmos o próximo exemplo iremos estabelecer as seguintes notações:

Notação 1.9.1 *Consideremos o triângulo ΔABC, onde são dados:*

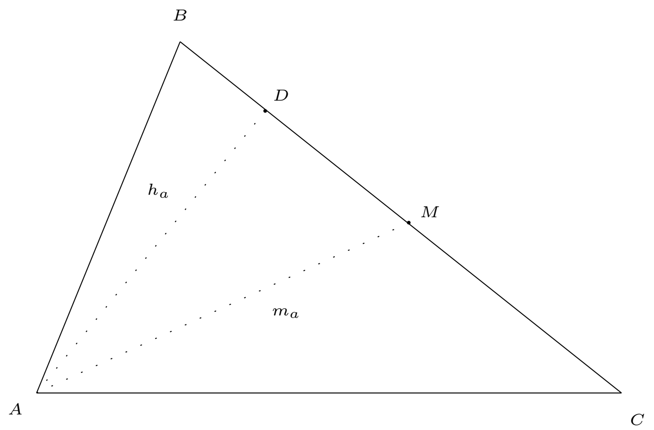
$$AB = c, \quad AC = b \quad e \quad BC = a.$$

Seja M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$.
A **mediana relativa ao lado $\overline{BC}$** *será o segmento de reta $\overline{AM}$.*
Denotaremos o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ por m_a (figura abaixo), isto é,

$$m_a \doteq AM.$$

Seja D o ponto de intersecção da reta perpendicular ao lado $\overline{BC}$ que contém o ponto A com o segmento $\overline{BC}$.
O segmento $\overline{AD}$ será denominado **altura do triângulo ΔABC relativamente ao lado $\overline{BC}$**.
Denotaremos por h_a o comprimento da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ (figura abaixo), isto é,

$$h_a \doteq AD.$$



De modo semelhante denotamos os comprimentos das medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ por

$$m_c \quad e \quad m_b,$$

respectivamente, e os comprimentos das alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ por

$$h_c \quad e \quad h_b,$$

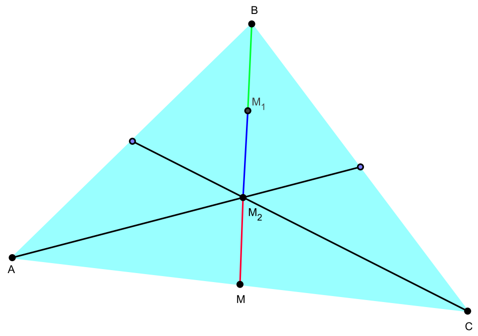
respectivamente.

Para o próximo exemplo precisaremos do

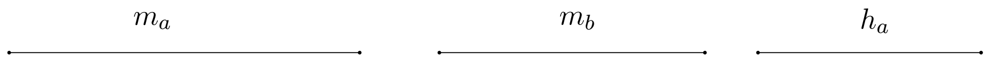
Exercício 1.9.2 **Valor: +0,5**

Mostre que num triângulo qualquer, as medianas interceptam-se em um mesmo ponto (denominado **baricentro***) e além disso, dividem cada uma delas na razão $2:1$, ou se, na figura abaixo:*

$$BM_1 = M_1M_2 = M_2M = \frac{1}{3}BM.$$

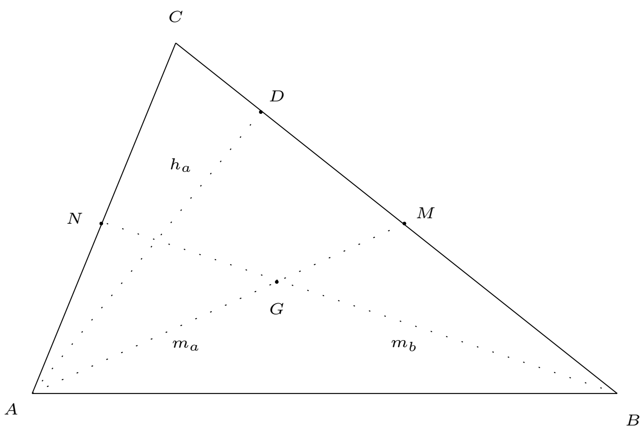


Exemplo 1.9.3 *Construir um triângulo ΔABC sendo dados os comprimentos das medianas, m_a, m_b e a medida da altura h_a.*



Resolução:

Para ajudar a entendermos o problema façamos uma ilustração dos elementos dados pelo problema na figura abaixo.



Do exercício acima temos num triângulo qualquer, as medianas cortam-se em um mesmo ponto e dividem cada uma delas na razão $2:1$.

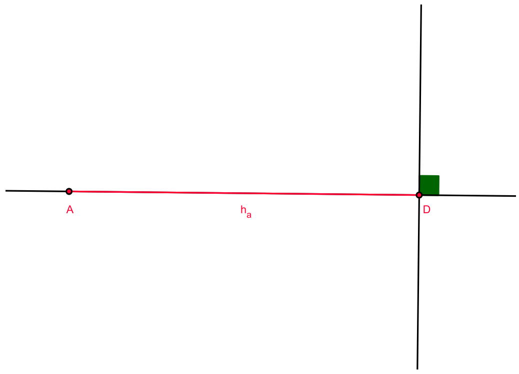
Como conhecemos $AM = m_a$ podemos determinar o ponto G (baricentro do triãngulo ΔACB) sobre o semgmento $\overline{AM}$, pois

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}m_a.$$

Para isto agiremos da seguinte forma:

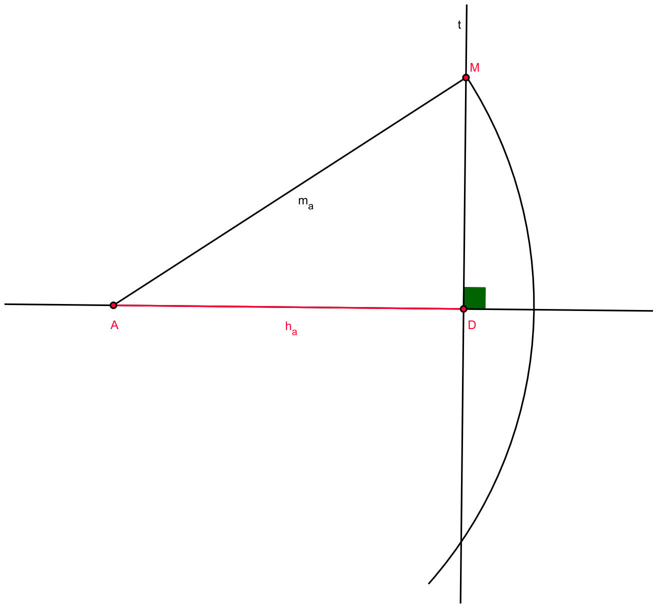
1. Escolhamos sobre uma reta o segmento $\overline{AD}$ tal que $AD = h_a$ (figura abaixo).

2. Tracemos a reta $\underline{t}$, perpendicular a reta que contém os pontos A e D pelo ponto D (figura abaixo).



Observemos que os vértices B e C deverão pertencer à reta t obtida acima (pois o triângulo deverá ter altura relativa ao lado $\overline{BC}$ igual a h_a).

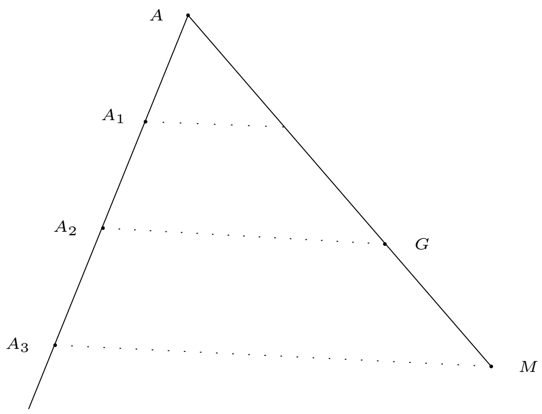
3. Como conhecemos $AM = m_a$, utilizando o compasso, podemos encontrar um ponto M sobre a reta $\underline{t}$ obtida no item 2. (este pode não ser único - figura abaixo).



4. Como $AM = m_a$ podemos determinar o ponto G (intersecção das medianas) sobre o segmento $\overline{AM}$, pois

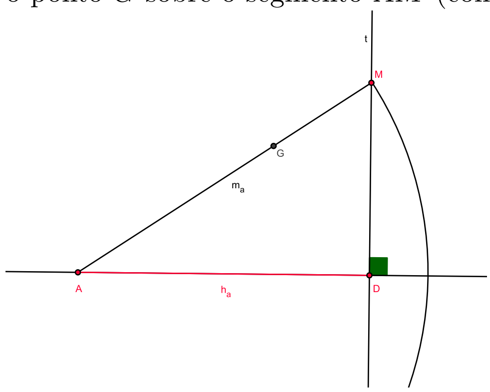
$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}m_a.$$

Para isto precisamos dividir o segmento $\overline{AM}$ em três partes iguais, ou seja, utilizaremos o processo desenvolvido na seção 1.2.



$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$

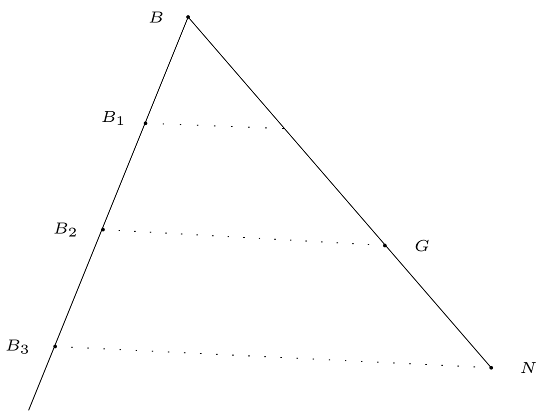
Deste modo encontramos o ponto G sobre o segmento $\overline{AM}$ (com o uso do compasso).



5. Sabemos que (ver figura do início da resolução)

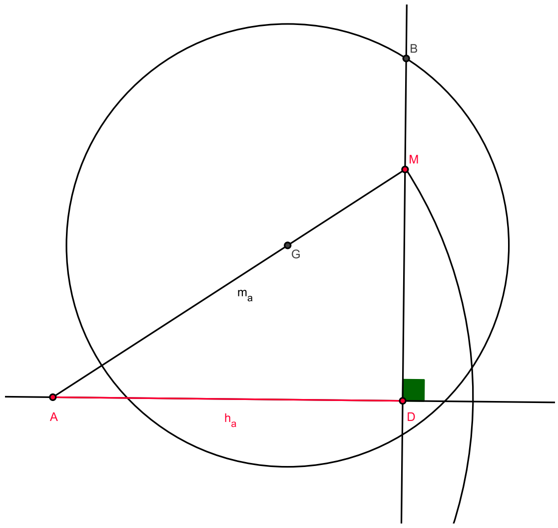
$$BG = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}m_b.$$

Por um processo análogo ao do item 4. podemos encontrar o comprimento BG (figura abaixo).

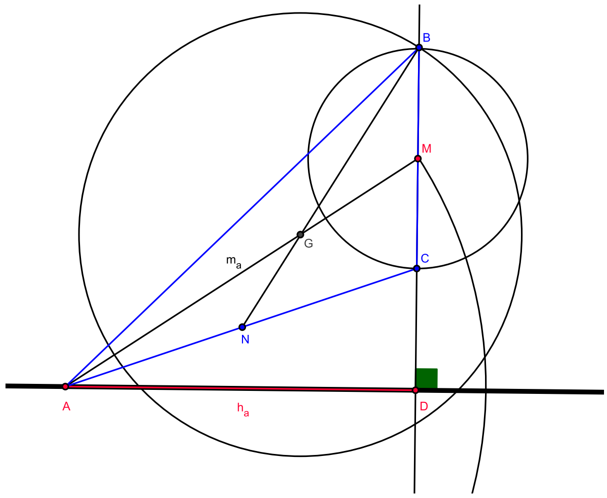


$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$

6. O vértice B é obtido da intersecção da reta que contém D e M (isto é, a reta $\underline{t}$) com a circunferência de centro em G e raio $GB = BG$ obtido no item 5. acima (podemos ter dois pontos de intersecção, escolhamos um deles - figura abaixo).



7. O vértice C está sobre a reta que contém os pontos D e M e é obtido usando-se o fato que $BM = MC$ (pois o ponto M deverá ser o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ - figura abaixo).



Observação 1.9.3 *Dá construção acima podemos observar que o triângulo obtido poderá* **não** *ser único.*

As relações entre os dados do exemplo que tornam a construção possível, e/ou única, pode ser um exercício interessante mas trabalhoso.

Exemplo 1.9.4 *Dados uma circunferência $\mathcal{C}$, de centro no ponto O e raio $r > 0$, um ponto P no exterior da circunferência e um segmento de comprimento* a *traçar pelo ponto P um reta que determine na circunferência uma corda de comprimento exatamente igual a* a.

Resolução:

Observemos que em uma dada circunferência todas as cordas de mesmo comprimento são tangentes a uma outra circunferência de mesmo centro que a primeira.

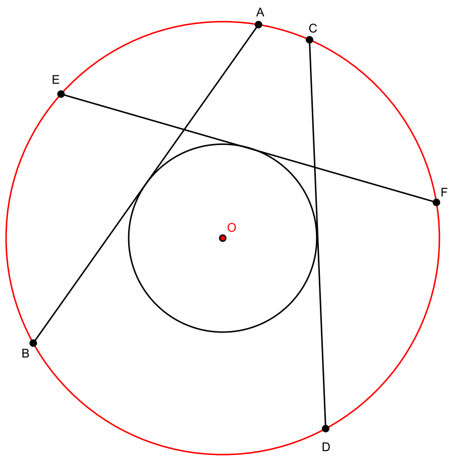
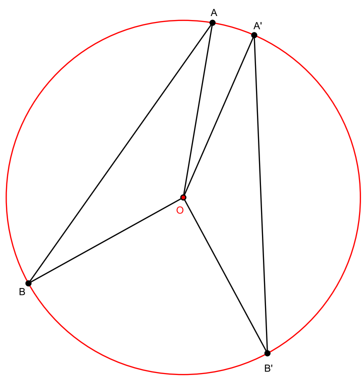
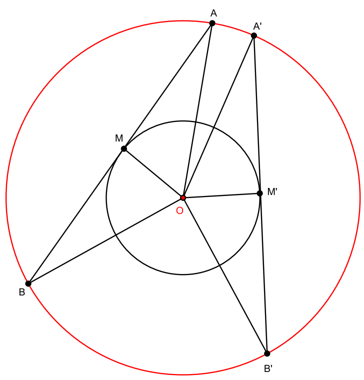


Figura 1.1: $AB = CD = EF$

De fato, para quaisquer cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ de mesmo comprimento na circunferência de centro no ponto O, os triângulos ΔAOB e $\Delta A'B'O$ são congruentes pois $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OA'}$ e $\overline{OB'}$ são raios, AB e $A'B'$ são os comprimentos das cordas (que estamos supondo serem iguais, assim termos o caso LLL de congruência).



Logo suas alturas relativas ao lado $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ terão mesmos comprimentos e se denotarmos "pé" destas alturas por M e M', respectivamente, então eles pertecerão a uma mesma circunferência de centro em O, mostrando a afirmação.



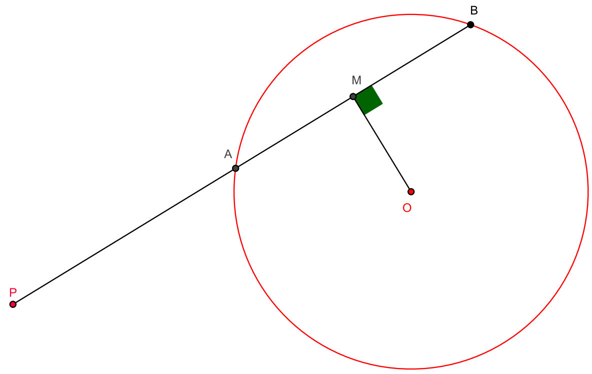
Observemos que neste caso os pontos$M$ e M' serão os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, respectivamente, pois os triângulos ΔAOM e ΔOBM são congruentes (eles têm dois lados de mesmo comprimento e dois ângulos iguais).

Notemos também que se a reta que contém os pontos P e B é tal que o segmento $\overline{AB}$ tem comprimento $\underline{a}$ e é secante a circunferência $\mathcal{C}$ e M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ então o segmento $\overline{OM}$ deverá ser perpendicular ao segmento $\overline{PB}$.

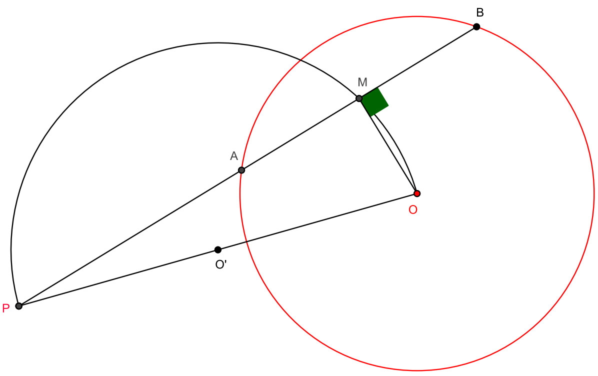
De fato, pois os triângulos ΔAMO e ΔOMB são congruentes (pelo caso LLL), assim

$$\widehat{AMO} = \widehat{OMB}, \quad \text{mas} \quad \widehat{AMO} + \widehat{OMB} = \pi,$$

implicando que $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{2}$.

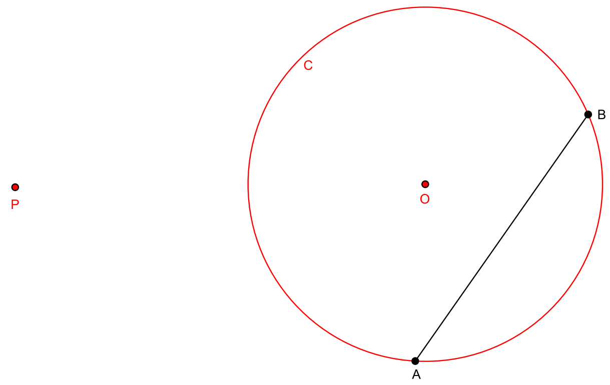


Assim o ponto M deverá pertencer ao arco capaz do ângulo $\dfrac{\pi}{2}$ associado ao segmento $\overline{PO}$, pois $\widehat{PMO} = \dfrac{\pi}{2}$, ou seja, deverá estar inscrito na semi-circunferência de diâmentro $\overline{PO}$.

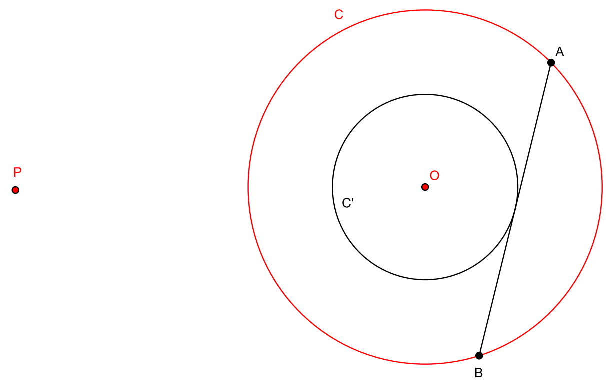


Podemos agora fazer a construção, como veremos a seguir:

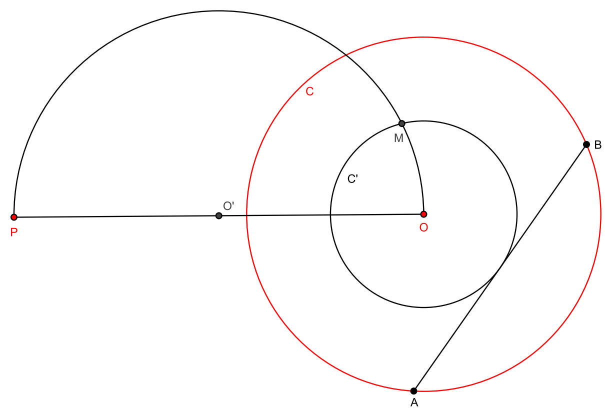
1. Traçamos na circunferência $\mathcal{C}$ uma corda $\overline{AB}$ qualquer de comprimento a (usamos o compasso para tanto - figura abaixo).



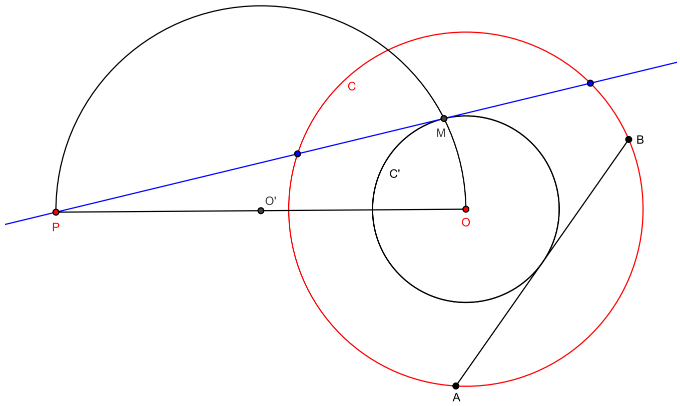
2. A seguir traçamos uma circunferência $\mathcal{C}'$ de centro em O tangente à corda $\overline{AB}$ do item 1. (figura abaixo).



3. Construímos a circunferência $\mathcal{C}''$ de diâmentro $\overline{PO}$ que interceptará a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto M (e em outro ponto - figura abaixo).

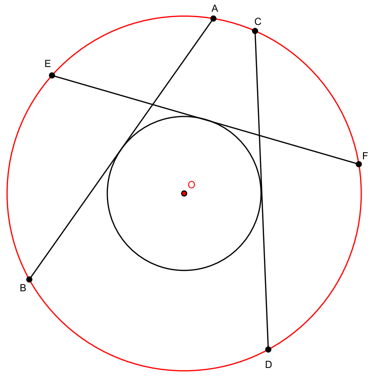


4. A reta que contém os pontos P e M é a reta procurada (figura abaixo).

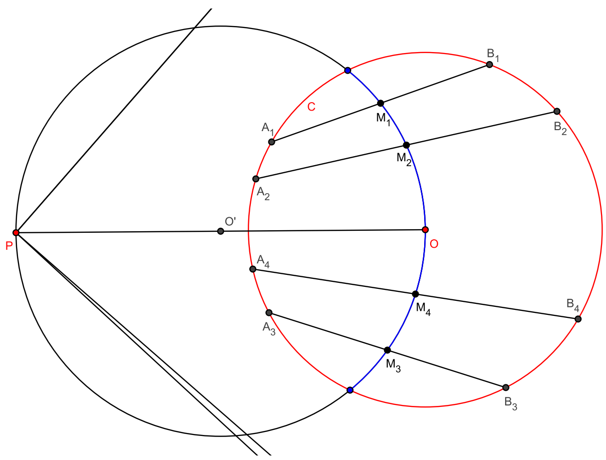


Observação 1.9.4 *Na resolução do exemplo acima descobrimos dois lugares geométricos interessantes, a saber:*

1. *O lugar geométrico das cordas de uma circunferência de centro no ponto O que possuem o mesmo comprimento são os segmentos de reta que tem extremos na circunferência dada e que são tangentes a uma circunferência de centro no ponto O e tangente a uma das cordas de comprimento igual ao comprimento dado (figura abaixo).*



2. *Na situação do exemplo acima, o lugar geométrico dos pontos médios das cordas da circunferência $\mathcal{C}$ cujas retas que as contém passam pelo ponto P estará contido na circunferência de centro no ponto O', ponto médio do segmento PO, e raio $\dfrac{PO}{2}$ (figura abaixo).*

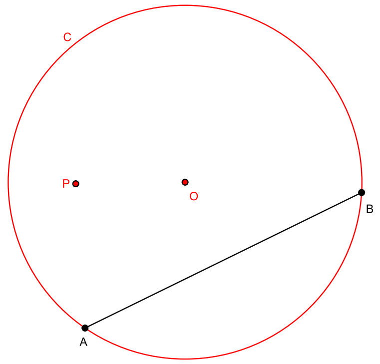


3. *O ponto P poderia ser dado no interior da crcunferência de centro em O.*

   A análise é semelhante a que tratamos acima e será deixada como exercício.

Exercício 1.9.3 **Valor: +0.5**

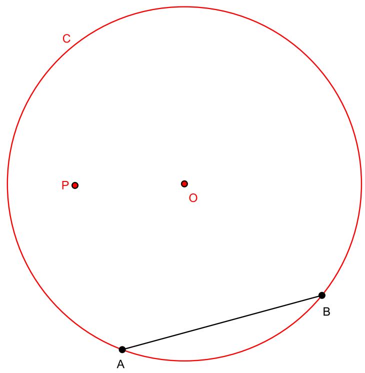
Faça o mesmo estudo que fizemos acima para o caso em que o ponto P está no interior da circunferência $\mathcal{C}$.



Observação 1.9.5 *Vale observar que o comprimento da corda $\overline{AB}$ não pode ser qualquer.*

Mais precisamente, a distância da corda $\overline{AB}$ até o centro O da circunferência $\mathcal{C}$ não pode ser maior que a distância do ponto P ao ponto O.

Por exemplo, na figura abaixo, não existe nenhuma corda da circunferência $\mathcal{C}$ que tenha comprimento AB cuja reta que a contenha passe pelo ponto P (tente fazer a construção para este caso e verifique que não é possível!)

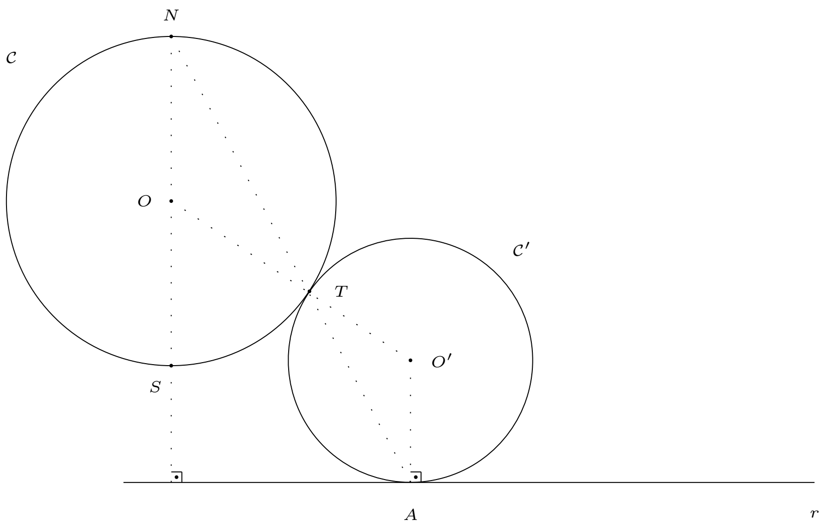


Exemplo 1.9.5 *Dados uma circunferência $\mathcal{C}$, uma reta $\underline{r}$ e um ponto A sobre a reta $\underline{r}$ construir uma circunferência $\mathcal{C}'$, tangente, exteriormente, a circunferência C e tangente a reta $\underline{r}$ no ponto A.*

Resolução:

Suponhamos que o problema está resolvido, ou seja, tenhamos obtido a figura abaixo.

Sejam $\mathcal{C}'$ a circunferência procurada, de centro em O', e T o ponto de tangência das circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$.

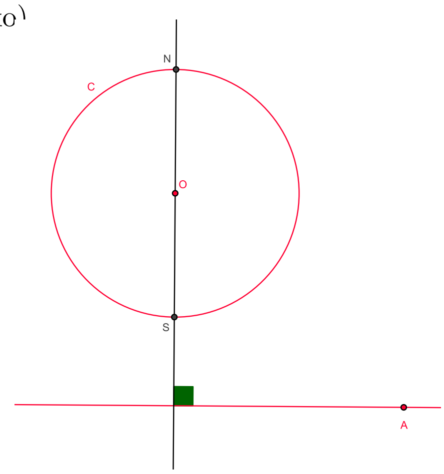


Sabemos que o segmento OO' contém o ponto T (pois as circunferências são tangentes no ponto T).

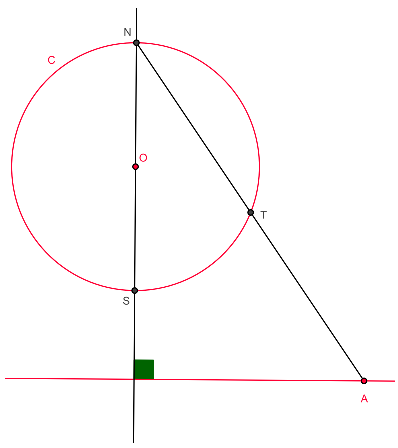
Além disso, o segmento $O'A$ é perpendicular a reta $\underline{r}$, pois a circunferência $\mathcal{C}'$ é tangente a reta $\underline{r}$ no ponto A.

Baseado nesses fatos agiremos da seguinte forma:

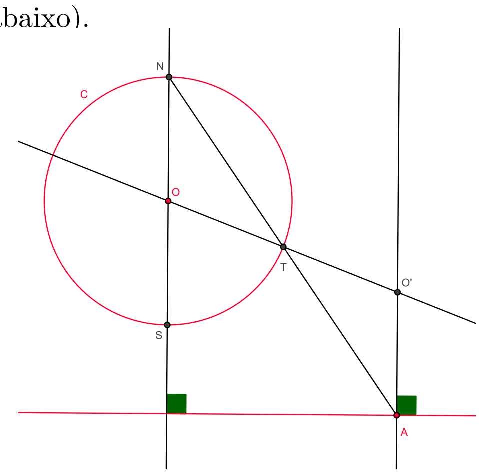
1. Tracemos pelo ponto O a reta perpendicular a reta $\underline{r}$, que interceptará a circunferência $\mathcal{C}$ nos pontos N e S (figura abaixo).



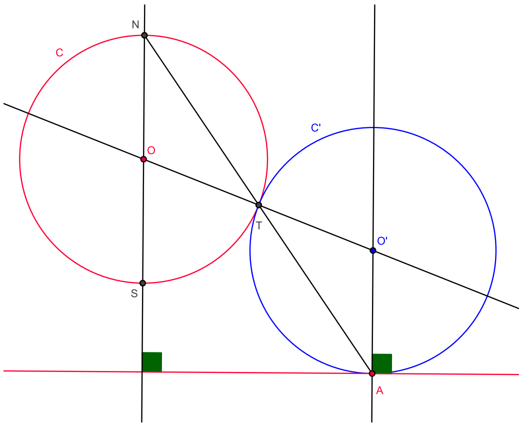
2. Tracemos o segmento $\overline{AN}$ que interceptará a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto T (figura abaixo).



3. Tracemos a perpendicular a reta $\underline{r}$ pelo ponto A que encontrará a reta que contém os pontos O e T no ponto O' (figura abaixo).

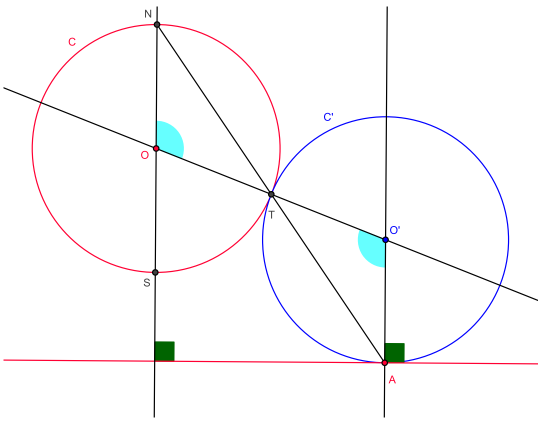


Afirmamos que a circunferência procurada tem centro em O' e raio $O'A = O'T$ (figura abaixo).

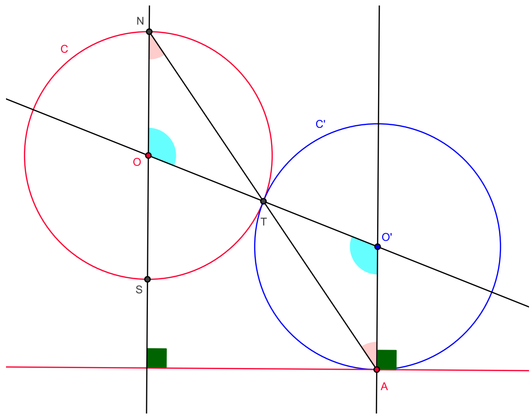


Para provar isto observemos que:

i. Os ângulos $\widehat{TON}$ e $\widehat{TO'A}$ são iguais pois são ângulos alternos internos das retas paralelas que contém os pontos N, O e os pontos O', A, respectivamente (figura abaixo).



ii. De modo análogo, os ângulos $\widehat{ONT}$ e $\widehat{O'AT}$ são iguais pois também são alternos internos das retas paralelas que contém os pontos N, O e os pontos O', A, respectivamente.



iii. Logo, pelo caso AAA, segue os triângulos ΔNTO e $\Delta TO'A$ são semelhantes.

iv. Da semelhança acima, segue que

$$\frac{O'T}{O'A} = \frac{OT}{ON} \stackrel{[OT=ON]}{=} 1, \quad \text{isto é,} \quad O'T = O'A.$$

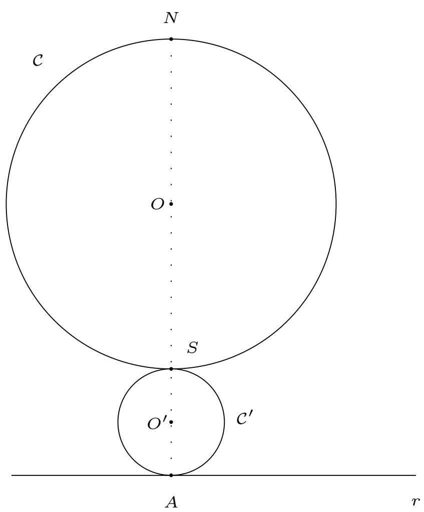
Assim T e A estão sobre a circunferência de centro em O' e raio $O'T = O'A$.

v. Além disso a circunferência $\mathcal{C}'$, de centro em O' e raio $O'T$, será tangente à reta r, pois o segmento $O'A$ é perpendicular a reta $\underline{r}$ no ponto A, e também será tangente a circunferência $\mathcal{C}$, pois o ponto T, ponto de intersecção das circunferências, está sobre o segmento que une os centros, O e O', das circunferências o que implicará que elas são tangentes, completando a demonstração da afirmação.

Observação 1.9.6

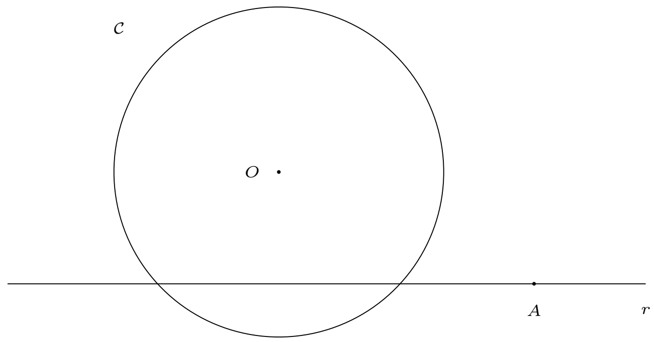
1. *Vale observar que na situação acima, ou seja, se $\underline{r}$ não intercepta a circunferência $\mathcal{C}$, o problema terá sempre solução para qualquer ponto A escolhido sobre a reta r.*

   De fato, se o ponto A for, por exemplo, o "pé" da reta perpendicular à reta $\underline{r}$ pelos pontos N e O então o ponto O' será o ponto médio do segmento $\overline{SA}$ (figura abaixo).



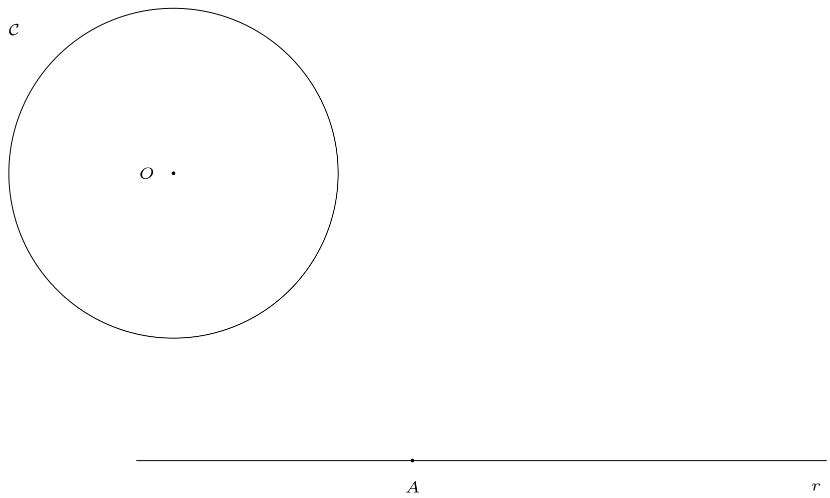
Em qualquer outra posição que se encontre o ponto A sobre a reta $\underline{r}$ a construção será a que apresentamos anteriormente.

2. *Se a reta $\underline{r}$ for secante à circunferência $\mathcal{C}$ e o ponto A for exterior a circunferência $\mathcal{C}$ teremos quatro possíveis soluções (figura abaixo).*



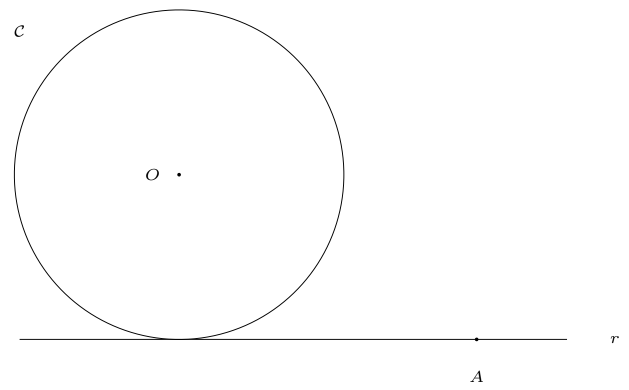
Isto será deixado como exercício (a seguir) para o leitor.

3. *O item 2. nos sugere um outro problema: construir uma circunferência $\mathcal{C}''$ que seja tangente, interiormente à circunferência $\mathcal{C}$, ou seja, $\mathcal{C}$ esteja contida no interior de $\mathcal{C}''$, e também tangente à reta r no ponto A (figura abaixo).*



A resolução será deixada como exercício (a seguir) para o leitor.

4. *Uma última possibilidade seria a circunferência $\mathcal{C}$ ser tangente a reta r (figura abaixo).*



A situação é semelhante aos casos anteriores e sua análise será deixada como exercício (a seguir) para o leitor.

Exercício 1.9.4 **Valor: +0.5**

Fazer as construções do item 2. da observação acima.

Exercício 1.9.5 **Valor: +0.5**

Fazer as construções do item 3. da observação acima.
Sugestão: considere o ponto S no lugar do ponto N na construção feita anteriormente.

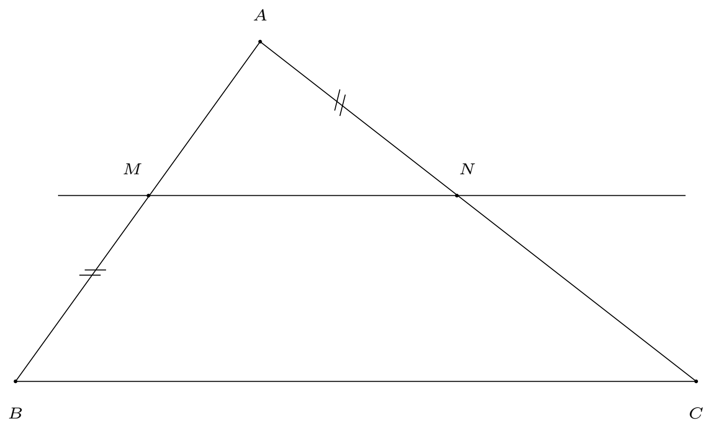
Exercício 1.9.6 **Valor: +0.5**

Fazer as construções do item 4. da observação acima.

Exemplo 1.9.6 *Dado um triângulo ΔABC, traçar uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ que deverá interceptar o lado $\overline{AB}$ num ponto M e o o lado $\overline{AC}$ num ponto N de forma que $AN = MB$.*

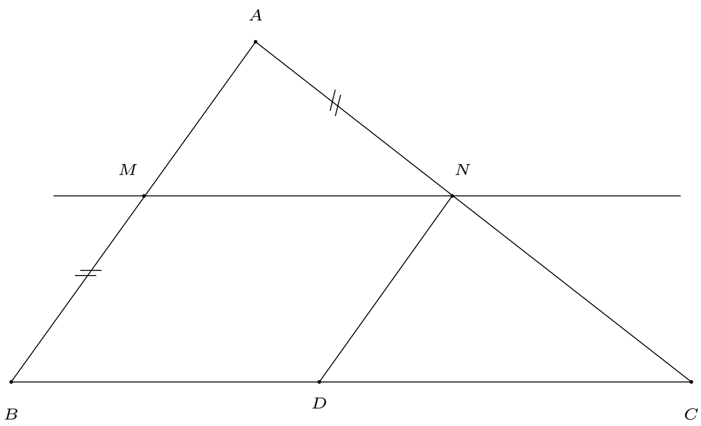
Resolução:

A situação que se apresenta é ilustrada na figura abaixo (onde a reta que contém os pontos M,N é paralela a reta que contém os pontos B, C):



Supondo que já tenhamos feito a construção.

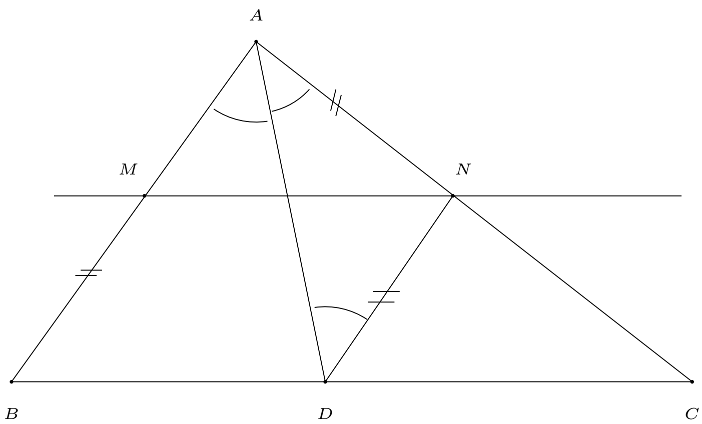
1. Encontremos o ponto D de tal modo que a reta que contém os pontos N, D seja paralela a reta que contém os pontos M, B (figura abaixo);



2. O quadrilátero $MNDB$ é um paralelogramo, pois os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{BD}$ e o segmentos $\overline{BM}$, $\overline{DN}$ são paralelos, respectivamente.

   Logo $AN = ND$, pois $ND = MB$ e, por hipótese, $AN = MB$ (figura acima).

3. Logo o triângulo ΔAND é isósceles, pois $NA = ND$, e assim $\widehat{NDA} = \widehat{DAN}$ (figura abaixo);

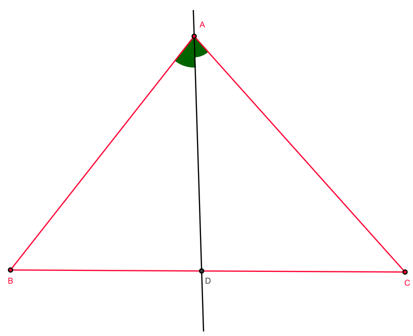


4. Como as retas que contém os pontos N, D e os pontos A e B são paralelas temos que $\widehat{NDA} = \widehat{BAD}$ (pois são ângulos alternos internos relativos à reta que contém os pontos A, D).

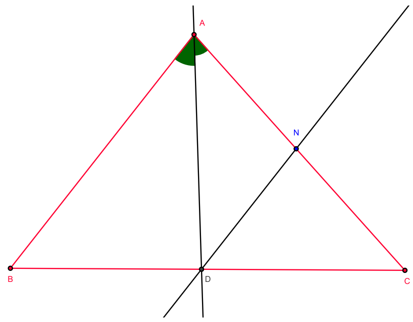
   Logo segue que a reta que contém os pontos A, D é bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$.

Com isto podemos estamos prontos para fazer a construção, como veremos seguir:

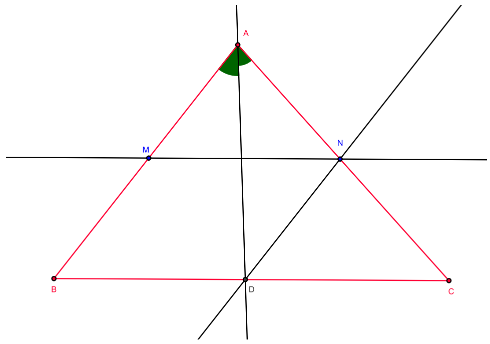
i. Tracemos a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$ que intercepta o lado $\overline{BC}$ no ponto D (figura abaixo);



ii. Tracemos a reta paralela à reta que contém os pontos A, B pelo ponto D que intercepta o lado $\overline{AC}$ no ponto N (figura abaixo);



iii. Traçando a reta paralela à reta que contém os pontos B, C pelo ponto N obtemos o ponto M na intersecção da mesma com o lado $\overline{AB}$, terminando a construção (figura abaixo).



Observemos que, os pontos M e N encontrados acima satisfazem as propriedades requeridas no exemplo.

De fato, pois como a reta que contém os pontos A e D é a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$ então $\widehat{NAD} = \widehat{MAD}$.

Além disso a reta que contém os pontos N e D é paralela à reta que contém os pontos M e A segue que $\widehat{NDA} = \widehat{MAD} \overset{(*)}{=} \widehat{NAD}$, ou seja, o triângulo ΔAND é um triângulo isóceles.

Em particular, $AN = ND$.

Como os segmentos $\overline{BM}$, $\overline{DN}$ são paralelos e os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{BD}$ também são paralelos segue que $BMND$ é um paralelogramo logo

$$MB = DN = AN,$$

como pedido no exemplo.

$\boxed{\textbf{17.08.2011 - 5.a e 6.a}}$

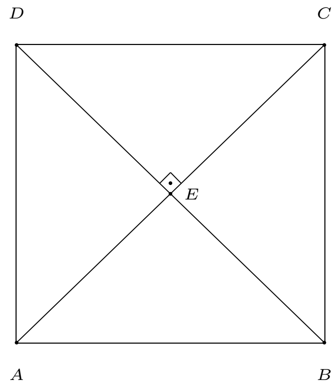
A seguir exibiremos a resolução de vários exercícios utilizando as técnicas desenvolvidas neste capíulo.

1.10 Exercícios

Exercício 1.10.1 *Construir um quadrado $\square ABCD$ conhecendo-se o comprimento de sua diagonal $\overline{AC}$.*

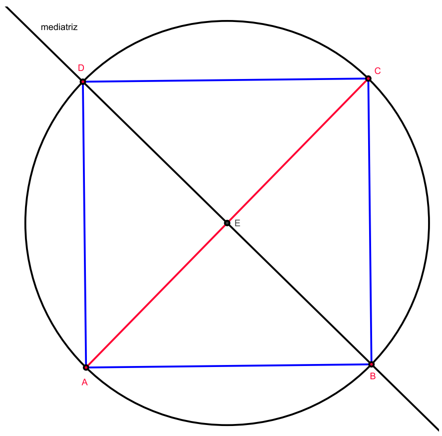
Resolução:

Observemos a figura abaixo:



Sabemos que as digonais de um quadrado interceptam-se perpendicularmente nos seus pontos médios (pois é um caso particular de losango).

Logo, se E é o ponto médio do segmento $\overline{AC}$ então os outros dois vértices, B e D, estarão na intersecção da circunferência de centro no ponto E e raio $AE = EC$ com a reta mediatriz do segmento $\overline{AC}$ (que tem E como intersecção com a reta que contém os pontos A e C - figura acima).



Mostremos que isto é realmente verdade.

Para isto observemos que o triângulo ΔAED será isóceles, pois $EA = ED$, assim

$$\widehat{EAD} = \widehat{ADE}. \tag{1.7}$$

Mas, no triângulo ΔAED temos

$$\pi = \widehat{DEA} + \widehat{EAD} + \widehat{ADE} \overset{[\widehat{DEA}=\frac{\pi}{2}]}{=} \frac{\pi}{2} + \widehat{EAD} + \widehat{ADE} \overset{(1.7)}{=} \frac{\pi}{2} + 2\,\widehat{EAD}.$$

ou seja,

$$\widehat{EAD} = \widehat{ADE} = \frac{\pi}{4}.$$

Utilizando-se o mesmo raciocínio para o triângulo ΔAEB segue que

$$\widehat{BAE} = \widehat{EBA} = \frac{\pi}{4}.$$

Portanto

$$\widehat{BAD} = \widehat{EAD} + \widehat{BAE} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

De modo análogo (utilizando-se os triângulos ΔAEB, ΔBEC e ΔCED) podemos mostrar que (será deixado como exercício para o leitor)

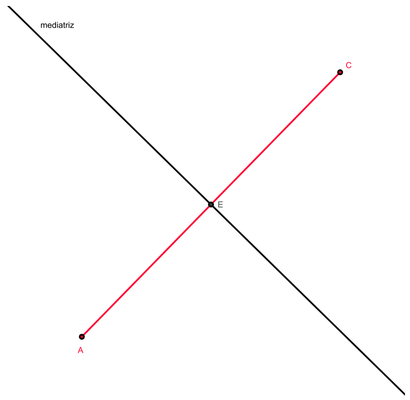
$$\widehat{CBA} = \widehat{DCB} = \widehat{ADC} = \frac{\pi}{2},$$

isto é, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

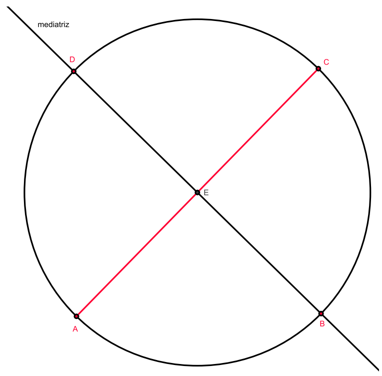
Além disso, os triângulos , ΔAEB, ΔBEC e ΔCED são triângulos congruentes (caso LAL) mostrando com isto que o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado.

Vamos obtê-lo geometricamente.

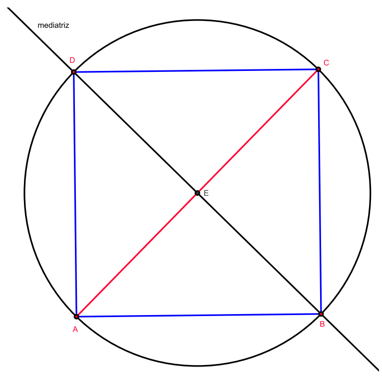
1. Encontremos a mediatriz do segmento $\overline{AC}$ que intercepta o segmento $\overline{AC}$ no ponto E (seu ponto médio - figura abaixo);



2. Tracemos a circunferência centrada no ponto E de raio $\overline{DA}$ que encontra a mediatriz obtida no item 1. nos pontos B e D (figura abaixo);



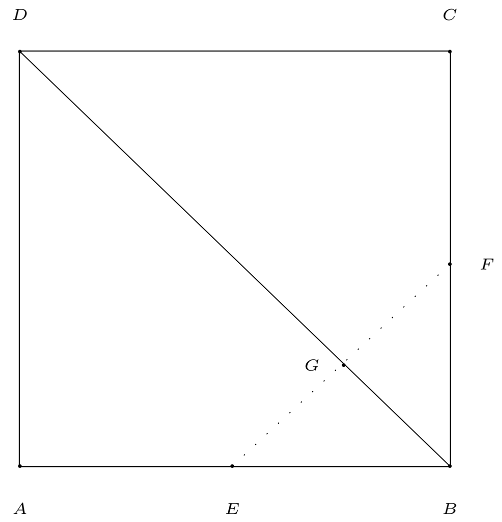
3. Os pontos A, B, C e D formam um quadrado cuja diagonal é o segmento $\overline{AC}$ dado (figura abaixo).



Exercício 1.10.2 *Construir um quadrado conhecendo-se os pontos médios de dois lados adjacentes.*

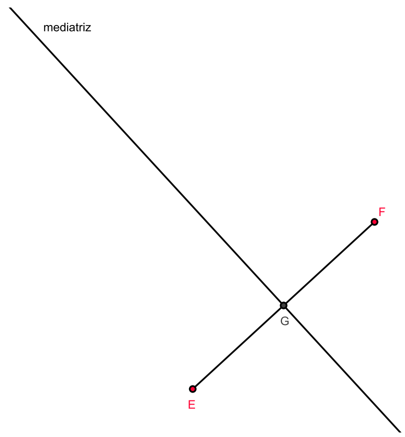
Resolução:

Para ilustrar o problema consideremos a figura abaixo:



Suponhamos que sejam dados os pontos médios, E e F, dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

1. Começaremos traçando a mediatriz do segmento $\overline{EF}$ (figura abaixo);



Observemos que os vértices B e D do quadrado $\square ABCD$ estão sobre esta mediatriz.

De fato, se G é o ponto de intersecção do segmento de reta $\overline{BD}$ com o segmento de reta $\overline{EF}$ então os triângulos ΔBEG e ΔFBG são congruentes (caso LLL, pois, por hipótese temos $EB = FB$, $\overline{GB}$ é um lado comum aos dois triângulos e G é ponto médio do segmento $\overline{EF}$).

Em particular,

$$\widehat{EGB} = \widehat{BGF} \tag{1.8}$$

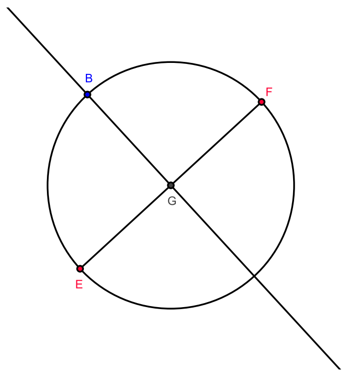
e no vértice G temos

$$\widehat{EGB} + \widehat{BGF} = \pi, \quad \text{assim, (1.8) implicará} \quad \widehat{EGB} = \widehat{BGF} = \frac{\pi}{2}$$

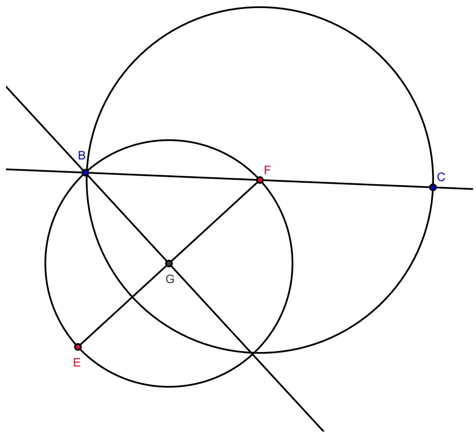
mostrando que o segmento de reta $\overline{BD}$ é perpendicular ao segmento $\overline{EF}$, ou seja, deverá estar contido na mediatriz do segmento $\overline{EF}$.

2. A semi-circunferência de centro em G e raio $\overline{EG} = \overline{GF}$ interceptará a mediatriz do item 1. no ponto B (na verdade encontra em outro ponto que não será usado - figura abaixo);

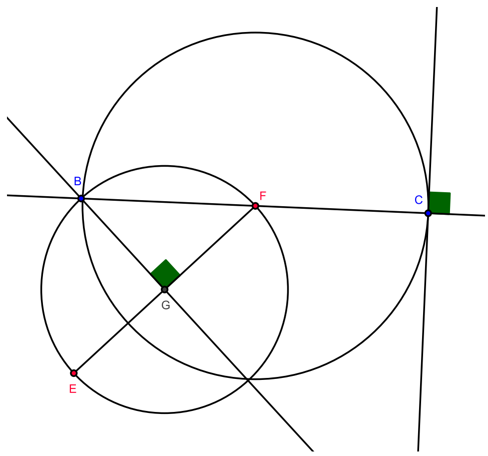
   O ponto B é um dos vértices do quadrado $\square ABCD$ (o ângulo $\widehat{EBF} = \dfrac{\pi}{2}$ pois o triângulo ΔEBF está inscrito na semi-circunferência de centro em G e diâmetro $\overline{EF}$).



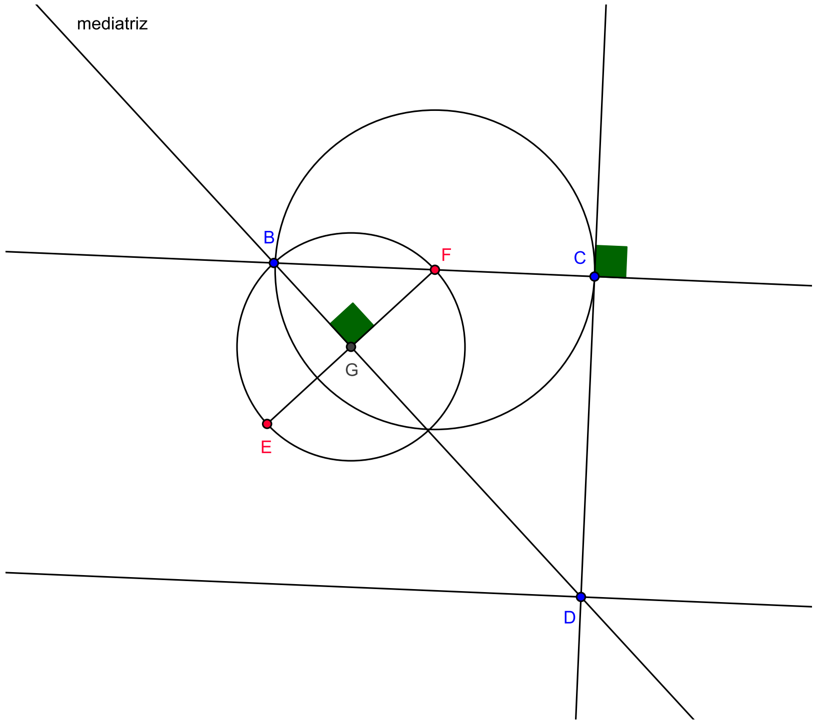
3. A circunferência centrada em F e raio BF encontrará a reta que contém os pontos F e B no ponto C (e no ponto B) que será o outro vértice do quadrado $\square ABCD$ (figura abaixo);



4. Pelo ponto C tracemos a reta perpendicular a reta que contém o segmento $\overline{BC}$ (figura abaixo);

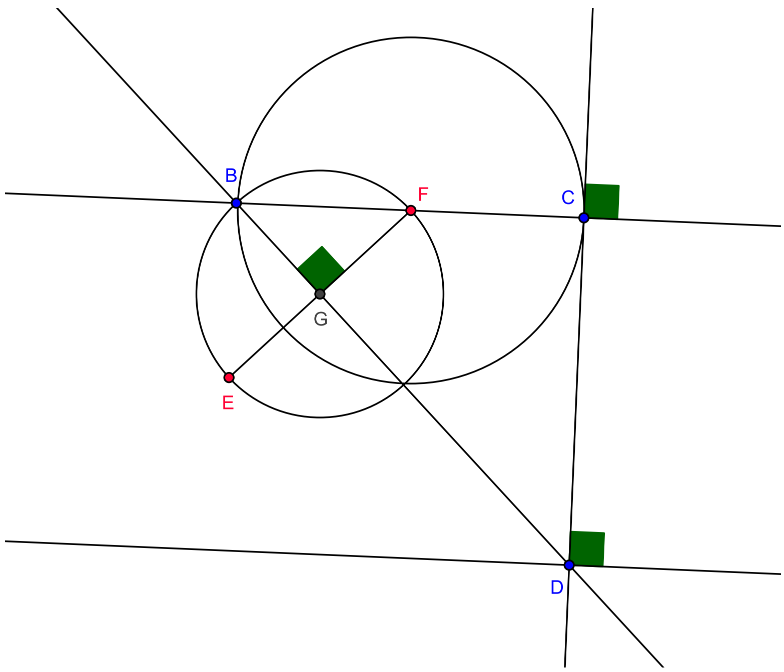


5. A mediatriz do segmento $\overline{EF}$ encontrará a reta perpendicular obtida no item 4. no ponto D que está no mesmo semi-plano determinado pela reta que passa pelos pontos B e C e contém o ponto E (figura abaixo);

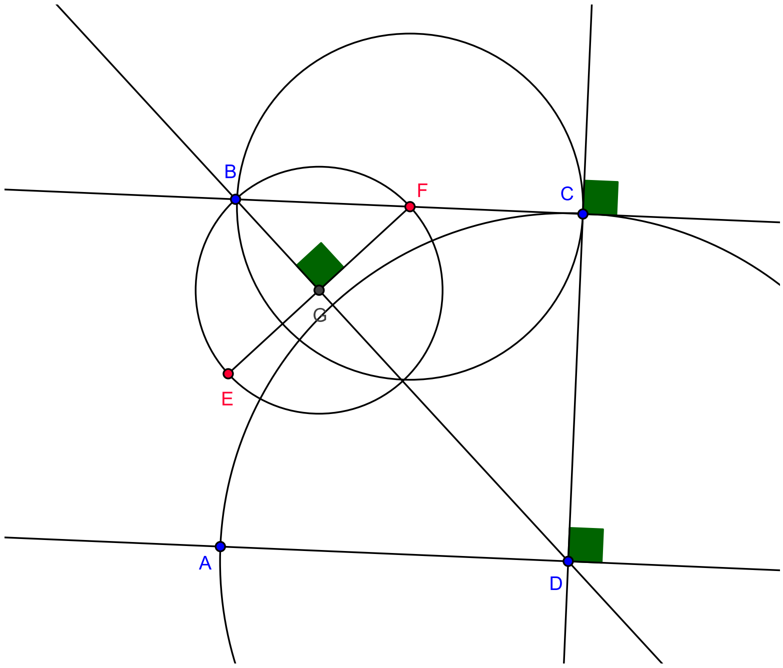


O ponto D é outro vértice do quadrado $\square ABCD$, pois os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares e $CD = BC$ por construção.

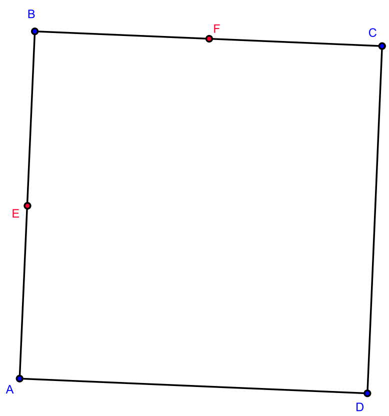
6. Pelo ponto D tracemos a reta perpendicular a reta que contém o segmento $\overline{CD}$.



7. A circunferência de centro em D e raio $BC = CD$ encontrará a reta perpendicular obtida no item 6. no ponto A que está no mesmo semi-plano determinado pela reta que passa pelos pontos C e D e contém o ponto E.



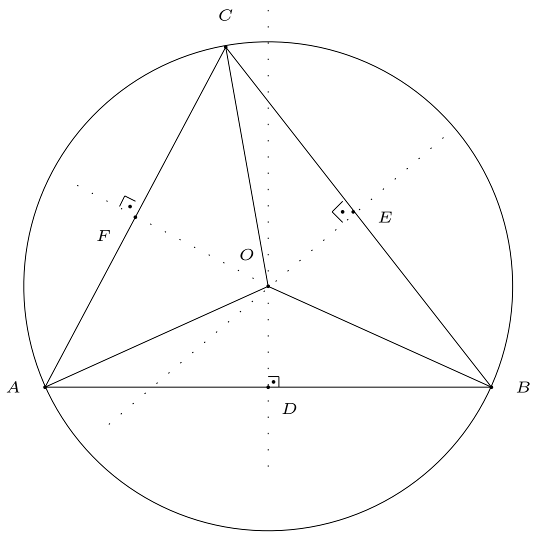
O ponto A é o último vértice do quadrado $\square ABCD$, pois os segmentos de reta $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ são perpendiculares, $AB = AD = DC = BC$ e portanto os lados do quadrilátero $ABCD$ são dois a dois paralelos, de mesmo comprimento e os pontos E e F são pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, completando a construção do quadrado $\square ABCD$.



Exercício 1.10.3 *Dado um triângulo ΔABC construir uma circunferência circunscrita ao mesmo.*

Resolução:

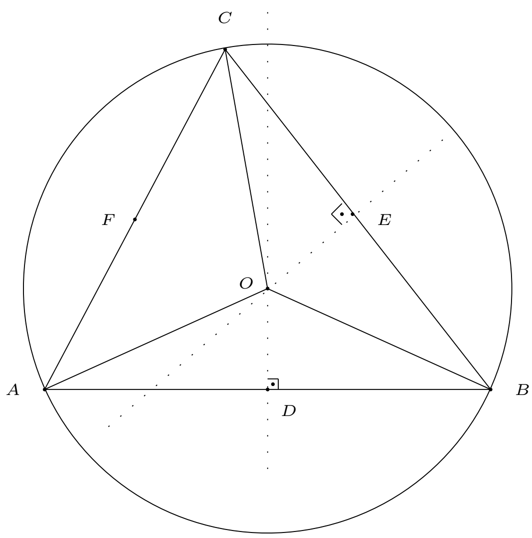
Basta encontrar a intersecção das mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do triângulo ΔABC (que coincidirá com a intersecção da mediatriz do segmento $\overline{AC}$ como veremos na observação a seguir).



Mostremos que isto é realmente é verdade.

Para isto precisamos mostrar que $OA = OB = OC$, onde o ponto O é o ponto de interseção das mediatriz relativas aos lados do triângulo ΔABC (as três mediatrizes encontram-se em um único ponto!).

Sejam D, E e F os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente e O o ponto de interseção das mediatrizes relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ (figura abaixo).



Pelo caso LAL comum, os triângulos ΔAOD e ΔBDO são congruentes (pois $AD = DB$, $\widehat{ODA} = \widehat{BDO} = \dfrac{\pi}{2}$).

Logo

$$AO = OB.$$

De modo análogo, os triângulos ΔBOE e ΔCEO são congruentes (pois $BE = EC$, $\widehat{OEB} = \widehat{CEO} = \dfrac{\pi}{2}$).

Logo

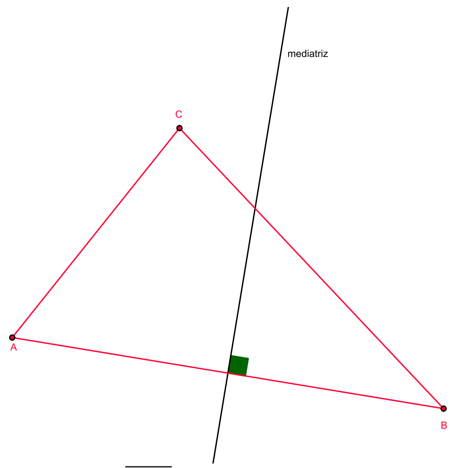
$$OB = OC.$$

Logo podemos concluir que

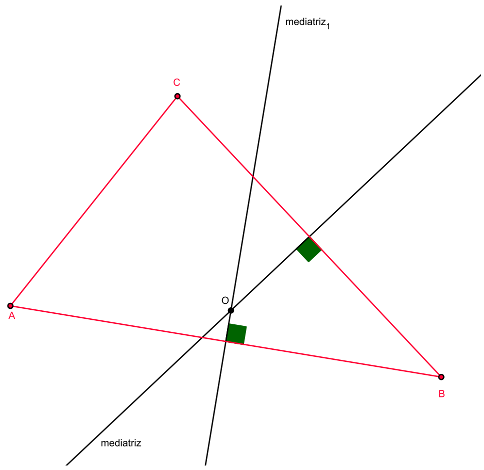
$$OA = OB = OC.$$

Portanto o triângulo ΔABC estará circunscrito na circunferência de centro no ponto O e raio $\overline{OA}$. Geometricamente procedemos da seguinte forma:

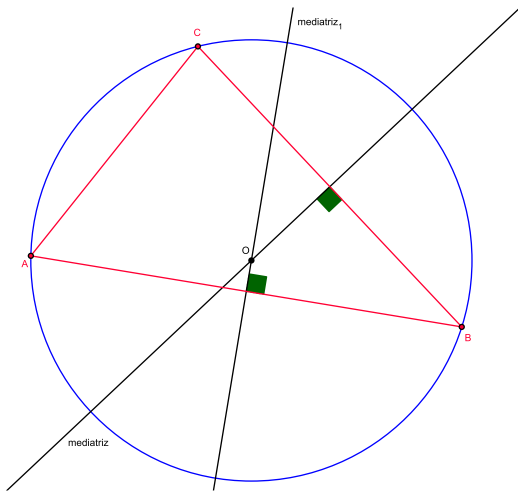
1. Tracemos a mediatriz pelo lado AB (figura abaixo);



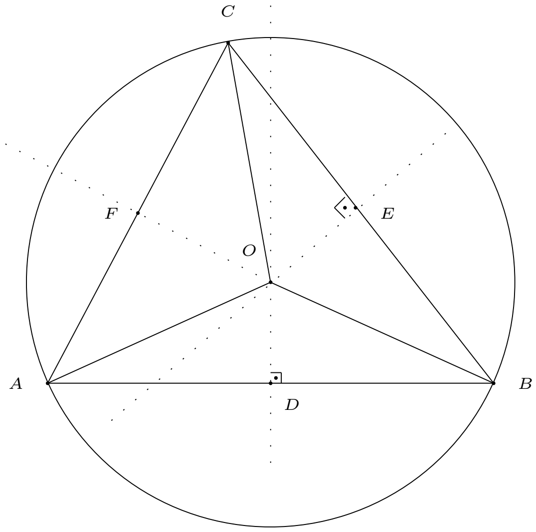
2. Observemos que a mediatriz do lado $\overline{BC}$ encontrará a mediatriz acima no ponto O;



3. A circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC tem centro no ponto O e raio $\overline{OA}$.



Observação 1.10.1 *Como conseqüência temos que o ponto de intersecção das mediatrizes pelos lado* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$ *também será o ponto* O.

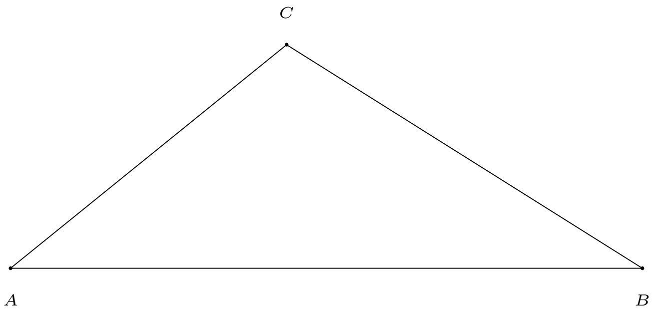


De fato, os triângulos ΔAFO *e* ΔCOF *são congruentes (caso LLL comum) assim* $\widehat{AFO} = \widehat{OFC}$. *Mas*

$$\widehat{AFO} + \widehat{OFC} = \pi, \quad \text{logo} \quad \widehat{AFO} = \widehat{OFC} = \frac{\pi}{2}$$

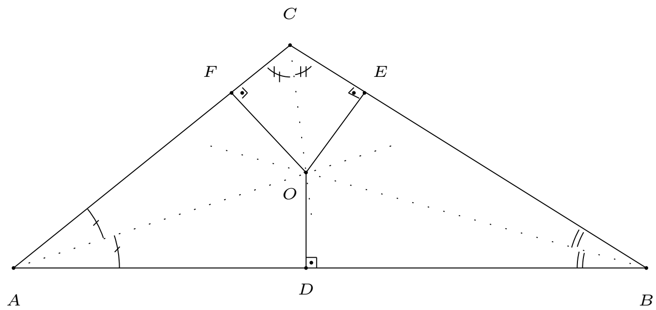
mostrando que o ponto O *está sobre a mediatriz relativamente ao lado* $\overline{AC}$.

Exercício 1.10.4 *Dado um triângulo construir uma circunferência inscrita ao mesmo.*



Resolução:

Basta encontrar a intersecção das bissetrizes dos ângulos $\widehat{CBA}$ e $\widehat{BAC}$ do triângulo ΔABC (que coincidirá com a intersecção da bissetriz do ângulo $\widehat{ACB}$ como veremos na observação a seguir).



Seja o ponto O de intersecção das bissetriz dos ângulos do triângulo ΔABC (que estamos supondo que seja único, como será visto na observação a seguir).

Consideremos os pontos D, E e F os pontos de intersecção das perpendiculares aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente que passam pelo ponto O.

Se mostrarmos que $OD = OE = OF$ então a circunferência centrada em O e raio OD estará inscrita no triângulo ΔABC (pois será tangente aos lados do triângulo).

Para mostrar isto observemos que, pelo caso AAL comum, os triângulos ΔOBD e ΔOEB são congruentes (pois $\widehat{BDO} = \widehat{OEB} = \frac{\pi}{2}$ e o lado $\overline{BO}$ é comum).

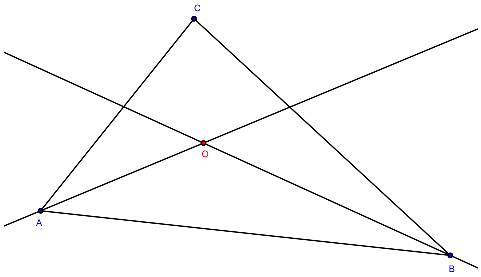
Logo $OD = EO$.

De modo análogo os triângulos ΔAOD e ΔAFO são congruentes (pois $\widehat{ODA} = \widehat{AFO} = \frac{\pi}{2}$ e o lado $\overline{AO}$ é comum) o que implica que $OD = OF$.

Portanto $EO = OD = OF$ como queríamos mostrar.

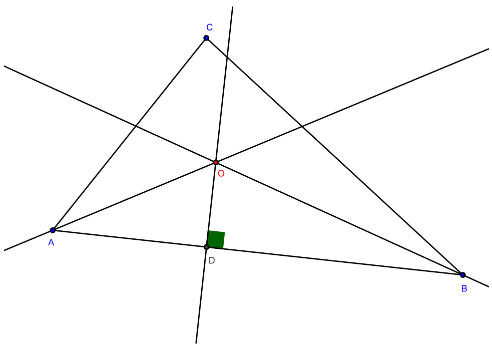
Para a construção geométrica temos:

1. Encontremos as bissetrizes dos ângulos $\widehat{CBA}$ e $\widehat{BAC}$ que se encontram no ponto O (figura abaixo);

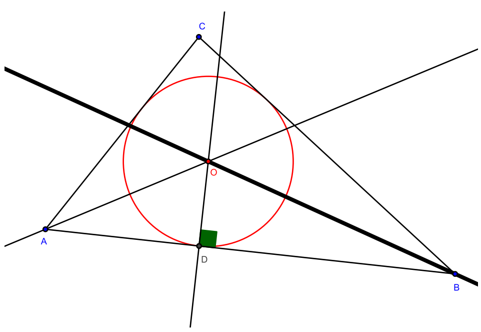


2. Encontremos a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa pelo ponto O.

   Esta reta interceptará a reta que contém os pontos A e B num ponto D (figura abaixo);



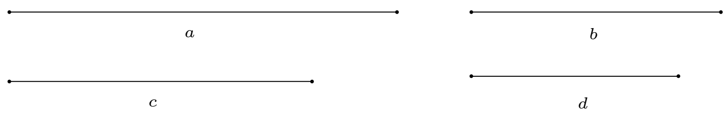
3. A circunferência de centro em O e raio OD é a circunferência inscrita no triângulo ΔABC.



Observação 1.10.2 *Afirmamos que o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos* $\widehat{BAC}$ *e* $\widehat{ACB}$ *também será o ponto* O.

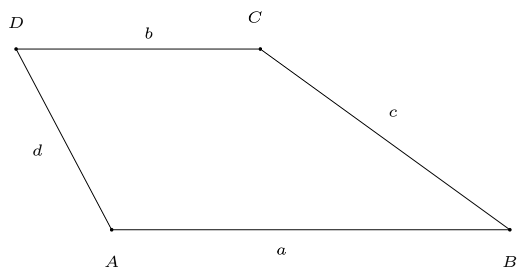
De fato, os triângulos ΔCOF *e* ΔCEO *são congruentes (pois* $\widehat{OFC} = \dfrac{\pi}{2} = \widehat{CEO}$, $FO = EO$, $\overline{CO}$ *é comum) assim* $\widehat{FCO} = \widehat{OCE}$ *mostrando que a semi-reta que contém os pontos* C *e* O *é bissetriz do ângulo* $\widehat{ACB}$*).*

Exercício 1.10.5 *Construir um trapézio* $ABCD$ *onde comprimento das bases maior e menor são* $AB = a$ *e* $CD = b$*, respectivamente, e os outros dois lados têm comprimento* $CB = c$ *e* $AD = d$*.*



Resolução:

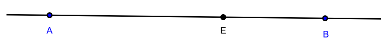
Consideremos sobre uma reta r dois pontos A e B tais que $AB = a$.



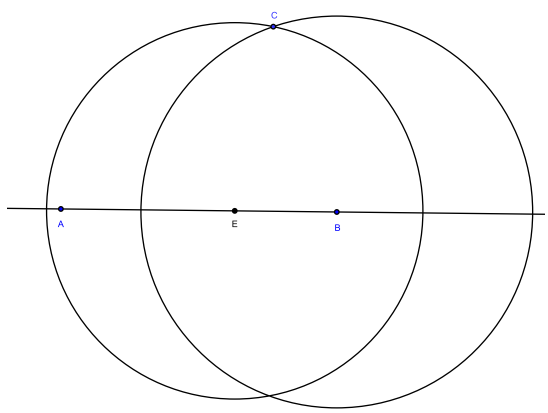
Sabemos que num trapézio $ABCD$ os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.

Com isto podemos fazer a construção, da seguinte forma:

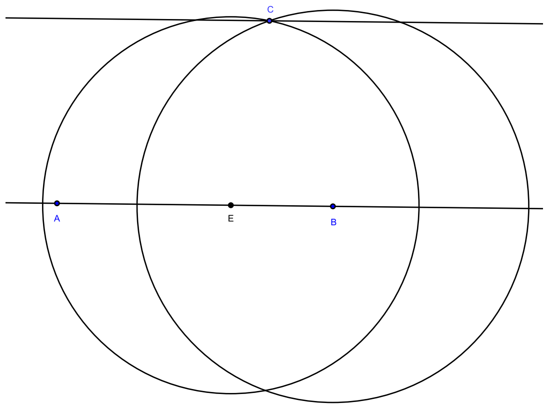
1. Seja E o ponto sobre o segmento $\overline{AB}$ tal que $AE = b$ (ou seja, $AE = CD$) (figura abaixo);



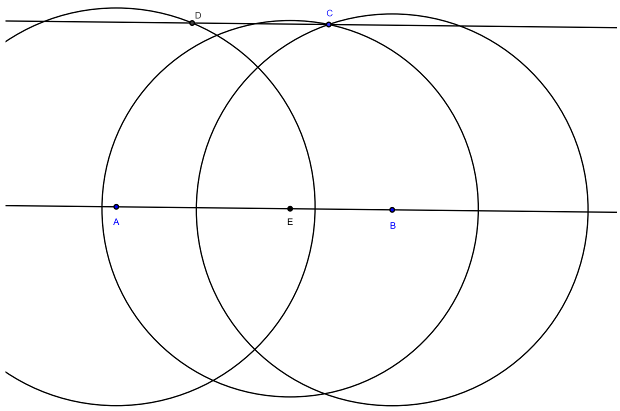
2. Considere C o ponto de intesecção da circunferência centrada em E e raio d com a circunferência centrada em B e raio c (na verdade temos um outro ponto na interseção - figura abaixo);



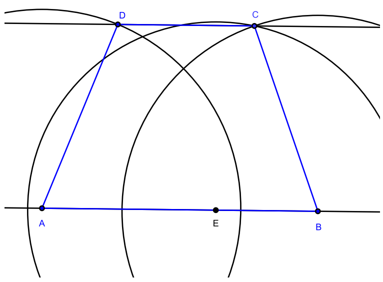
3. Obtenha a reta paralela à reta que contém os pontos A e B que passa pelo ponto C (figura abaixo);



4. Seja D o ponto de interseção da circunferência centrada no ponto A e raio d com a a reta do item 3. (figura abaixo);



5. Os vértices do trapézio são A, B, C e D.



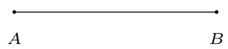
De fato, observemos que na construção acima temos $AB = a$, $BC = c$ e $AD = d$.

Além disso, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.

Só falta mostrar que $CD = b$.

Mas isso segue do fato que $ADCE$ é um paralelogramo (pois o segmento $\overline{AE}$ é paralelo a $\overline{CD}$ e segmento $\overline{AD}$ é paralelo a $\overline{EC}$ por construção).

Exercício 1.10.6 *Construir um hexágono regular $ABCDEF$ conhecendo-se o lado $\overline{AB}$.*



Resolução:

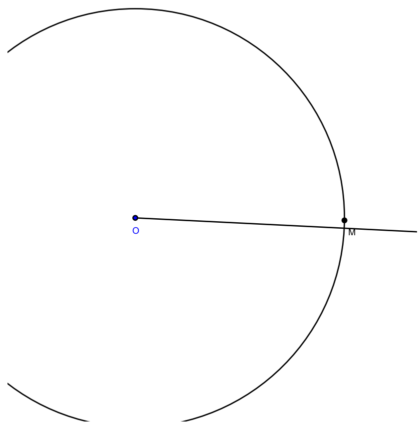
Para construí-lo basta lembrar que os ângulos internos de um hexágono regular são todos iguais a $\dfrac{2\pi}{3}$ (pois a soma dos ângulos internos do mesmo é 4π).

Além disso, lembremos que basta sabermos construir um ângulo que tenha medida $\dfrac{\pi}{3}$ radianos, ou seja um triângulo equilátero e assim teremos $\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$.

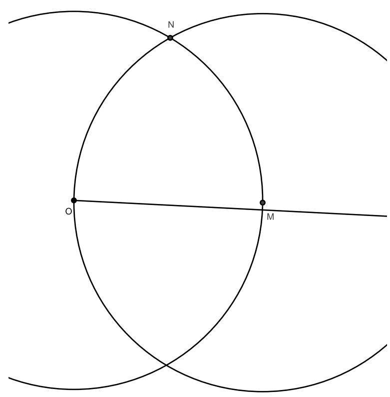
Para isto agimos da seguinte forma:

1. Fixemos uma semi-reta com extermidade no ponto O.

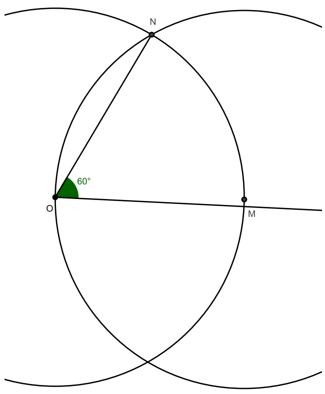
2. Tracemos uma circunferência de centro em O e raio qualquer fixado que encontrará a semi-reta acima num ponto M (figura abaixo);



3. Tracemos uma outra circunferência de centro em M e raio igual ao acima que encontrará a circunferência acima num ponto N (na verdade temos um outro ponto - figura abaixo);

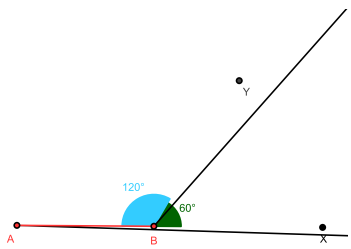


Então o ângulo $\widehat{MON}$ tem medida $\dfrac{\pi}{3}$ radianos (pois os pontos O, M e N são vértices de um triângulo equilátero já que $OM = ON = MN$).

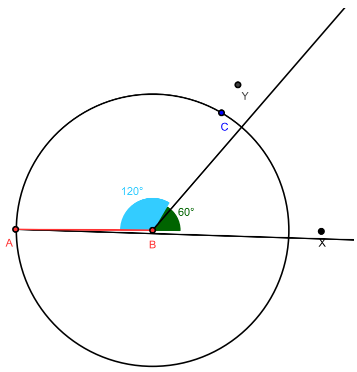


A construção do hexágono basea-se, excencialmente, no transporte conveniente do ângulo $\widehat{MON}$ obtido acima.

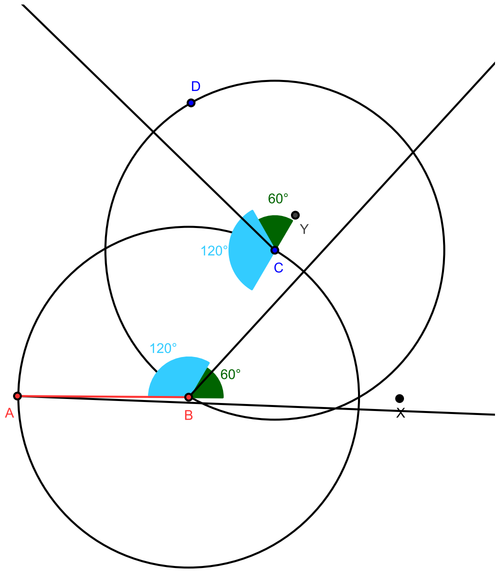
1. Transportemos o ângulo $\widehat{MON}$ para o vértice B, mais precisamente, encontremos os pontos Y e X, sendo este último sobre a semi-reta que contém os pontos A e B, tal que $\widehat{XBY} = \widehat{MON}$ (Y deverá ser obtido - figura abaixo);



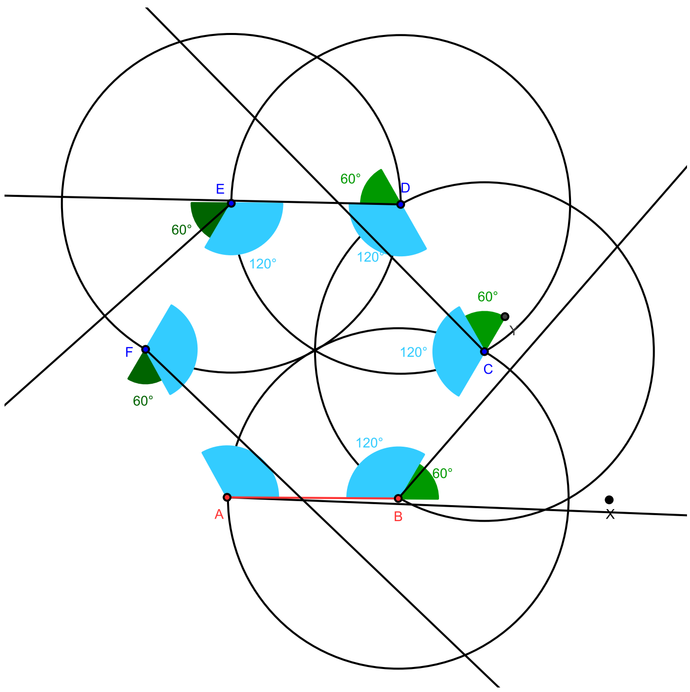
2. Sobre o lado $\overline{BY}$ do ângulo $\widehat{XBY}$ encontre o ponto C de tal modo que $BC = AB$ (figura abaixo);



3. Repita o processo acima no vértice C, ou seja, trocando o segmento $\overline{AB}$ pelo segmento $\overline{BC}$ para encontrar o ponto D (cuidado no transporte do ângulo $\frac{\pi}{3}$!; o ponto D deverá estar no semi-plano determinado pela reta que passa pelos pontos B e C que contém o ponto A - figura abaixo).



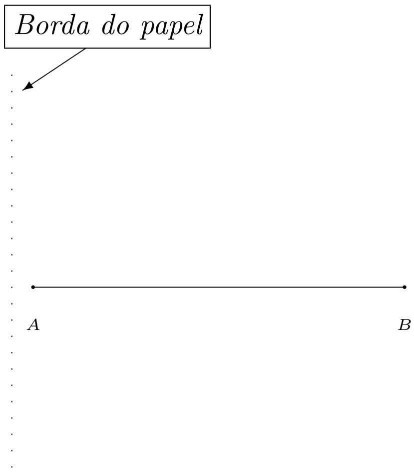
Prosseguindo a construção obteremos o hexágono regular cujo lado $\overline{AB}$ é dado.



Observação 1.10.3 *Lembremos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n-lados é dado por $(n-2)\pi$.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Exercício 1.10.7 *Construir uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo ponto A, estando este ponto muito próximo da borda do papel (veja figura abaixo).*

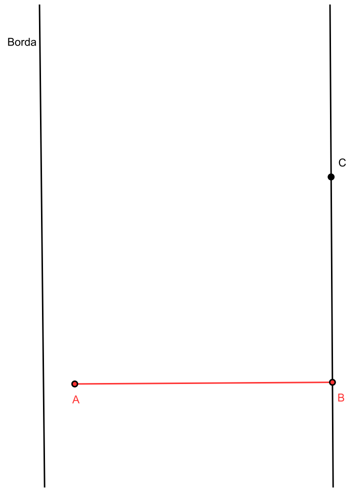


Resolução:

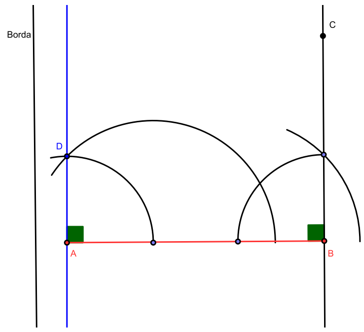
Neste caso podemos agir da seguinte forma:

1. Tracemos a perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo ponto B.

   Escolhamos C um ponto da perpendicular obtida acima, diferente do ponto B (figura abaixo);

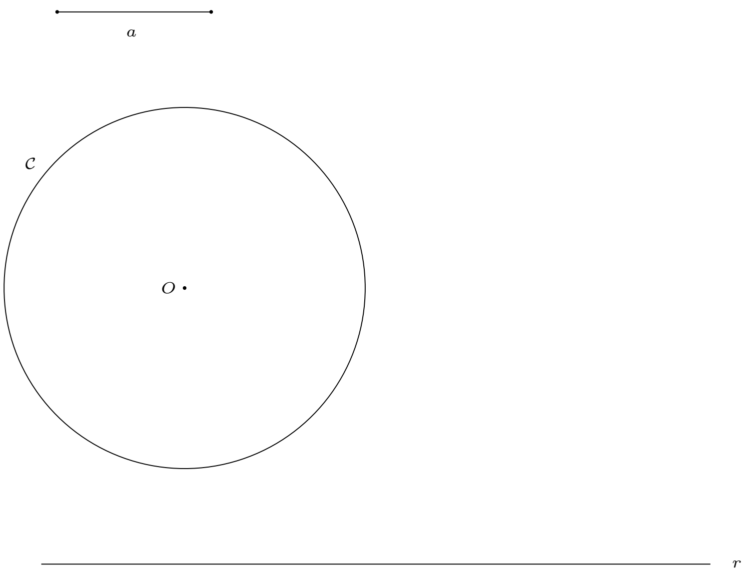


2. Trasportemos o ângulo $\widehat{CBA} = \dfrac{\pi}{2}$ para de tal sorte que um lado do ângulo transportado seja a semi-reta de extremidade no ponto A e que contém o ponto B (isso é possível sem ultrapassar a borda do papel);



3. A reta que contém o outro lado do ângulo transportado (isto é, a reta que contém os pontos A e D) será a perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo ponto A.

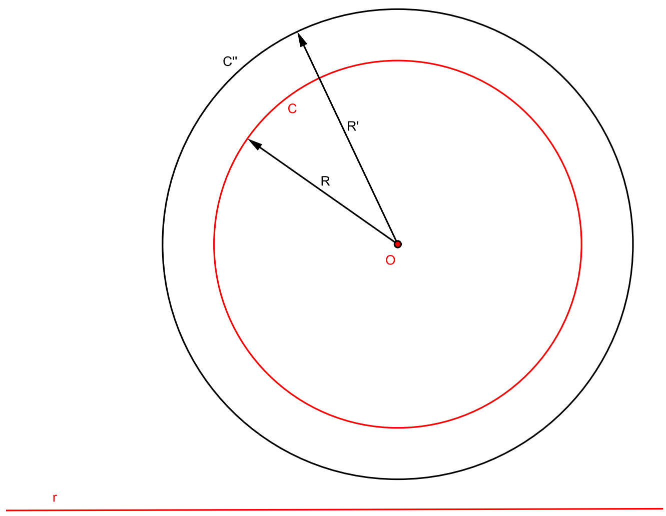
Exercício 1.10.8 *Dadas uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio $R > 0$ e uma reta $\underline{r}$ construir uma circunferência $\mathcal{C}'$, de raio $a > 0$ dado, tangente a reta $\underline{r}$ e tangente, exteriormente, a circunferência $\mathcal{C}$.*



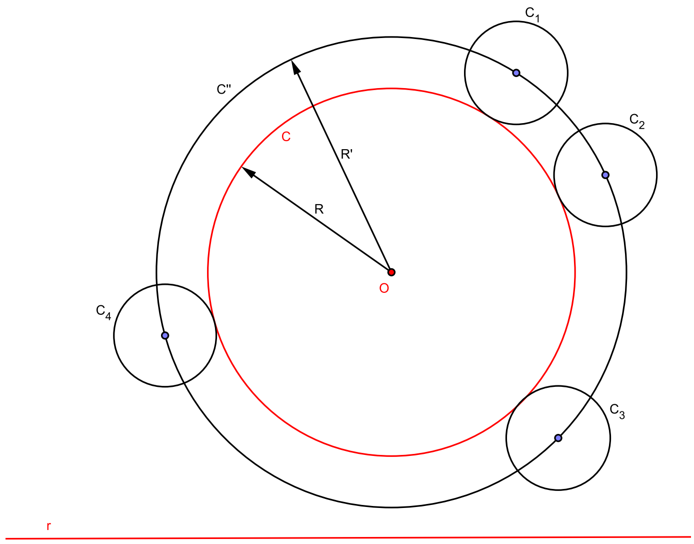
Resolução:

Um modo de encontrar geometricamente a circunferência $\mathcal{C}'$ é a seguinte:

1. Tracemos uma circunferência $\mathcal{C}''$, de centro em O e raio $R' \doteq R + a$ (figura abaixo);

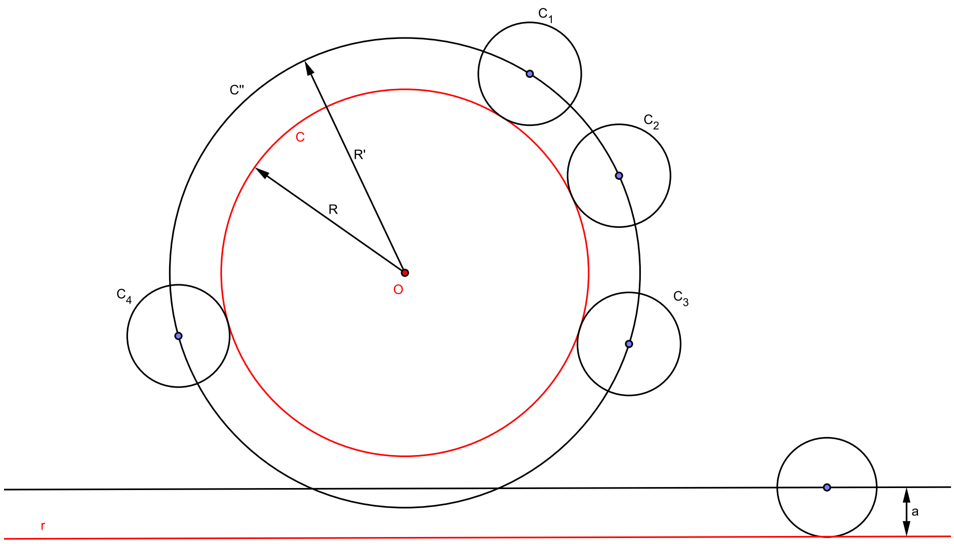


Observemos que todas as circunferência tangentes à circunferência $\mathcal{C}$ têm seus centros sobre a circunferência $\mathcal{C}''$ (as circunferência $\mathcal{C}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ na figura abaixo são tangentes à circunferência $\mathcal{C}$);

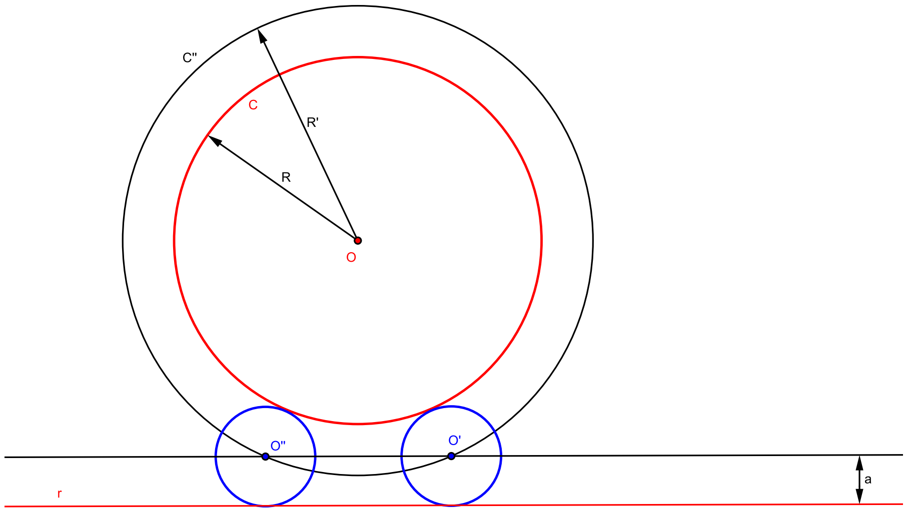


2. Encontremos a(s) reta(s) paralela(s) à reta $\underline{r}$ que dista(m) $\underline{a}$ da mesma.

   Observemos que para a circunferência $\mathcal{C}'$, de raio $\underline{a}$, ser tangente à reta $\underline{r}$ ela ter seu centro sobre uma das retas paralelas obtidas acima (figura abaixo);



3. Na intersecção da circunferência, $\mathcal{C}''$, obtida no item 1., com a reta paralela do item 2. obteremos o centro, O' (teremos um outro ponto), da circunferência $\mathcal{C}$ procurada, que pode ser traçada utlizando-se o raio $\underline{a}$ (figura abaixo).

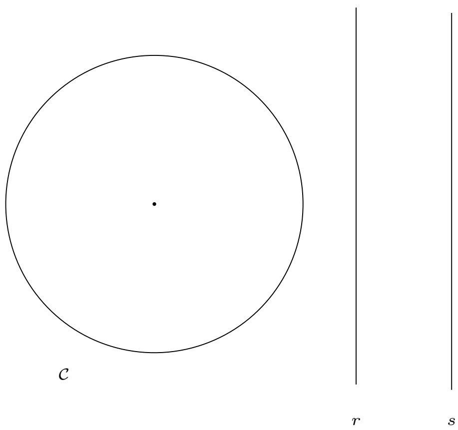


Exercício 1.10.9 *Dadas as retas r e s e a circunferência $\mathcal{C}$, determinar, geometricamente, os pontos da circunferência $\mathcal{C}$ que são equidistantes da reta r e da reta s. Qual o número máximo de soluções?*

Resolução:

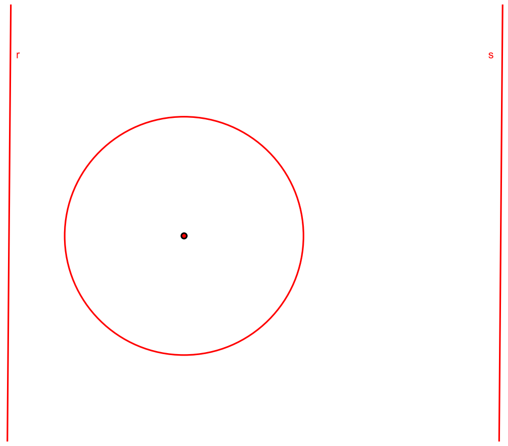
Ieremos que eestudar as várias possibilidades, a saber:

I. As retas r e s são paralelas, distintas e a circunferência $\mathcal{C}$ está num dos semi-planos determinado por uma das retas (digamos a reta r) que não contém a reta s (figura abaixo):



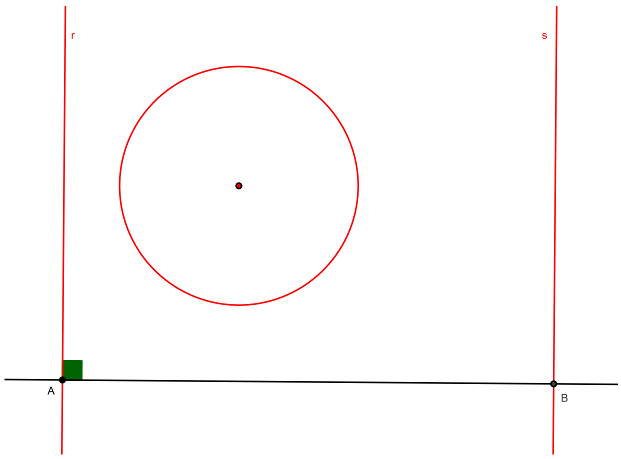
Neste caso o lugar geométrico para o problema será vazio, pois os pontos que são equidistantes da circunferência $\mathcal{C}$ e da reta r estarão a uma distância da reta s estritamente maior que à distância à reta r.

II. As retas r e s são paralelas, distintas e a circunferência $\mathcal{C}$ está na faixa delimitada pelas duas retas (vide figura abaixo):

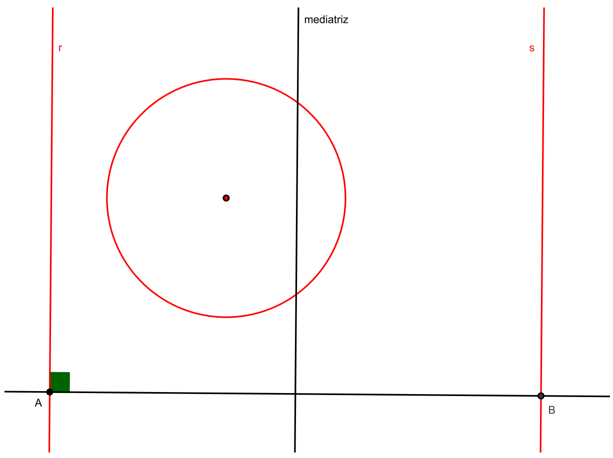


Passemos a resolução, geométrica, do problema.

II.1. Considere a reta perpendicular à reta $\underline{r}$ por um ponto A da mesma, que interceptará a reta $\underline{s}$ num ponto B. Notemos que esta reta será perpendicular à reta $\underline{s}$ (figura abaixo);



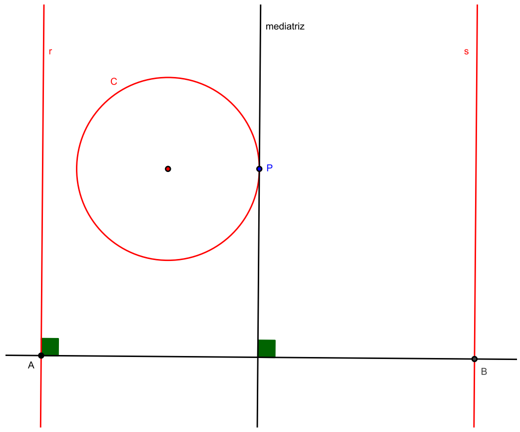
II.2. Considere a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.
Esta mediatriz é o lugar geométrico de todos os ponto que são equidistantes das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ (figura abaixo);



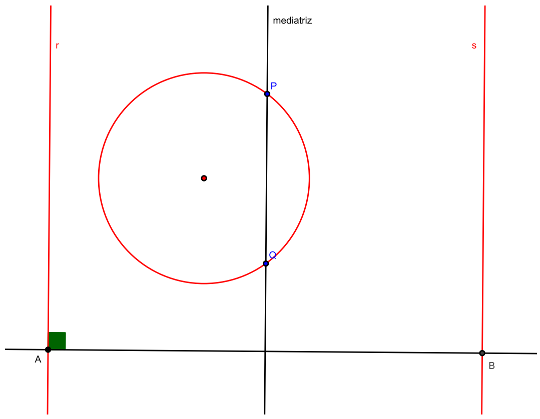
II.3. Portanto, cada ponto de intersecção da reta mediatriz do item 2. com a circunferência $\mathcal{C}$ será equidistante das retas $\underline{r}$, $\underline{s}$.

Neste caso, podemos ter as seguinte situações:

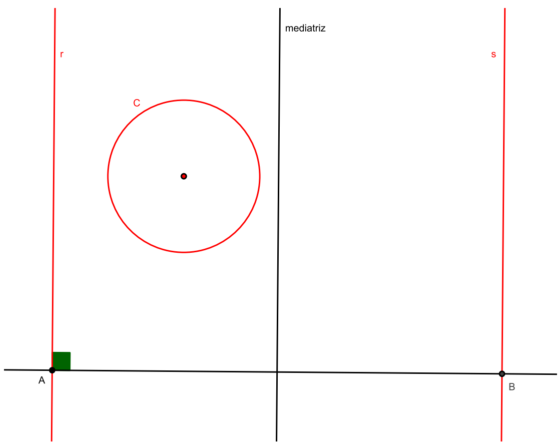
i. uma única solução, o ponto P, caso a mediatriz do item 2. seja tangente a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo):



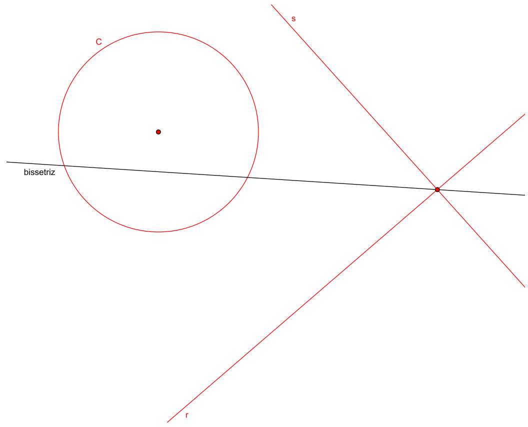
ii. duas soluções distintas, ou seja, os pontos P e Q, caso a mediatriz do item 2. seja secante a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo):



iii. ou nenhuma solução, isto é, conjunto vazio, caso a mediatriz do item 2. não intercepte a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo):

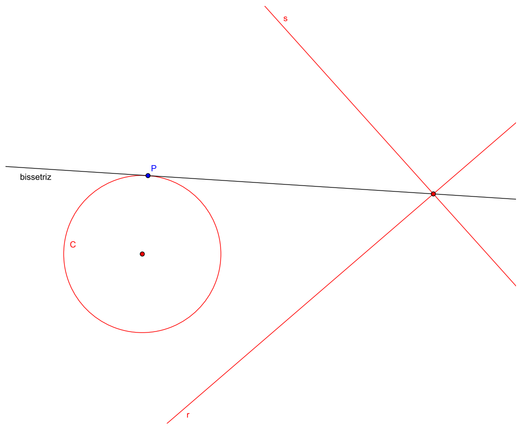


III. Se as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ forem concorrentes (não coincidentes) sabemos que o lugar geométrico dos pontos equidistantes das mesmas será a bissetriz dos ângulos determinados pelas mesmas (figura abaixo).

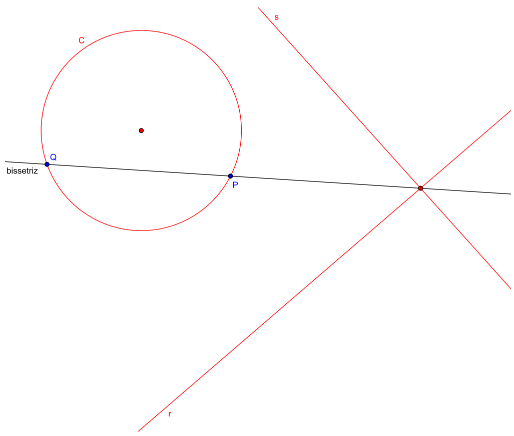


Neste caso, geometricamente, podemos ter as seguinte situações:

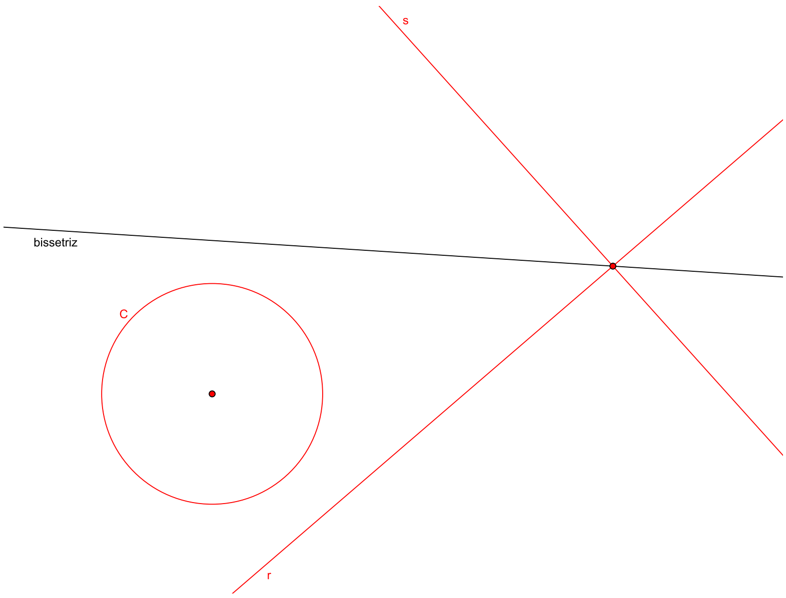
(a) uma única solução, o ponto P, se a reta bissetriz for uma reta tangente a circunferência $\mathcal{C}$ (ficgura abaixo);



(b) duas soluções distintas, isto é, dois pontos P e Q, se a reta bissetriz for secante a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo);

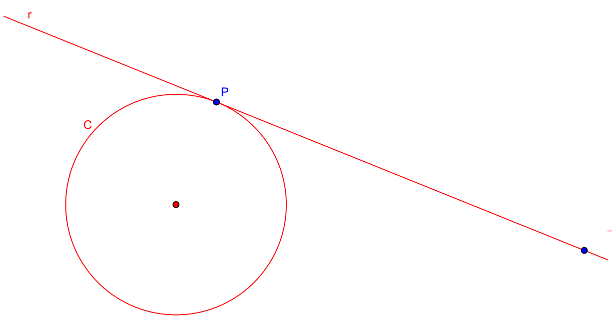


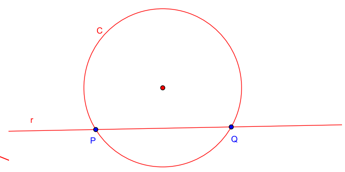
(c) nenhuma solução, isto é, o conjunto vazio, se a reta bissetriz não interceptar a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo).



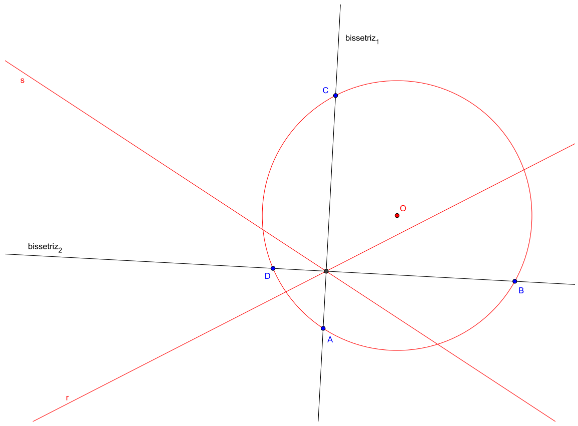
Observação 1.10.4 *No exercício acima se as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ forem concorrentes e, por exemplo, a reta $\underline{r}$ é secante a circunferência $\mathcal{C}$ então teremos apenas duas possibilidades:*

1. *se a reta $\underline{s}$ coincide com a reta $\underline{s}$ então o conjunto procurado é formado pelos pontos de interseção da reta $\underline{r}$ com a circunferência $\mathcal{C}$ (que pode ser um único ponto se a reta $r = s$ for tangente a circunferência $\mathcal{C}$ ou dois pontos distintos se a a reta $r = s$ for secante a circunferência $\mathcal{C}$ (figuras abaixo);*

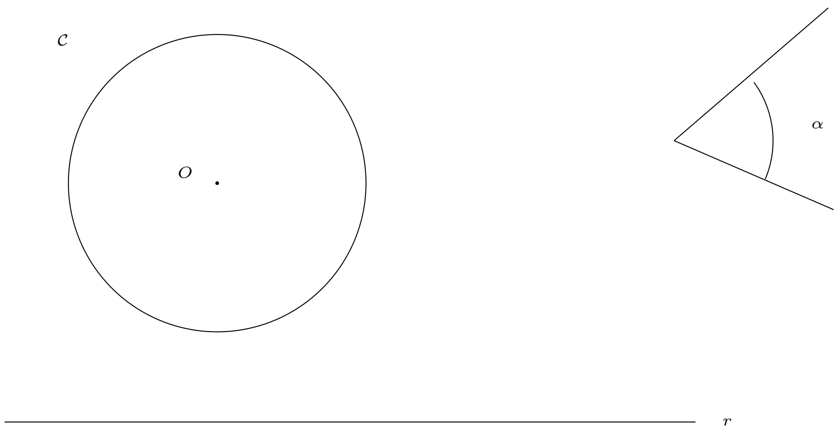




2. *se a reta $\underline{s}$ não for coincidente com a reta $\underline{s}$ então o lugar geométrico dependerá, como num caso anterior, se a circunferência $\mathcal{C}$ intercepta ou não as retas bissetrizes dos ângulos determinados pelas retas concorrentes r e s (podemos ter até 4 soluções - figura abaixo);*

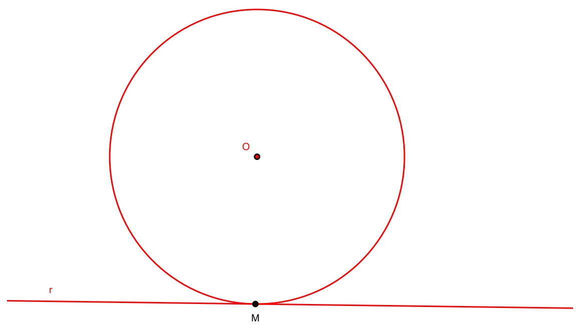


Exercício 1.10.10 *Dadas a circunferência $\mathcal{C}$ e um reta $\underline{r}$, determinar um ponto P sobre a reta $\underline{r}$ de forma que as retas tangentes traçadas pelo ponto P à circunferência $\mathcal{C}$ formem um ângulo α dado.*

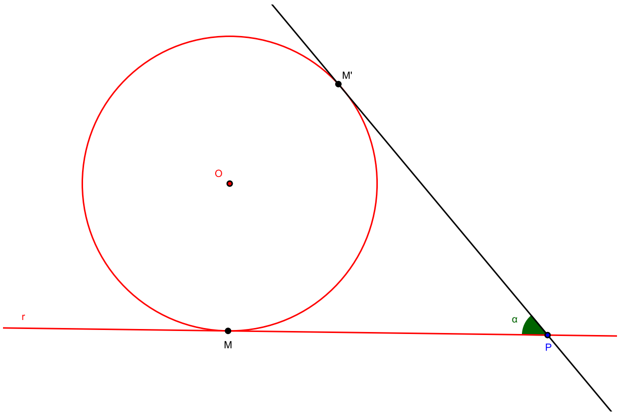


Resolução:

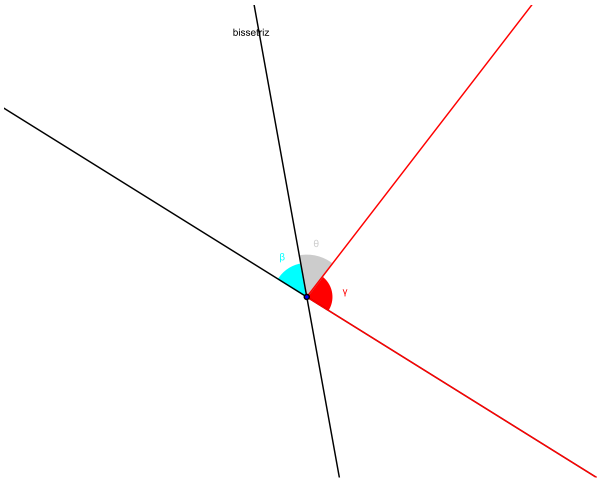
I. Consideremos primeiramente o caso em que a reta $\underline{r}$ é tangente a circunferência $\mathcal{C}$ num ponto M (figura abaixo).



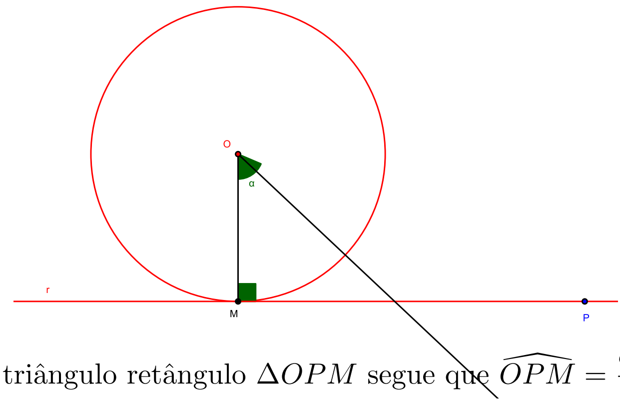
Neste caso podemos obter, geometricamente, um ponto P sobre a reta $\underline{r}$ (exitirá outro) de tal modo que $\widehat{OPM} = \dfrac{\alpha}{2}$ (figura abaixo).



Para isto, obtenhamos um ângulo de medida $\theta = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$ (notemos que figura abaixo, temos que $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \alpha$ e $\beta + \alpha + \dfrac{\pi}{2} = \pi$).

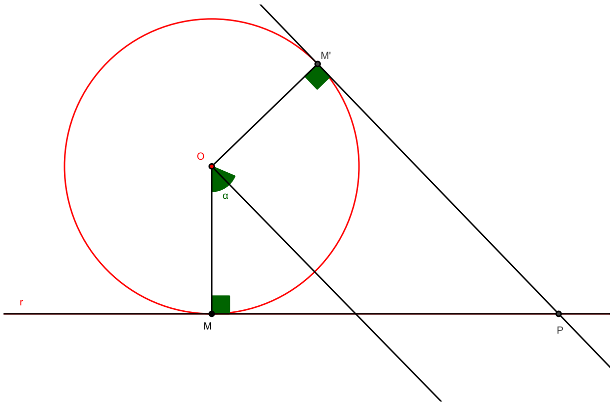


Façamos o transporte do ângulo $\theta = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$ obtido acima de tal modo que um dos lados do mesmo seja a semi-reta que tem origem no ponto O e que contenha o ponto M que encontrará a reta $\underline{r}$ no ponto P (figura abaixo);



Observemos que do triângulo retângulo ΔOPM segue que $\widehat{OPM} = \dfrac{\alpha}{2}$.

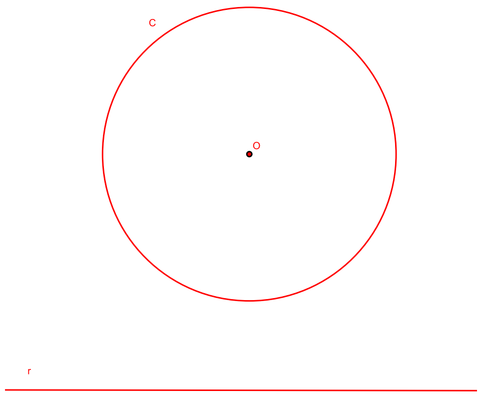
Seja M' o ponto de tangência da outra reta tangente a circunferência $\mathcal{C}$ pelo ponto P (figura abaixo);



Observemos que $\widehat{M'PO} = \widehat{OPM} = \dfrac{\alpha}{2}$, pois os triângulos ΔOPM e $\Delta OM'P$ são congruentes (caso ALA).

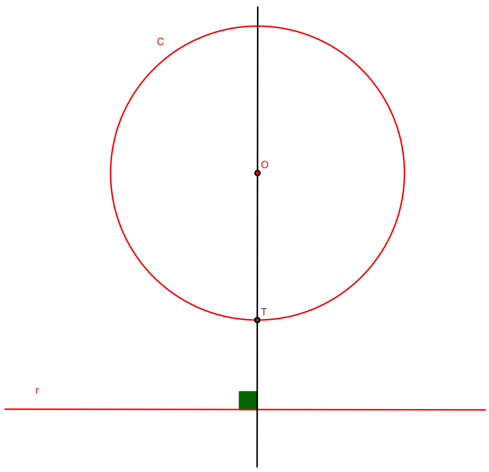
Logo $\widehat{M'PM} = \widehat{M'PO} = \widehat{OPM} = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2} = \alpha$ como pedido no exercício.

II. Consideremos agora o caso em que a circunferência $\mathcal{C}$ e a reta $\underline{r}$ não se interceptam (figura abaixo).

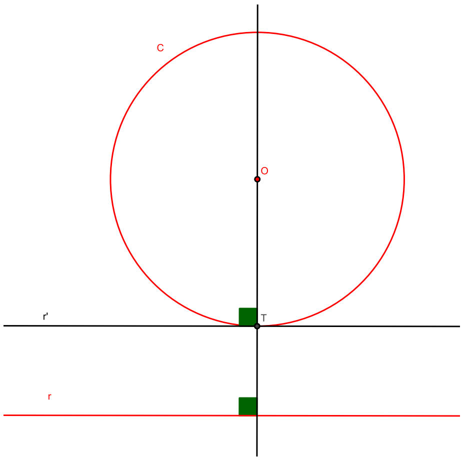


Neste caso consideraremos uma reta, $\underline{r'}$, paralela a reta $\underline{r}$ que seja tangente a circunferência $\mathcal{C}$.

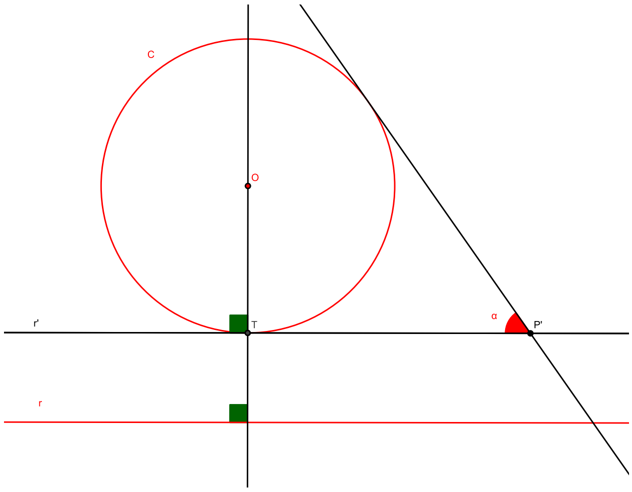
Para obtê-la traçamos a reta perpendicular a reta $\underline{r}$ que passa pelo ponto O, que interceptará a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto T (figura abaixo).



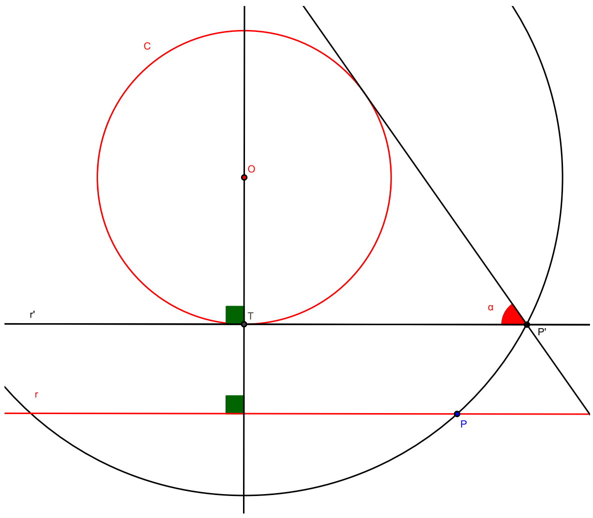
A seguir traçamos a reta tangente a circunferência $\mathcal{C}$ pelo ponto T (figura abaixo).



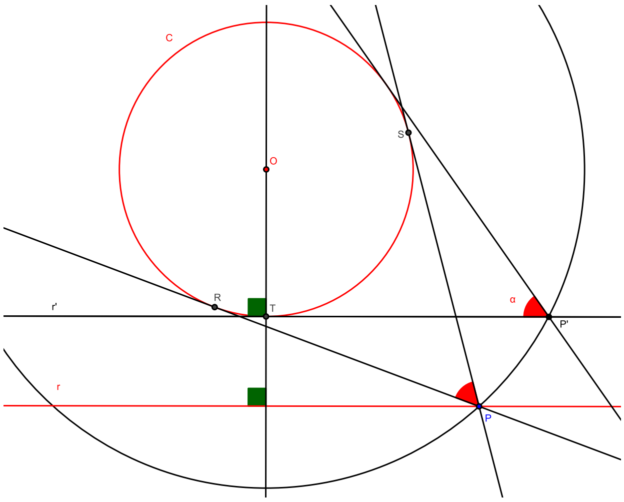
Agimos como no item I para obter um ponto P' sobre a reta $\underline{r'}$ com a propriedade requerida (figura abaixo).



Consideremos a circunferência, $\mathcal{C}'$, de centro em O e raio $\overline{OP'}$ que interceptará a reta r num ponto P (e em um outro, eventualmente - figura abaixo).

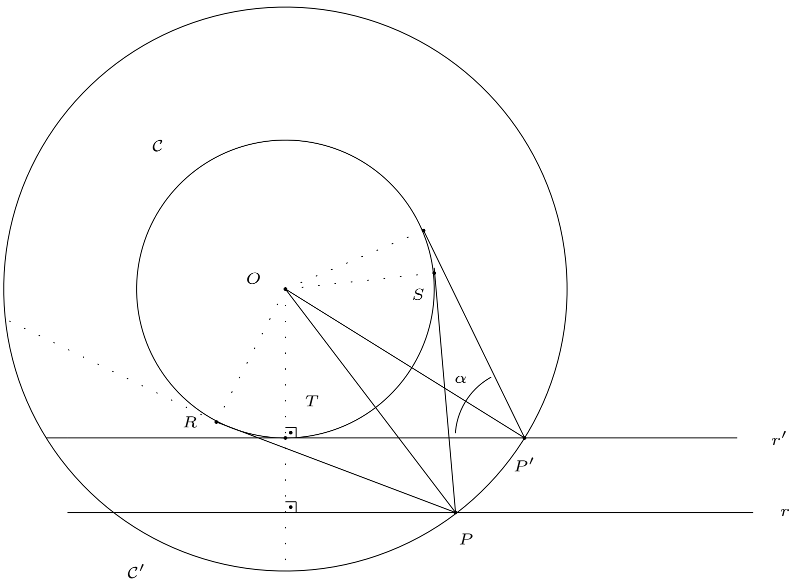


Afirmamos que o ponto P tem a propriedade que queremos, ou seja, as semi-retas tangentes à circunferência $\mathcal{C}$ que contém o ponto P formam ângulo de medida α (figura abaixo).



Para isto basta mostrar que o ângulo $\widehat{SPR} = \alpha$.

Como $\widehat{OPR} = \widehat{SPO}$ (pois a semi-reta $\overline{PO}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{SPR}$) e $\widehat{OP'T} = \dfrac{\alpha}{2}$ (pois a semi-reta $\overline{P'O}$ é bissetriz do ângulo α) segue que basta mostrar que $\widehat{OPR} = \widehat{OP'T}$ (ver figura abaixo).



Para isto observemos que os triângulos ΔOPR e $\Delta OP'T$ são congruentes pelo caso LLL.

De fato, pois $OP = OP'$, $OR = OT$ e os segmentos $\overline{PR}$ e $\overline{P'T}$ correspondem a metade das cordas da circunferência $\mathcal{C}'$ que são tangentes a circunferência $\mathcal{C}$ nos pontos R e T, logo essas cordas têm mesmo comprimento e seus pontos médios serão R e S, respectivamente, ou seja os pontos de tangência das cordas da circunferência $\mathcal{C}'$ com a circunferência $\mathcal{C}$, logo, $PR = P'T$.

Em particular, $\widehat{OPR} = \widehat{OP'T}$ completando a prova deste caso.

III. Consideremos o último caso em que a reta $\underline{r}$ é secante à circunferência $\mathcal{C}$.

Neste caso agimos de modo semelhante ao utilizado no item II. e será deixado como exercício (a seguir) para o leitor.

Exercício: **Valor: +0.5**

Fazer a construção para a situação III acima.

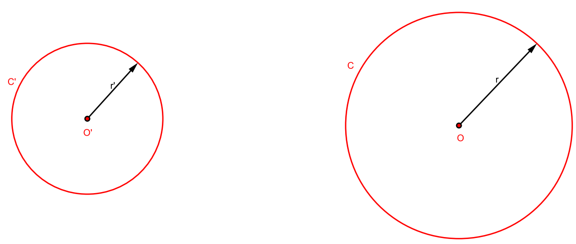
Exercício 1.10.11 *Construir uma reta tangente comum às circunferência $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ dadas.*

Resolução:

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas circunferências de centro em O e O' com raios r e r', respectivamente.

Temos as seguintes possibilidades:

I. As circunferências são exteriores uma da outra (ou seja, distância entre os centros O e O' é maior que a soma dos raios r e r' - figura abaixo).

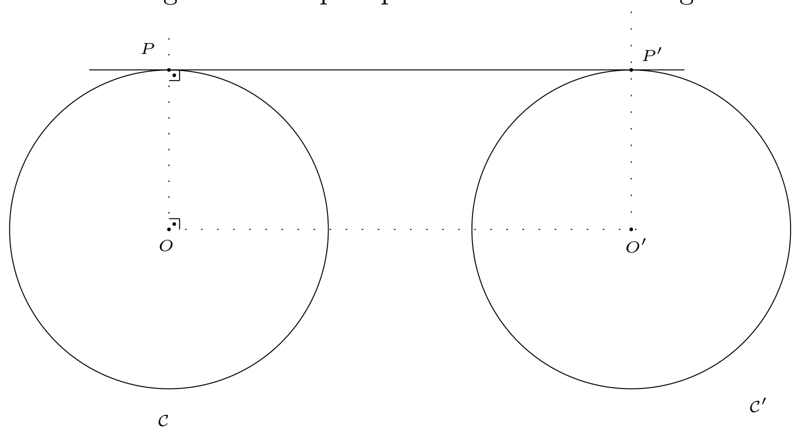


Dividiremos o estudo deste caso em duas situações: $r = r'$ e a outra será $r > r'$.

(a) Caso que $r = r'$.

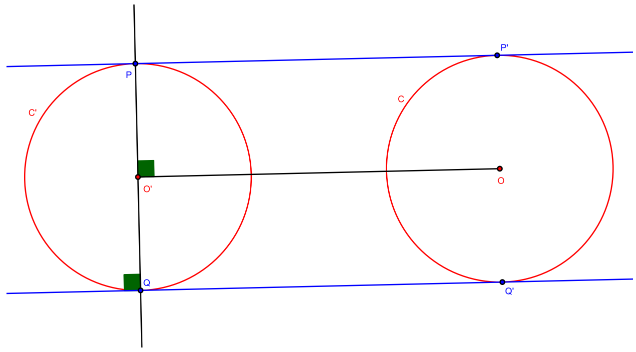
Neste consideramos a reta perpendicular a ao segmento $\overline{OO'}$ pelo ponto O que interceptará a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto P.

A reta perpendicular ao segmento $\overline{OP}$ pelo ponto P é uma reta tangente às circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$.



De fato, o segmento $\overline{O'P'}$ (cujo comprimento é o raio da circunferência $\mathcal{C}'$) é perpendicular ao segmento $\overline{PP'}$ no ponto P' que está na circunferência $\mathcal{C}'$ (lembremos que $OP = O'P'$).

Observemos que, neste caso, temos uma outra reta tangente às circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ (figura abaixo).

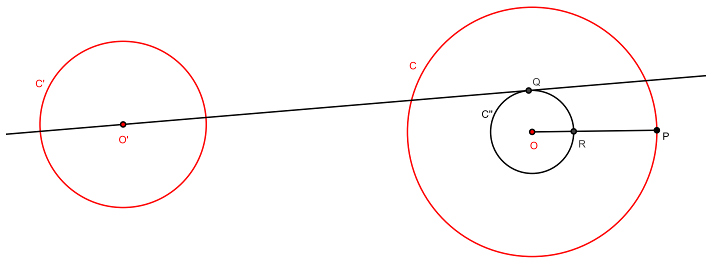


(b) Se $r > r'$ agiremos da segunte forma:

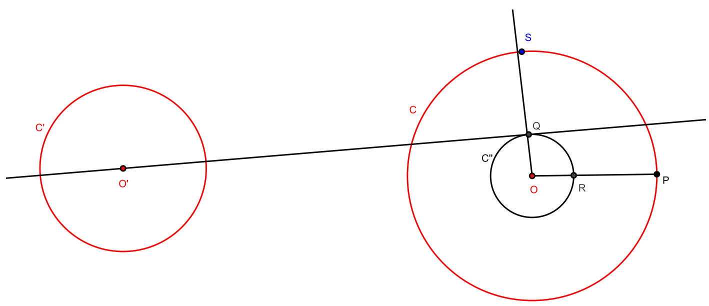
Consideremos $\overline{OP}$ um segmento que nos dá o raio da circunferência $\mathcal{C}$.

Encontremos o ponto R sobre o segmento $\overline{OP}$ de tal modo que $PR = r'$ e tracemos a circunferência $\mathcal{C}''$ de centro em O e raio OR (ou seja, o raio da circunferência $\mathcal{C}''$ será $r - r'$ - figura abaixo).

Encontremos a reta tangente a circunferência $\mathcal{C}''$ que passa pelo ponto O' com ponto de tangência $Q \in \mathcal{C}''$ (na verdade temos retas tangentes distinas - figura abaixo).



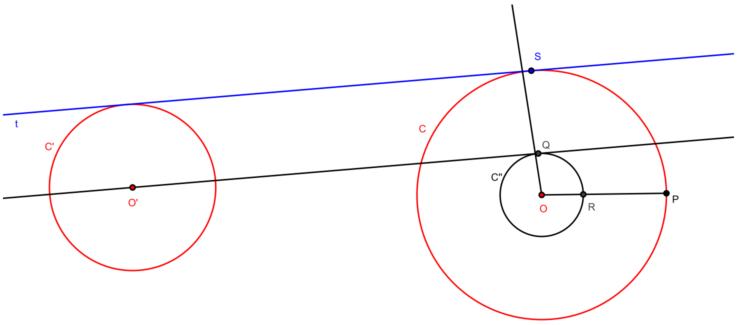
Consideremos a semi-reta com extremidade no ponto O que contém o ponto Q, que interceptará a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto S (figura abaixo).



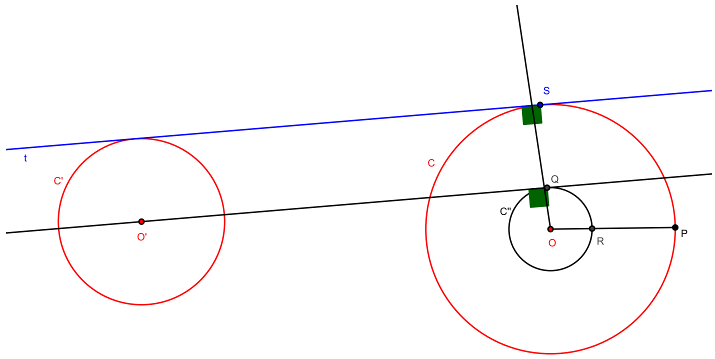
Encontremos a reta paralela à reta que contém os pontos Q e O' passando pelo ponto S (figura abaixo).

Esta reta, t, será, como mostraremos a seguir, a reta tangente às circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, completando assim a construção.

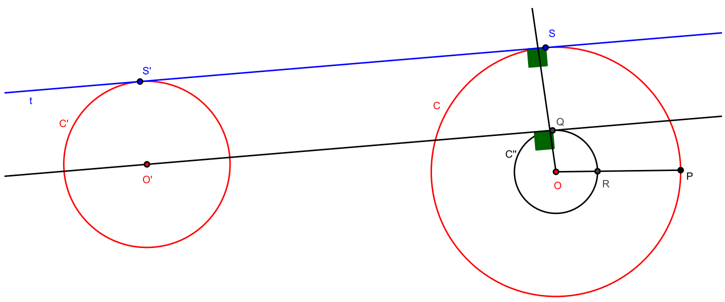
Observemos que, realmente, a reta $\underline{t}$ é tangente às circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$.



De fato pois a reta que contém os pontos O' e Q é tangente à circunferência $\mathcal{C}''$, logo $\widehat{O'QO} = \dfrac{\pi}{2}$ e como a reta $\underline{t}$ é uma reta paralela a reta que contém os pontos O' e Q teremos $\widehat{S} = \dfrac{\pi}{2}$, ou seja, a reta $\underline{t}$ é uma reta tangente à circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo).



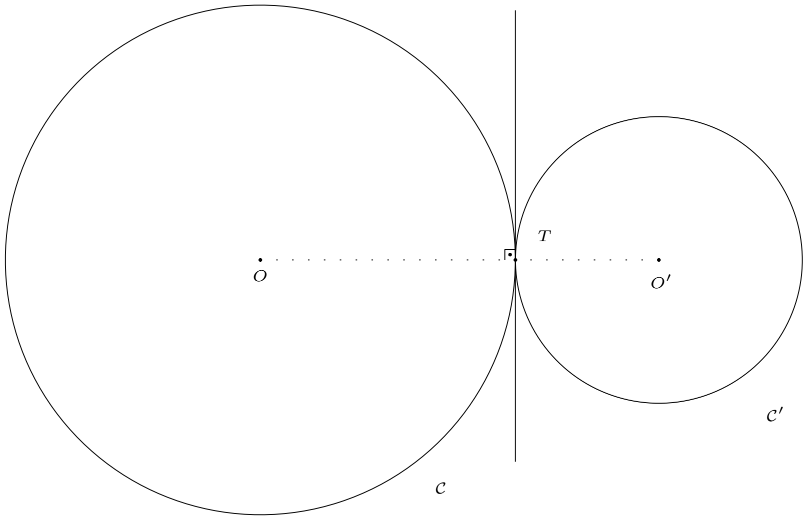
Seja S' o ponto da reta $\underline{t}$ tal que o quadrilátero $O'S'SQ$ seja um paralelogramo.
Neste caso temos que $O'S' = QS = RP = r'$, ou seja S' está sobre a circunferência $\mathcal{C}'$ (figura abaixo).



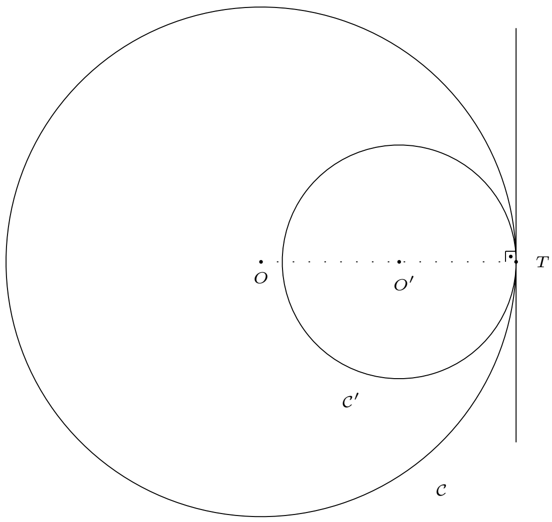
Para finalizar, mostremos que a reta $\underline{t}$ é a reta tangente a circunferência $\mathcal{C}'$ no ponto S', ou seja, que o segmento de reta $\overline{SS'}$ é perpendicular ao segmento $\overline{O'S'}$.
Para verificar isto observamos que os segmentos $\overline{QS}$ e $\overline{O'S'}$ são paralelos e que o ângulo $\widehat{S'SQ}$ é um ângulo reto implicando que o ângulo $\widehat{O'S'S}$ também é deverá ser um ângulo reto.
Portanto os segmentos $\overline{O'S'}$ e $\overline{S'S}$ são perpendiculares em S', mostrando que a reta que contém o segmento SS' (ou seja, a reta $\underline{t}$) é uma reta tangente às circunferência $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ (nos pontos S e S', respectivamente) como queríamos demonstrar.

II. As circunferências são tangentes.

Podemos ter uma tangência entre as circunferências e as duas serem exteriores uma da outra (ou seja, a distância entre os centros O e O' é igual a soma dos raios r e r' - figura abaixo).



Outra possibilidade seria termos uma tangência entre as circunferências e uma delas ser interior a outra, por exemplo $\mathcal{C}'$ está no interior de $\mathcal{C}$ (ou seja, a distância entre os centros O e O' seria a diferença dos raios r e r' - figura abaixo).

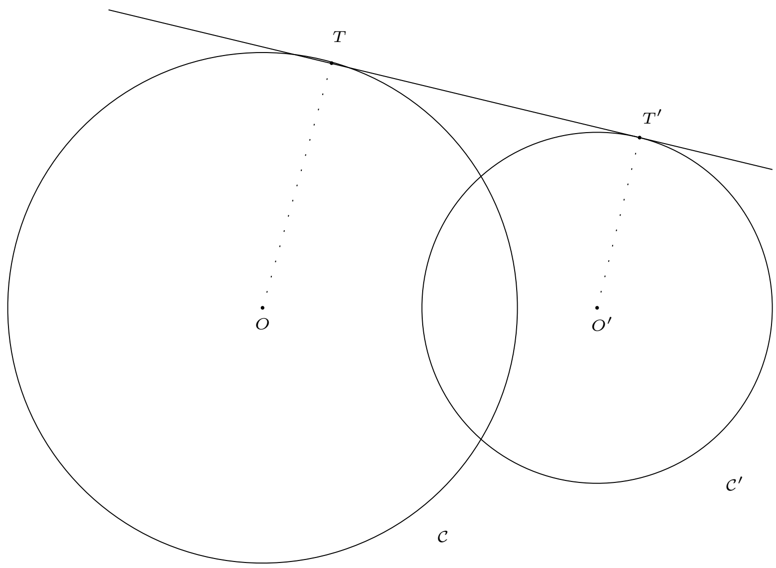


Em qualquer um dos casos acima, a reta tangente comum às duas circunferências será a reta tangente a uma delas no ponto de intersecção das mesmas.

III. As circunferências são secantes.

Neste caso agiremos de modo semelhante ao do item I.

Deixaremos os detalhes como exercício (a seguir) para o leitor.



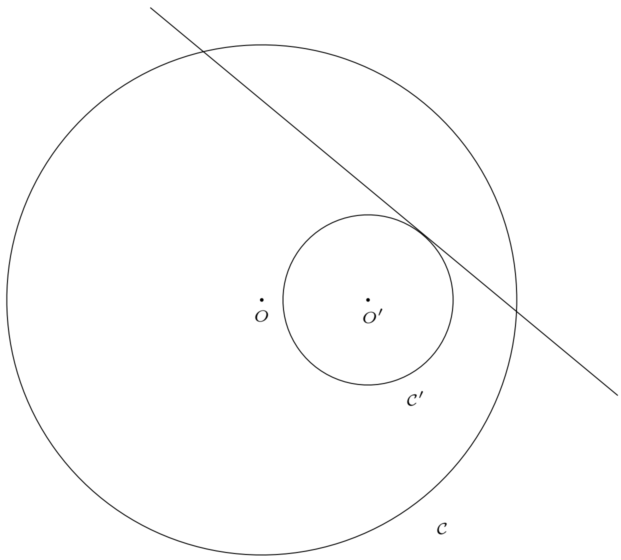
Exercício: **Valor: +0.5**

Fazer a construção do item II acima.

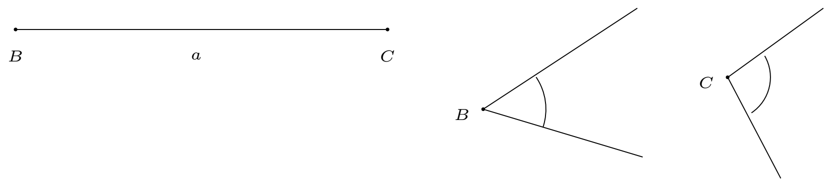
IV. Uma das circunferências está no interior da outra.

Suponhamos que a circunferência $\mathcal{C}$ contenha, no seu interior, a circunferência $\mathcal{C}'$.

Neste caso não existirá uma reta tangente comum pois toda reta tangente a circunferência $\mathcal{C}'$ será secante a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo).

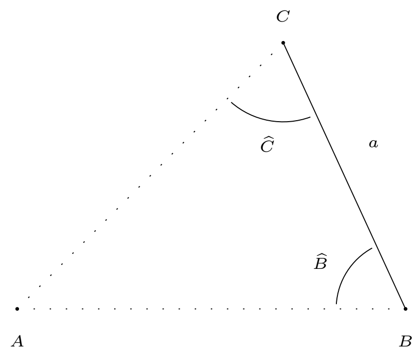


Exercício 1.10.12 *Construir um triângulo* ΔABC *conhecendo-se o lado as medidas do lado* $\overline{BC}$*, isto é* $\underline{a}$*, dos ângulos* $\widehat{B} = \widehat{CBA}$ *e* $\widehat{C} = \widehat{ACB}$*.*



Resolução:

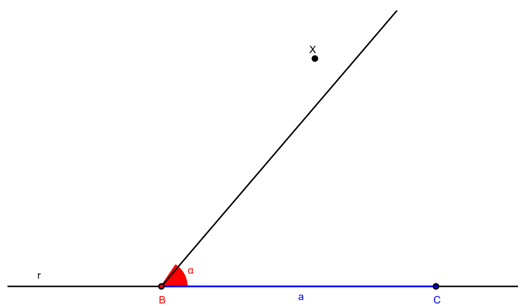
Um esboço da situação do problema acima é dado na figura abaixo:



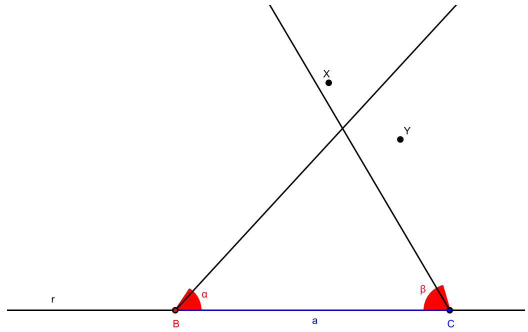
A construção pode ser feita da seguinte maneira:

1. Escolha um ponto B sobre uma reta $\underline{r}$ e encontremos o ponto C sobre a mesma de tal modo que $BC = a$ (figura abaixo);

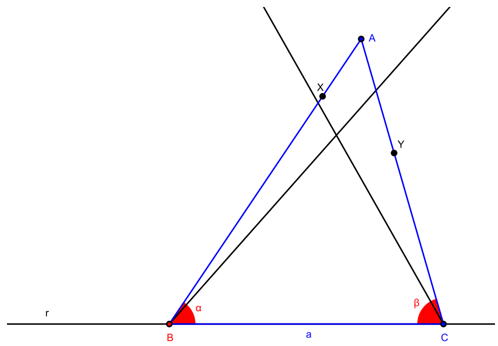
2. Encontremos um ponto X tal que o ângulo $\widehat{CBX} = \widehat{B}$ (transportamos o ângulo $\alpha \doteq \widehat{B}$ - figura abaixo);



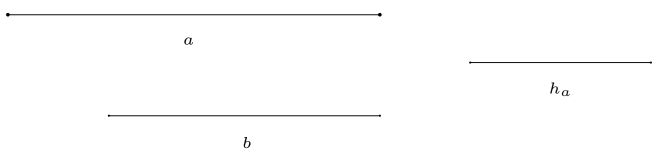
3. Encontremos um ponto Y no mesmo semi-plano determinado pela reta que contém o segmento $\overline{BC}$ e o ponto X, de tal modo que o ângulo $\widehat{YCB} = \widehat{C}$ (transportamos o ângulo $\beta \doteq \widehat{C}$ - figura abaixo);



4. A intesercção das semi-retas com extremidade nos pontos B e e no ponto C que contém os pontos X e Y, respectivamente, estará o outro vértice, A, do triângulo ΔABC, terminando a construção.

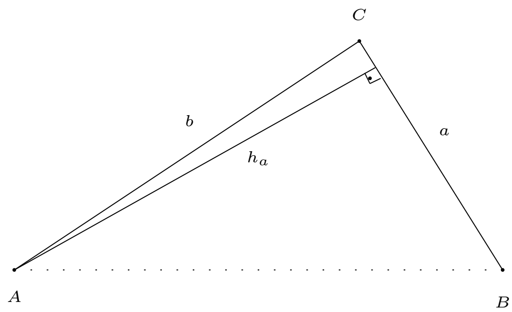


Exercício 1.10.13 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, isto é, $\underline{a}$ e $\underline{b}$, respectivamente, e o comprimento h_a da altura relativa ao lado $\overline{BC}$.*



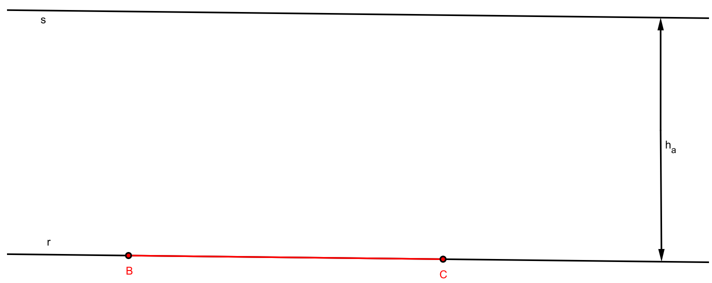
Resolução:

Um esboço da situação é dado pela figura abaixo:

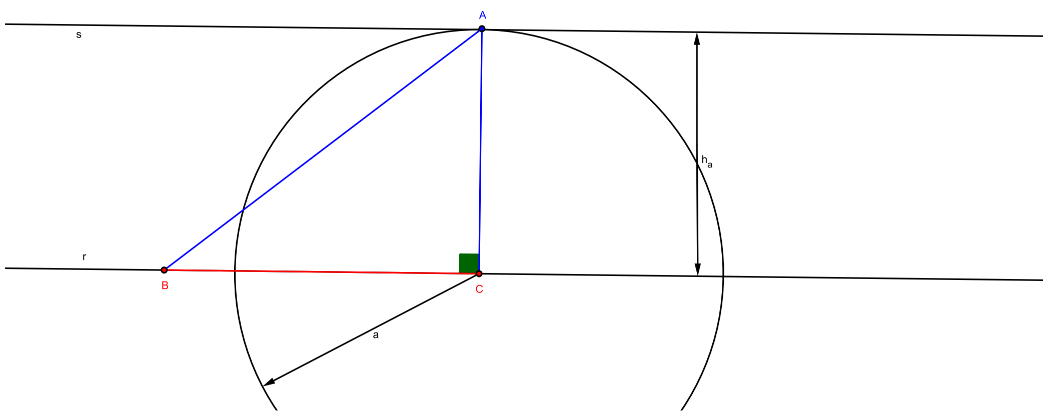


1. Escolhamos um ponto B sobre uma reta $\underline{r}$ e encontremos um ponto C sobre a mesma de tal modo que $BC = a$ (figura abaixo);

2. Tracemos uma reta $\underline{s}$, paralela a reta $\underline{r}$ que dista h_a da reta $\underline{r}$ (figura abaixo);

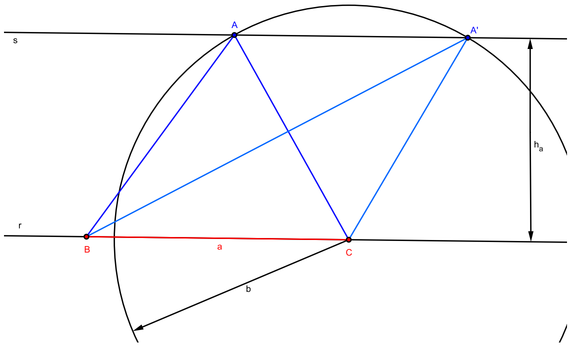


3. Tracemos a circunferência de centro no ponto C e raio $\underline{b}$ que encontrará a reta $\underline{s}$ num ponto que será o vértice A do triângulo ΔABC (figura abaixo).

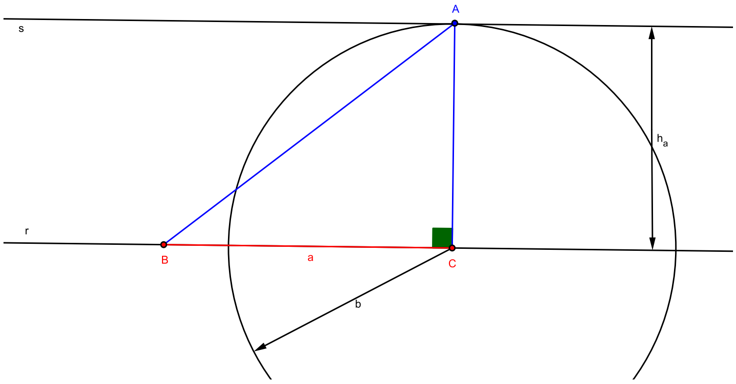


Observação 1.10.5 *Observemos que poderemos ter:*

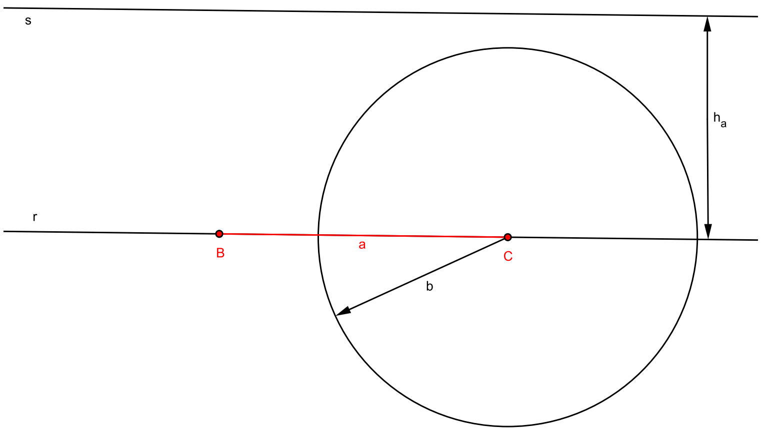
1. *dois pontos, A e A', se $h_a < b$, , ou seja, dois triângulos, ΔABC e $\Delta A'BC$, com as propriedades requeridas (figura abaixo);*



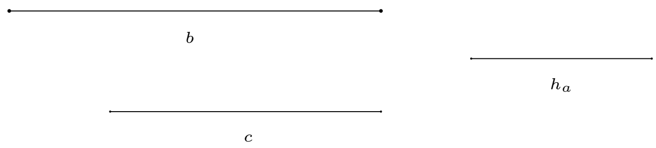
2. *um único ponto A, se $h_a = b$, ou seja, um único triângulo ΔABC (que será retângulo no vértice C) com as propriedades requeridas (figura abaixo);*



3. *nenhum ponto se $h_a > b$, ou seja, nenhum triângulo ΔABC com as propriedades requeridas (figura abaixo).*

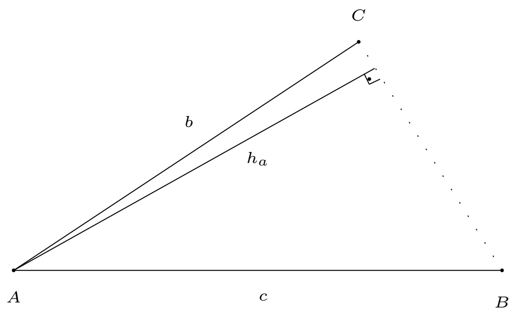


Exercício 1.10.14 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos dos lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, ou seja, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ e o comprimento h_a da altura relativa ao lado $\overline{BC}$.*



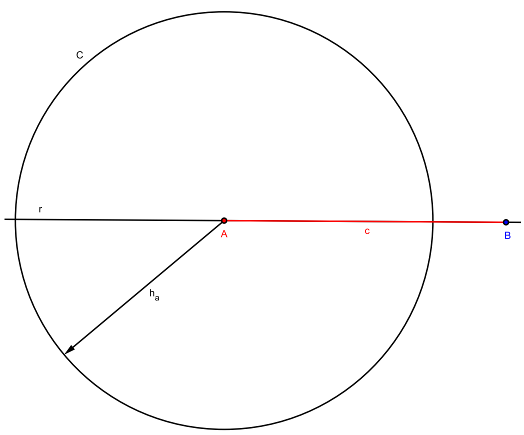
Resolução:

Um esboço da situação é dado pela figura abaixo:

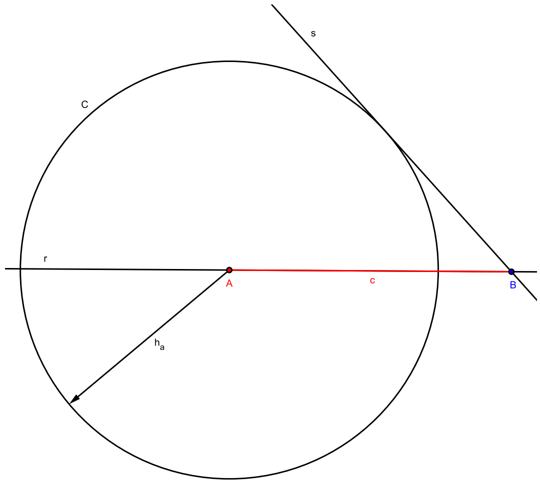


1. Escolhamos um ponto A sobre uma reta $\underline{r}$ e encontremos um ponto B sobre a mesma de tal modo que $AB = c$ (figura abaixo);

2. Tracemos a circunferência $\mathcal{C}$, de centro no ponto A e raio h_a (figura abaixo);

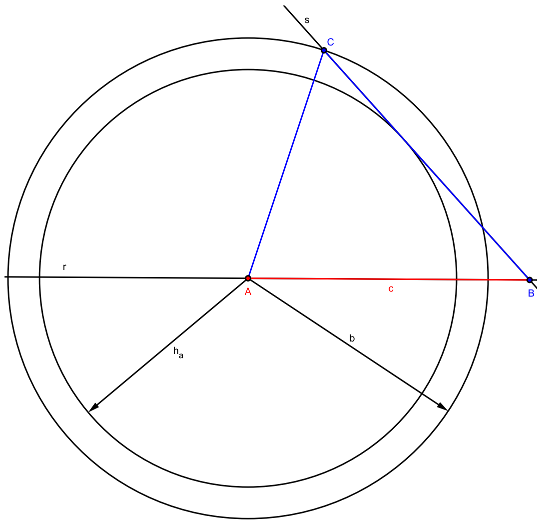


3. Encontremos a reta $\underline{s}$ tangente a circunferência $\mathcal{C}$ e que contém o ponto B (figura abaixo);



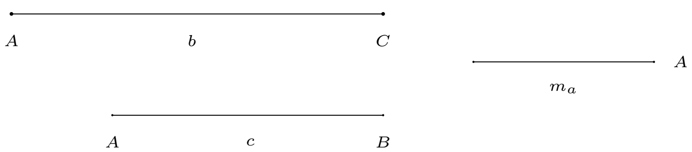
4. Tracemos a circunferência $\mathcal{C}'$ de centro no ponto A e raio b.

   O vértice C estará na intersecção da reta $\underline{s}$ com a circunferência $\mathcal{C}'$ (pode existir um outro ponto), com isto obtemos o triângulo ΔABC é o triângulo procurado (figura abaixo).



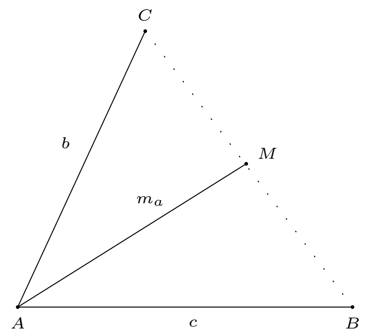
Observemos que de fato, o triângulo encontrado tem as propriedades requeridas pois: por construção temos que $AB = c$, $AC = b$, além disso o segmento $\overline{BC}$ é tangente a circunferência $\mathcal{C}$ de centro em A e raio h_a assim segue que a altura relativamente ao vértice A (ou ao lado $\overline{BC}$) será h_a.

Exercício 1.10.15 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos dos lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, ou seja, $\underline{b}$ e $\underline{c}$, respectivamente, e a mediana m_a relativa ao lado $\overline{BC}$.*

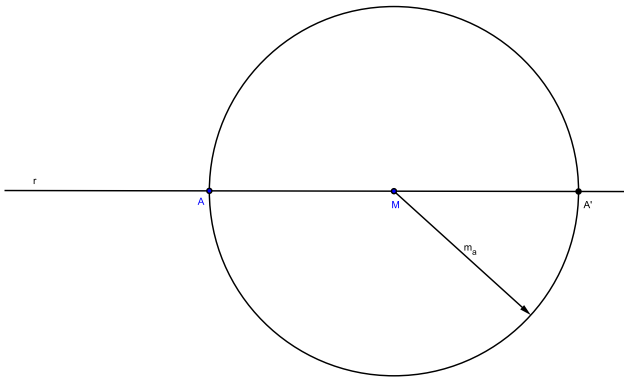


<u>Resolução:</u>

Geometricamente temos a seguinte situação:

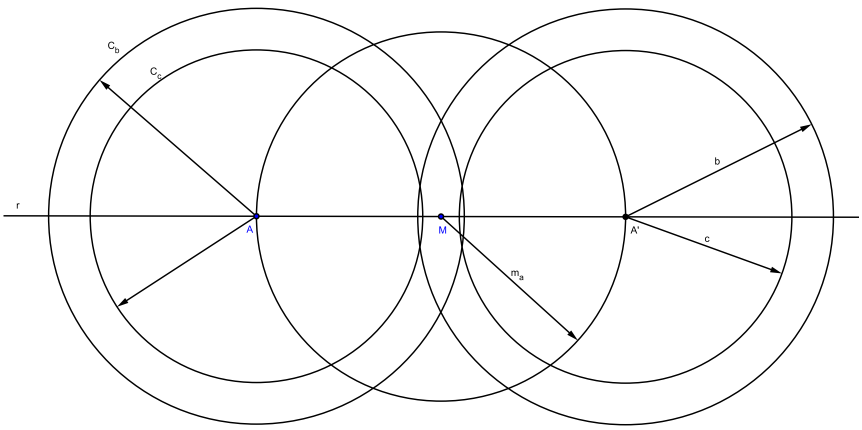


1. Consideremos sobre uma reta $\underline{r}$ o ponto M e os pontos, A e A', de tal M é o ponto médio do segmento $\overline{AA'}$ e $AM = A'M = m_a$ (figura abaixo);

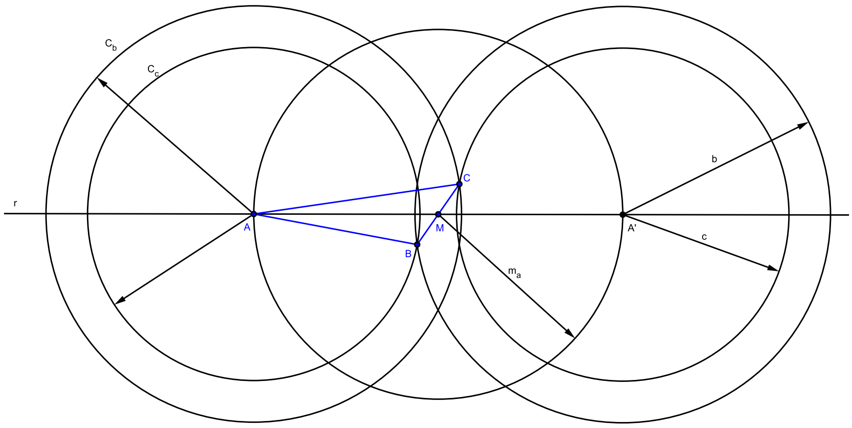


2. Tracemos as circunferências, $\mathcal{C}_b$ e $\mathcal{C}_c$ de centro em A e raios $\underline{b}$ e $\underline{c}$, respectivamente.

   De modo análgo tracemos as circunferências, $\mathcal{C}'_b$ e $\mathcal{C}'_c$ de centro em A' e raios $\underline{b}$ e $\underline{c}$, respectivamente (figura abaixo);



3. Na intersecção das circunferências $\mathcal{C}_b$ com $\mathcal{C}'_c$ obtemos o vértice C e na intersecção das circunferências $\mathcal{C}_c$ com $\mathcal{C}'_b$ obtemos o vértice B, onde os pontos B e C são escolhidos nos semi-planos opostos relativamente à reta $\underline{r}$ (figura abaixo).



Observemos que o triângulo ΔABC tem as propriedades requeridas pois, por construção, temos que $AC = b$, $AB = c$ e $AM = m_a$.

Além disso, M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, pois $ACA'B$ é um paralelogramo já que os triângulos $\Delta ACA'$ e $\Delta AA'B$ são congruentes (caso LLL) e assim suas diagonais cruzam-se nos seus respectivos pontos médios.

Exercício 1.10.16 (**Diego da Silva Oliveira**) *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é $\underline{a}$, a medida do ângulo $\widehat{A}$ e o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, m_a.*

Resolução:

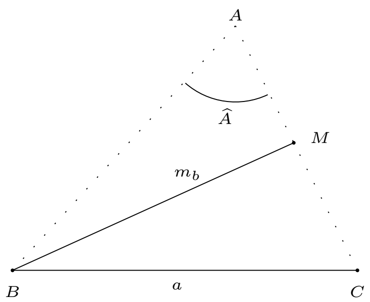
Exercício 1.10.17 (**Lauriane dos Santos Yamane**) *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos $BC = a$, $AC = b$ e o ângulo $\widehat{A}$.*

Resolução:

Exercício 1.10.18 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos do lado $\overline{BC}$, a saber, $\underline{a}$, a medida do ângulo $\widehat{A}$ e o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{AC}$, isto é, m_b.*

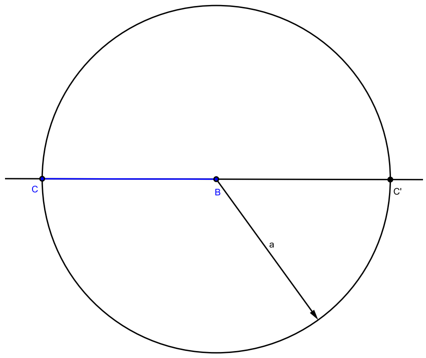
Resolução:

Geometricamente temos a seguinte situação:

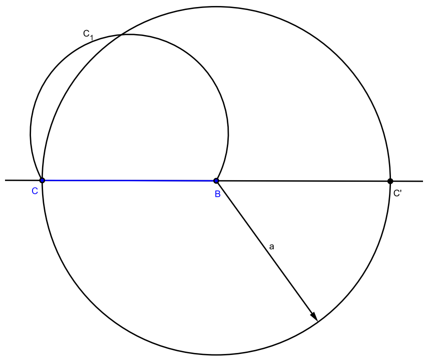


Neste caso podemos agir da seguinte forma:

1. Sobre uma reta $\underline{r}$, consideremos os pontos B, C e C' de tal modo que o ponto B seja o ponto médio do segmento $\overline{CC'}$ e $C'B = BC = a$ (figura abaixo):



2. Construamos o arco capaz, $\mathcal{C}_1$ do ângulo $\widehat{A}$ associado ao segmento $\overline{BC}$ (figura abaixo);



3. A circunferência $\mathcal{C}$ de centro no ponto C' e raio $2m_b$ intercepta o arco capaz $\mathcal{C}_1$ no ponto A e assim obtemos o triângulo ΔABC com as propriedades requeridas (figura abaixo).

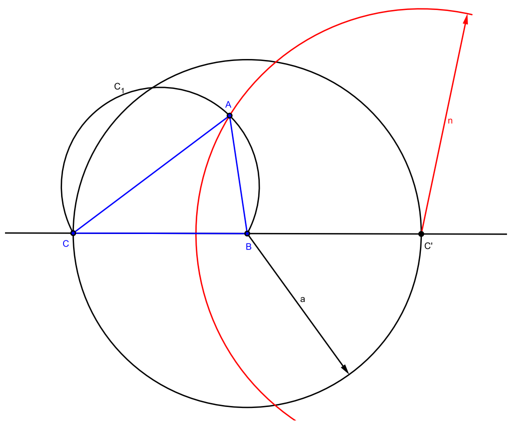
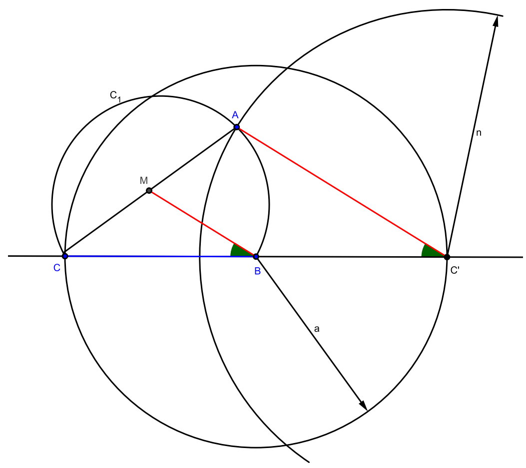


Figura 1.2: $C'A = 2m_b$

Mostremos que o triângulo acima ΔABC têm as propriedades requeridas.
Observemos que $BC = a$ e $\widehat{A}$ são os valores dados, por construção.
Para completar, seja M um ponto sobre o segmento $\overline{AC}$ tal que $\widehat{MBC} = \widehat{AC'B}$ (figura abaixo).



Logo os triângulo $\Delta AC'C$ e ΔMBC são semelhantes (pois as retas que contém os pontos M, B e os pontos A, C' são paralelas) assim lados correspondentes guardam a mesma relação.

Em particular:

$$\frac{MB}{AC'} = \frac{BC}{C'C} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \quad \overset{[AC'=2m_b]}{\Longrightarrow} \quad \frac{MB}{2m_b} = \frac{1}{2},$$

ou seja, $MB = m_b$.

Por outro lado,

$$\frac{MC}{AC} = \frac{BC}{C'C} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad MC = \frac{AC}{2},$$

ou seja, M é ponto médio do segmento $\overline{AC}$, mostrando que o triângulo ΔABC obtido acima satisfaz as propriedades requeridas.

Exercício 1.10.19 (**Marilia Pelinson Tridapalli**) *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, ou seja, $\underline{a}$ e os comprimentos das medianas m_b e m_c relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.*

Resolução:

Exercício 1.10.20 (**Marina Ferrucci Bega**) *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é, $\underline{a}$, e os comprimentos das alturas, h_b e h_c, relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.*

Resolução:

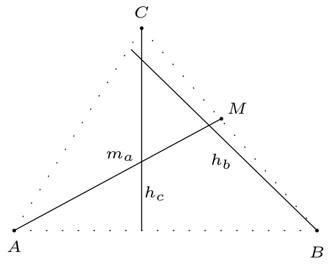
Exercício 1.10.21 (**Valdir José de Oliveira**) *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, m_a e o comprimento das alturas relativas aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, ou seja, h_a e h_b, respectivamente.*

Resolução:

Exercício 1.10.22 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, m_a, e o comprimento das alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, ou seja, h_b e h_c, respectivamente.*

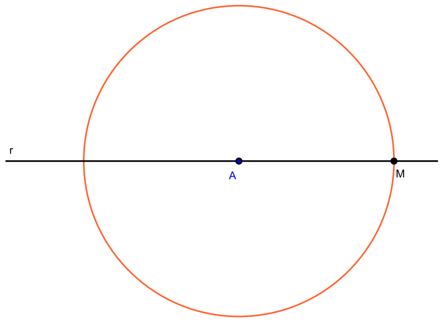
Resolução:

Geometricamente, temos a seguinte situação:

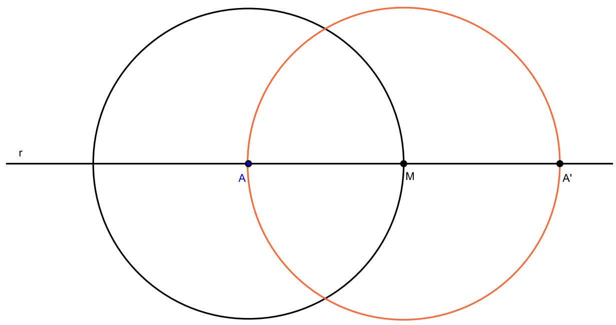


Passemos a construção:

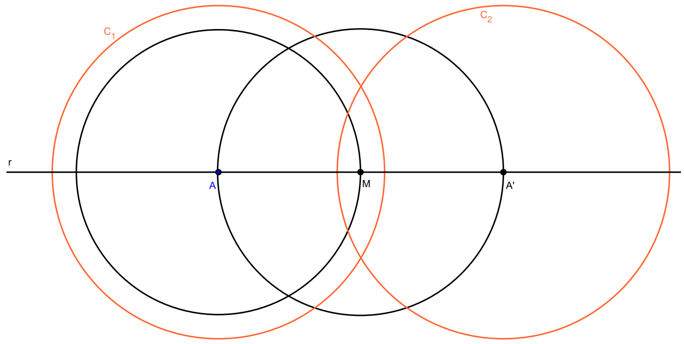
1. Consideremos, sobre uma reta $\underline{r}$, os pontos A e M de tal modo que $AM = m_a$ (figura abaixo);



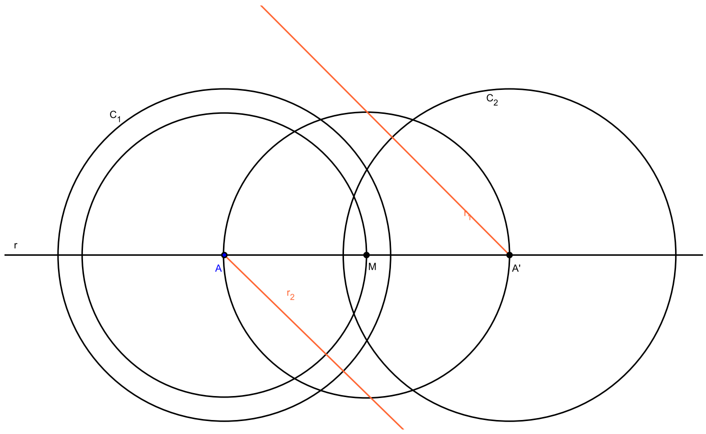
2. Encontremos o ponto A' sobre a reta $\underline{r}$ tal que $A'M = AM$ (ou seja, o ponto A' é o simétrico do ponto A em relação ao ponto M - figura abaixo);



3. Consideremos as circunferências, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, de centros em A e A' e raio h_b (figura abaixo);

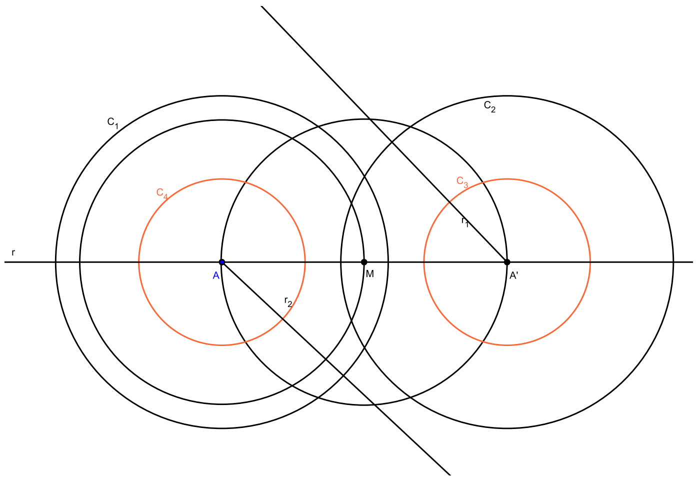


4. Tracemos as semireta-retas, r_1, tangente a circunferência $\mathcal{C}_1$ que tem extremo no ponto A' e r_2, tangente a circunferência $\mathcal{C}_2$ que tem extremo no ponto A de tal modo que r_1 e r_2 estejam em semi-planos opostos relativamente à reta $\underline{r}$ (figura abaixo);

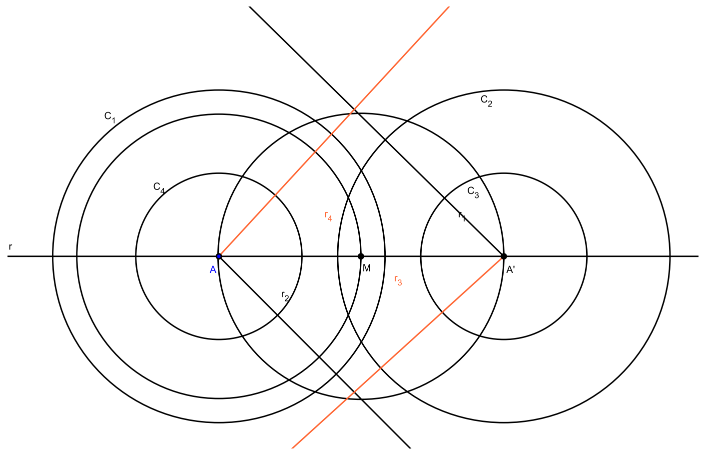


Sabemos que o vértice B deverá estar sobre a reta r_1 e o vértice C deverá estar sobre a reta r_2, pois deste modo a altura relativamente ao lado $\overline{AC}$ será h_b e além disso sobre um segmento que contenha o ponto M pois deste modo o ponto M será ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

5. Consideremos as circunferências, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$, de centros em A e A' de raio h_c (figura abaixo);

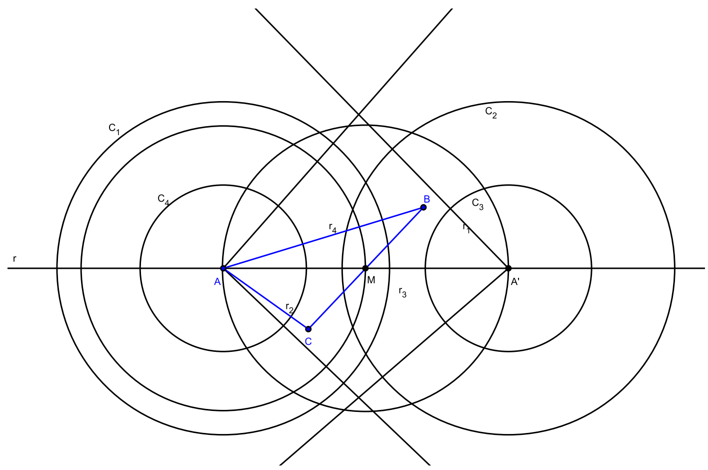


6. Tracemos às semi-retas reta, r_3, tangente a circunferência $\mathcal{C}_3$ que tem extremidade no ponto A' e r_4, tangente a circunferência $\mathcal{C}_4$ que tem extremidade no ponto A de tal modo que as semi-retas r_1, r_4 estejam em um mesmo semi-plano relativamente à reta $\underline{r}$ e o mesmo ocorra com as semi-retas r_2 e r_3 (figura abaixo);



Sabemos que o vértice B deverá estar sobre a reta r_3 e o vértice C deverá estar sobre a reta r_4, pois deste modo a altura relativamente ao lado $\overline{AB}$ será h_c e sobre um segmento que contenha o ponto M pois deste o ponto M será ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

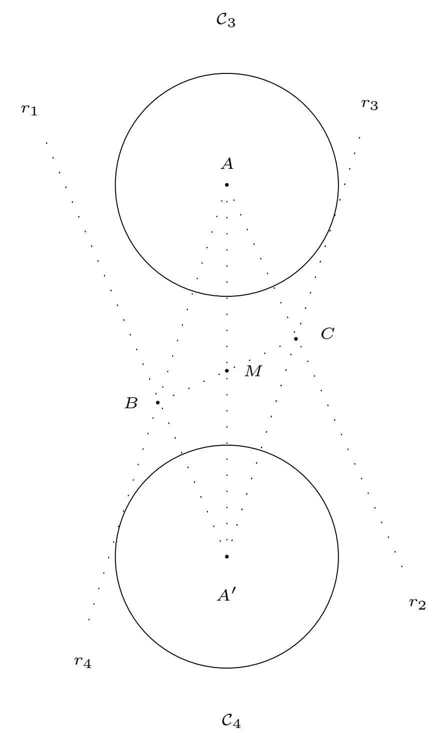
7. Na intersecção das retas r_1 e r_4 temos o vértice B e na intersecção das retas r_2 e r_3 temos o vértice C;



O triângulo ΔABC tem as propriedades pedidas pois, $ACA'B$ é um paralelogramo (as retas r_1, r_2 são paralelas assim como as retas r_3 e r_4).

Logo o ponto M é ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e assim $AM = m_a$ será o comprimento da mediana relativamente ao lado $\overline{BC}$.

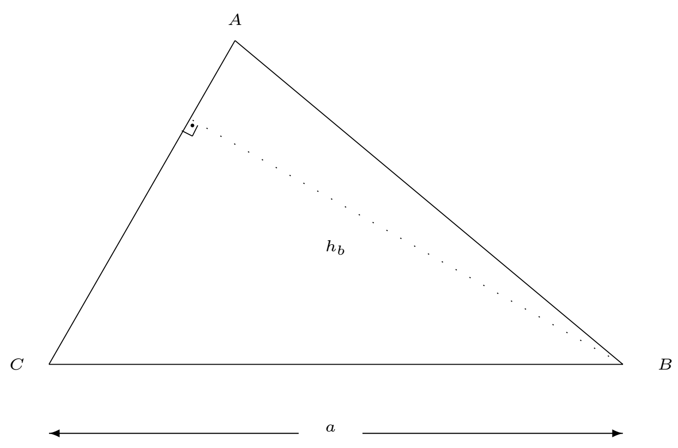
A altura relativamente ao lado $\overline{AC}$ é h_b, pois as retas r_1 e r_2 são paralelas e distam h_b e a altura relativamente ao lado $\overline{AB}$ é h_c, pois as retas r_3 e r_4 são paralelas e distam h_c, logo o triângulo ΔABC tem as propriedades requeridas.



Exercício 1.10.23 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é $\underline{a}$, a soma dos comprimentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, isto é, $s = b + c$, e a altura relativamente ao lado $\overline{AC}$, ou seja h_b.*

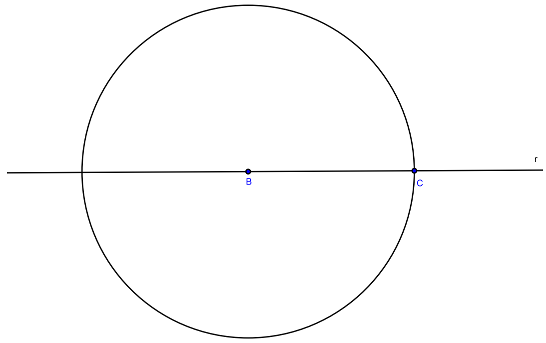
Resolução:

Geometricamente temos a seguinte situação:

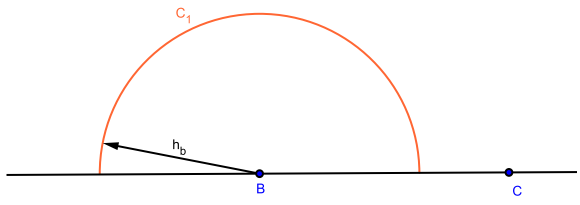


Considermos a seguinte construção: $s = b + c$

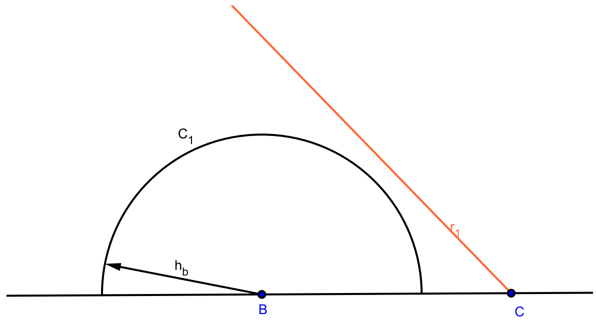
1. Sobre uma reta $\underline{r}$ escolhamos os pontos B e C de tal modo que $BC = a$ (figura abaixo);



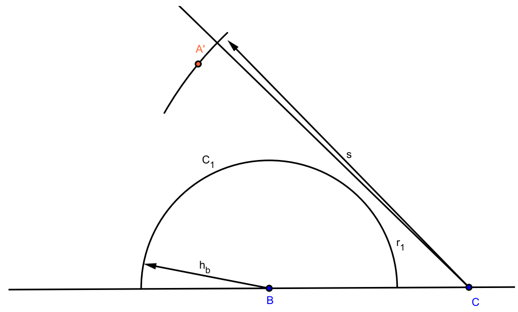
2. Tracemos a semi-circunferência $\mathcal{C}_1$ de centro no ponto B e raio h_b (figura abaixo);



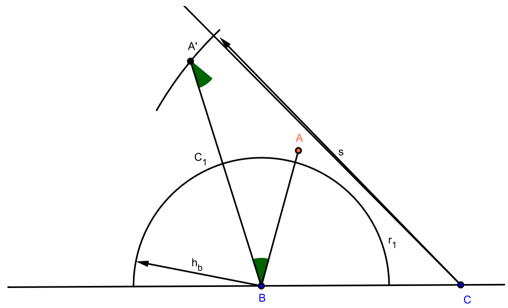
3. Pelo ponto C tracemos a semi-reta r_1 tangente a semi-circunferência $\mathcal{C}_1$ (que estará contida no mesmo semi-plano da semi-circunferência - figura abaixo);



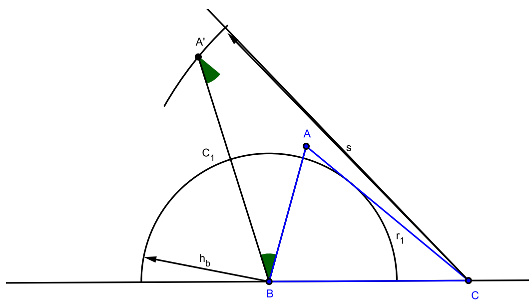
4. Sobre a semi-reta r_1 acima, encontremos o ponto A' de modo que $CA' = s$ (figura abaixo);



5. Trasportemos o ângulo $\widehat{BA'C}$ para o vértice B, mais claramente, encontremos o ponto A sobre a semi-reta r_1 tal que $\widehat{ABA'} = \widehat{BA'C}$ (figura abaixo);



Com isto o triângulo $\Delta A'AB$ será isóceles, ou seja, $AB = AA'$ e o triângulo procurado será ΔABC (figura abaixo).



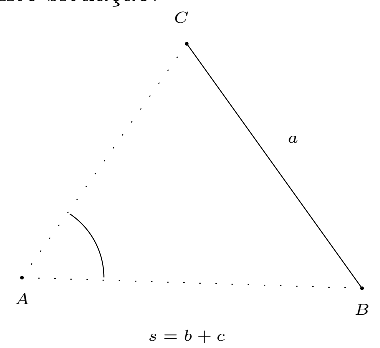
De fato, o triângulo ΔABC terá as propriedades requeridas pois, por construção $BC = a$, a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ é h_b (pois a reta r_1 é tangente à circunferência $\mathcal{C}_1$) e

$$AC + AB \overset{[AB=AA']}{=} CA + AA' = b + c = s.$$

Exercício 1.10.24 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é, $\underline{a}$, a soma dos comprimentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, isto é, $s = c + b$ e o ângulo $\widehat{A} = \widehat{BAC}$.*

Resolução:

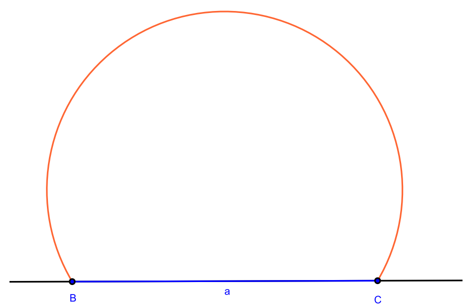
Geometricamente temos a seguinte situação:



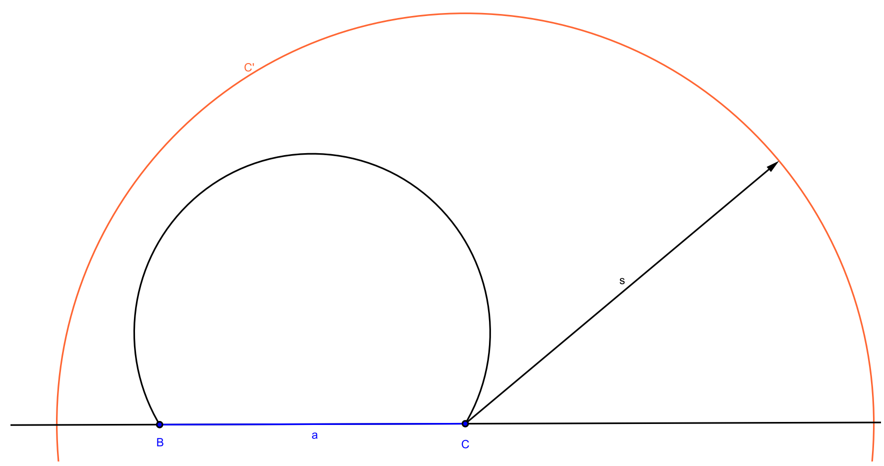
Passemos a construção:

1. Consideremos sobre uma reta $\underline{r}$ os pontos B e C de tal modo que $BC = a$ (figura abaixo);

2. Construamos o arco capaz, $\mathcal{C}$, do ângulo $\widehat{A}$ associado ao segmento $\overline{BC}$ (figura abaixo);



3. Consideremos a circunferência, $\mathcal{C}'$ de centro no ponto C e raio $s = b + c$ (figura abaixo);



4. Construamos o arco capaz, $\mathcal{C}''$, do ângulo $\dfrac{\widehat{A}}{2}$ associado ao segmento $\overline{BC}$;

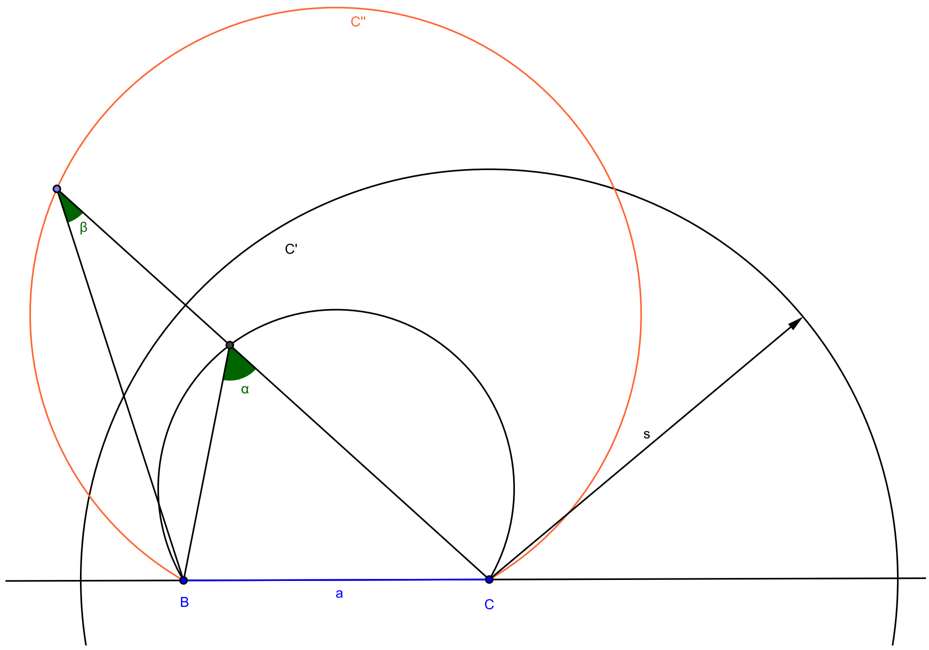
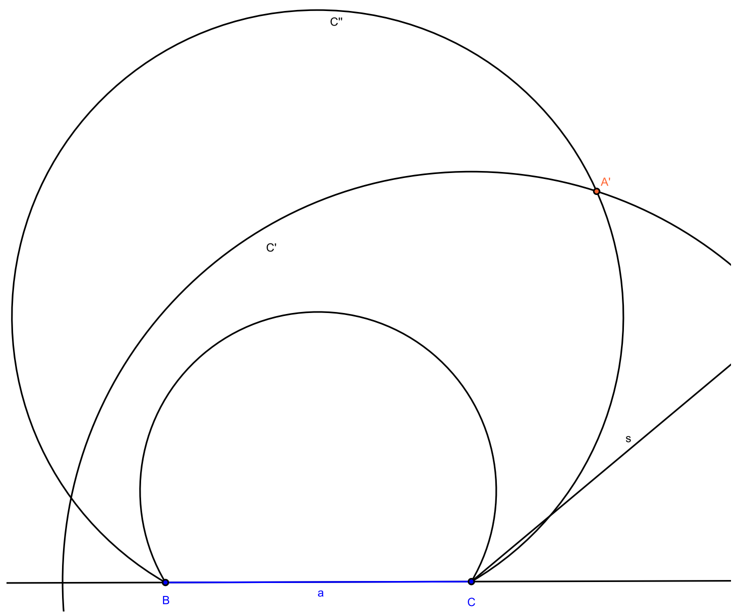
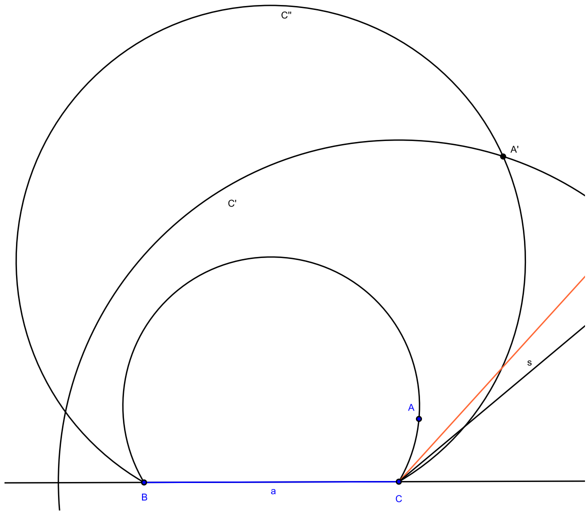


Figura 1.3: $\beta = \frac{\alpha}{2}$

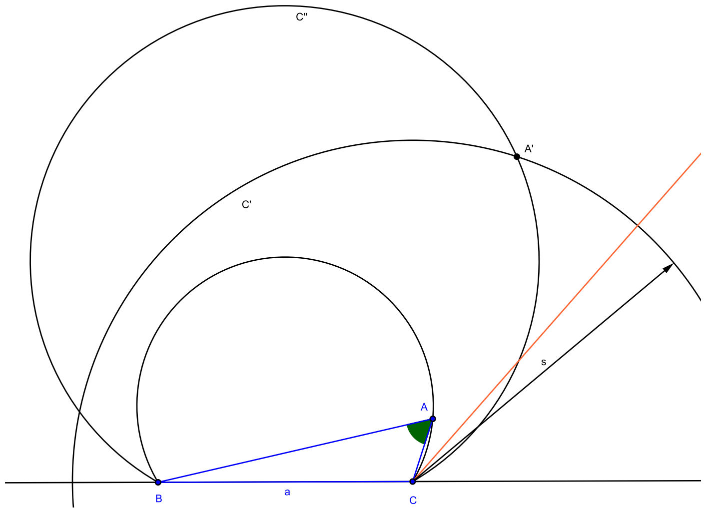
5. Consideremos o ponto A' obtido da intersecção do arco capaz do ângulo $\dfrac{\widehat{A}}{2}$ associado ao segmento $\overline{BC}$, $\mathcal{C}''$, com a circunferência $\mathcal{C}'$ (figura abaixo);



6. A reta que passa pelos pontos A' e C interceptará o arco capaz $\mathcal{C}$ no ponto A (figura abaixo);



O triângulo ΔABC têm as propriedades requeridas (figura abaixo).



Para mostrar isto, observemos que $\widehat{A'AB} = \pi - \widehat{A}$ (figura acima).

Mas, por construção, $\widehat{BA'A} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$ (figura abaixo).

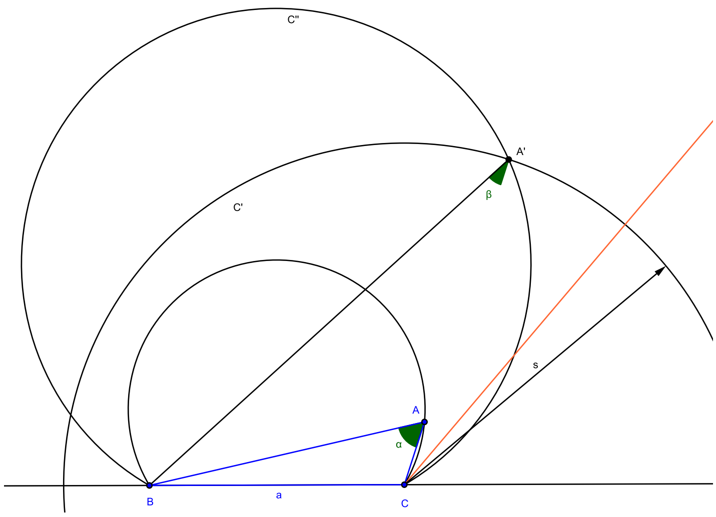


Figura 1.4: $\beta = \frac{\alpha}{2}$

Logo

$$\widehat{ABA'} = \pi - \left[\widehat{BA'A} + \widehat{A'AB}\right] = \pi - \left\{\frac{\widehat{A}}{2} + \left[\pi - \widehat{A}\right]\right\} = \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{BA'A}$$

o que mostra que o triângulo $\Delta A'AB$ é isósceles, logo temos $AB = A'A$.

Portanto

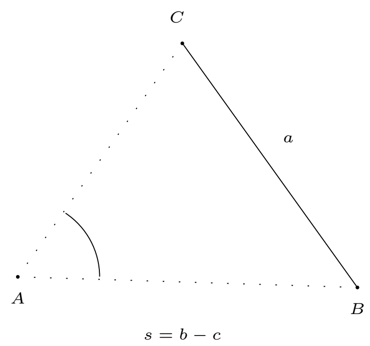
$$BA + AC = A'A + AC = s,$$

ou seja, o triângulo ΔABC tem as propriedades requeridas.

Exercício 1.10.25 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é $\underline{a}$, o ângulo $\widehat{A}$ e a diferença dos comprimentos dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, isto é, $s = b - c$.*

Resolução:

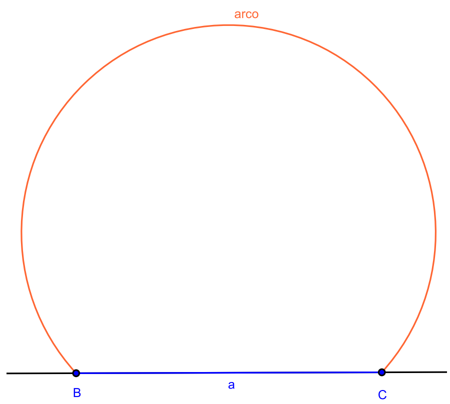
Geometricamente temos a seguinte situação:



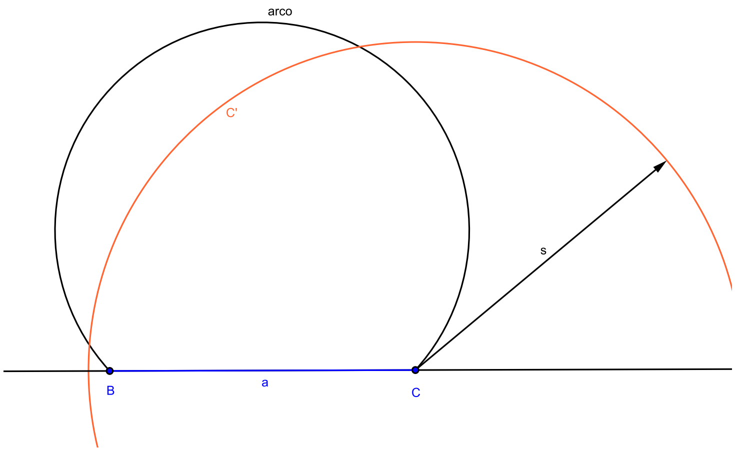
Passemos a construção:

1. Consideremos sobre uma reta $\underline{r}$ os pontos B e C de tal modo que $BC = a$ (figura abaixo);

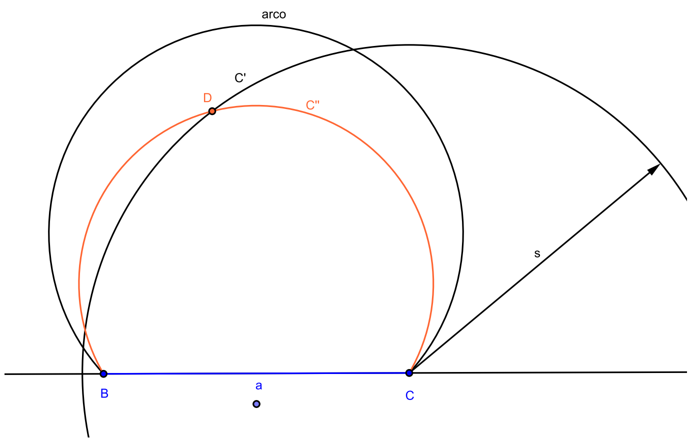
2. Construamos o arco capaz, $\mathcal{C}$, do ângulo $\widehat{A}$ associado ao segmento $\overline{BC}$ (figura abaixo);



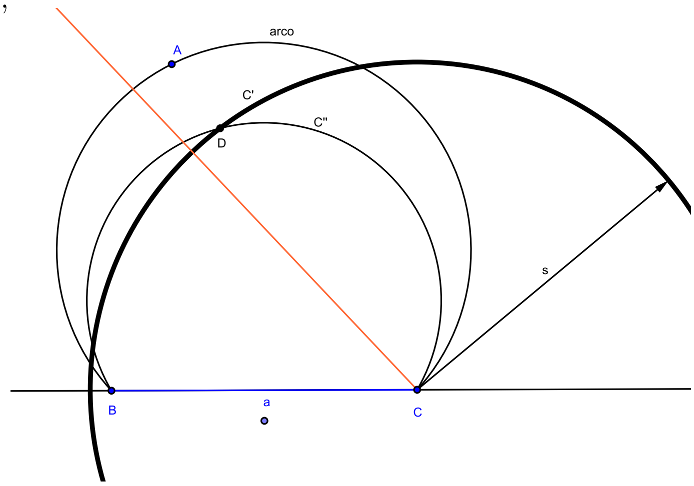
3. Tracemos a circunferência, $\mathcal{C}'$, de centro no ponto C e raio $s = b - c$ (figura abaixo);



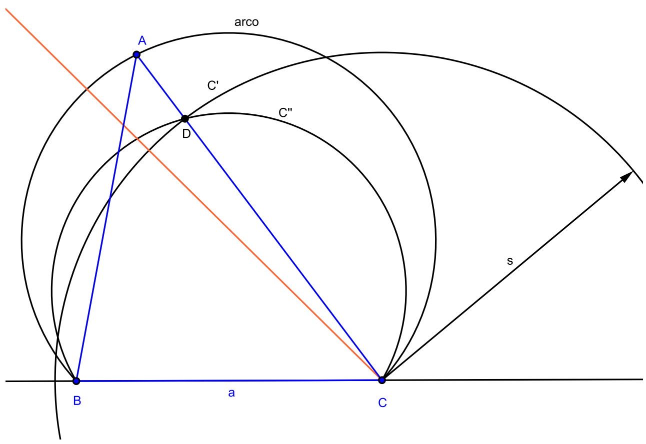
4. Tracemos o arco capaz, $\mathcal{C}''$, do ângulo $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\widehat{A}}{2}$ associado ao segmento $\overline{BC}$ que encontrará a circunferência $\mathcal{C}'$ no ponto D (figura abaixo);



5. A reta que passa pelos pontos C e D encontrará o arco capaz do ângulo $\widehat{A}$, isto é, $\mathcal{C}$, no ponto A (figura abaixo);



Afirmamos que o triângulo ΔABC tem as propriedades requeridas.



De fato, por construção $BC = a$.
Observemos que (veja figura abaixo)

$$\widehat{ADB} = \pi - \widehat{BDC} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

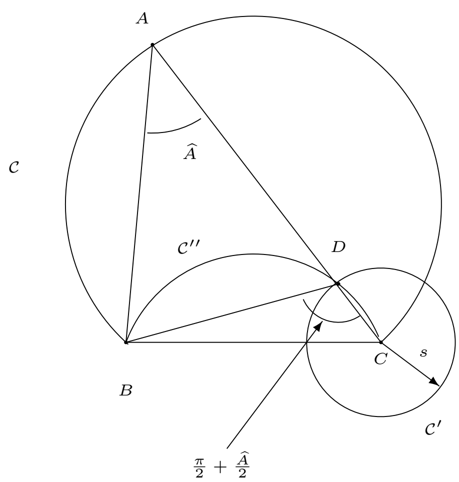
Logo

$$\widehat{ABD} = \pi - \widehat{BAD} - \widehat{ADB} = \pi - \widehat{A} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2},$$

ou seja, o triângulo ΔABD é isósceles.
Logo $AB = AD$, assim

$$AC - AB = AC - AD = DC = s$$

dado, concluindo a verificação.



Exercício 1.10.26 (**Bruno Damien da Costa Paes Jurgensen**) *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o perímetro $AB + BC + CA = 2p$ e as medidas dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.*

Resolução:

Exercício 1.10.27 (**Bruno Damien da Costa Paes Jurgensen**) *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o perímetro $AB + BC + CA = 2p$ e a medida do ângulo $\widehat{A}$ e o comprimento da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, h_a.*

Resolução:

Exercício 1.10.28 (**Hugo Cesar Faggian**) *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é, $\underline{a}$, o comprimento da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, h_a, e a medida do raio R da circunferência circunscrita no mesmo.*

Resolução:

Exercício 1.10.29 (**Sergio Luiz Daltoso Junior**) *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, h_a, da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, m_a e a medida do raio R da circunferência circunscrita no mesmo.*

Resolução:

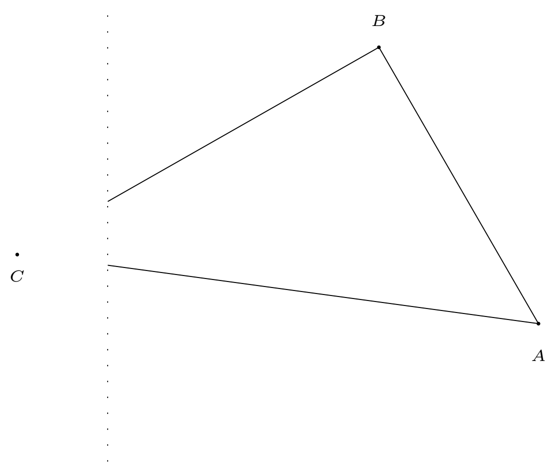
Exercício 1.10.30 (**Lucas Vioto dos Santos Ribeiro**) *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se a medida do ângulo $\widehat{A}$, o comprimento do lado $\overline{AC}$, isto é, $\underline{b}$, e a medida do raio $\underline{r}$ da circunferência inscrita no mesmo.*

Resolução:

Exercício 1.10.31 (**Sergio Luiz Daltoso Junior**) *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, h_a, da mediada relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, m_a e da bissetriz do ângulo $\widehat{A}$.*

Resolução:

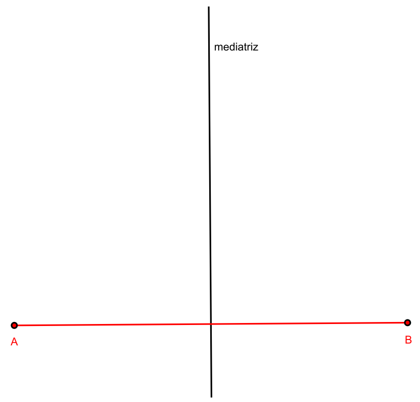
Exercício 1.10.32 *Determinar o raio de uma circunferência circunscrita o triângulo ΔABC cujo vértice C é inacessível (figura abaixo).*



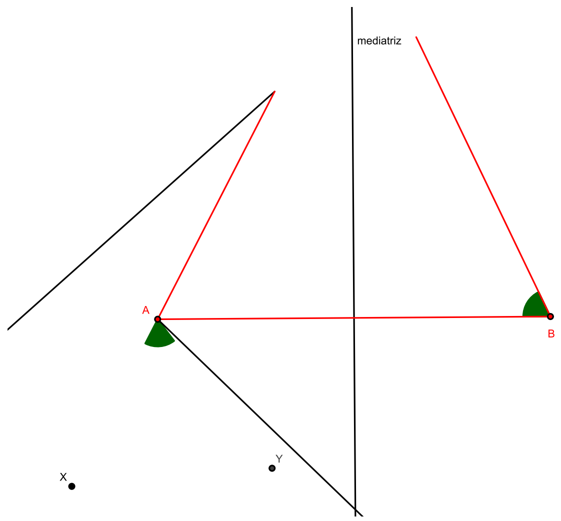
Resolução:

Neste caso agiremos da seguinte forma:

1. Encontremos a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ (figura abaixo);



2. Encontre o ponto X na semi-reta que está contida na reta que contém os pontos A e C, de extremidade no ponto A, que não contém o ponto C e um ponto Y no semi-plano determinado pela reta que passa pelos pontos A e C que contém o ponto B de tal modo que o ângulo $\widehat{YAX} = \widehat{B}$ (tranporte do ângulo $\widehat{B}$ - figura abaixo);



Como conseqüência temos que o ângulo $\widehat{BAY} = \widehat{C}$.

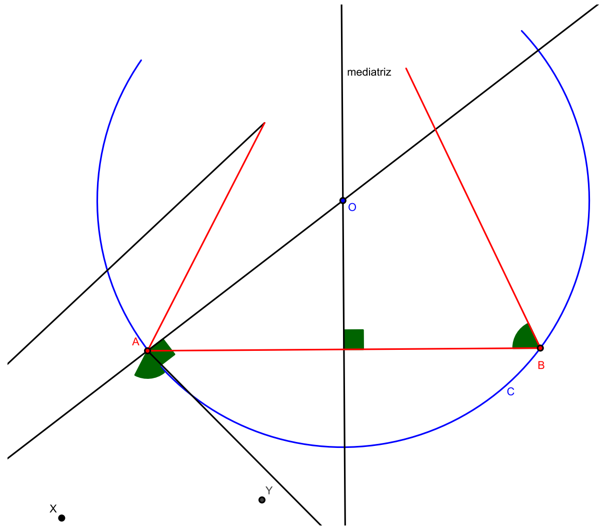
De fato, pois a soma dos ângulo internos do triângulo ΔABC é π, mas

$$\widehat{A} + \widehat{BAY} + \widehat{YAX} = \pi = \underbrace{\widehat{BAC}}_{\widehat{A}} + \widehat{BAY} + \underbrace{\widehat{YAX}}_{\widehat{B}}, \quad \text{assim} \quad \widehat{BAY} = \widehat{C}.$$

Deste modo obtivemos a medida do ângulo $\widehat{C}$;

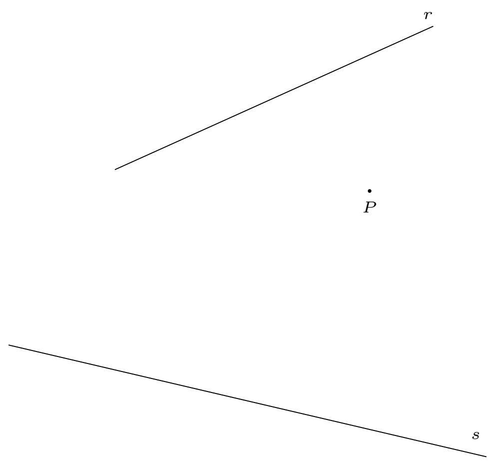
3. Encotremos o centro O do arco capaz, $\mathcal{C}$, do ângulo $\widehat{BAY} = \widehat{C}$ associado ao segmento $\overline{AB}$ (figura abaixo);

   O centro, O, da circunferência que determina o arco capaz acima (obtido da intersecção da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ com a perpendicular a reta que passa pelos pontos A e Y pelo ponto A) será o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC.



A demonstração é imediata já que o vértice deverá estar sobre o arco capaz $\mathcal{C}$.

Exercício 1.10.33 (**Lauriane dos Santos Yamane**) *Traçar por um ponto P uma reta que passe pelo ponto de interseção (inacessível) das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$.*



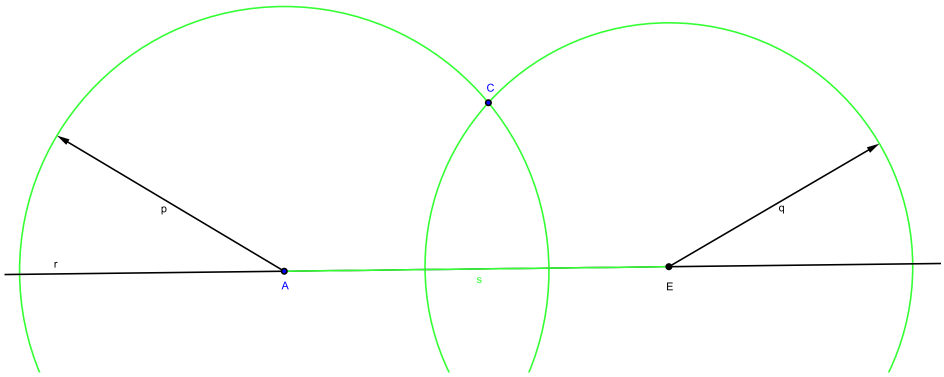
Resolução:

Exercício 1.10.34 *Construir um trapézio $ABCD$ conhecendo-se a soma das bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, isto é, $AB + CD = s$, o comprimento das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, isto é, $AC = p$ e $BD = q$ e o comprimento do lado $\overline{AD}$, ou seja, $AD = a$.*

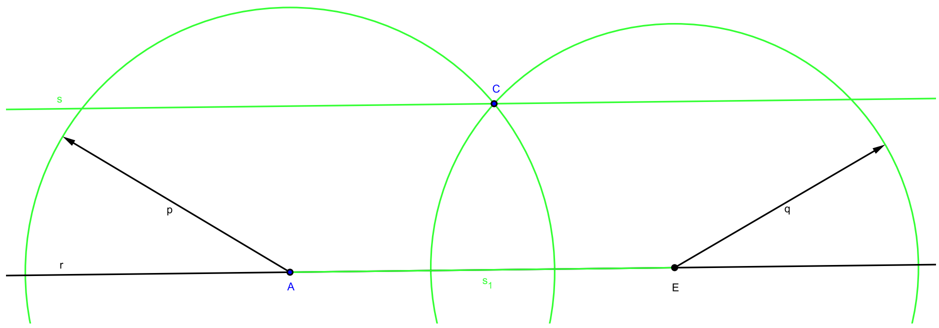
Resolução:

1. Consideremos sobre uma reta $\underline{r}$ dois pontos A e E de tal modo que $AE = s$ (figura abaixo);

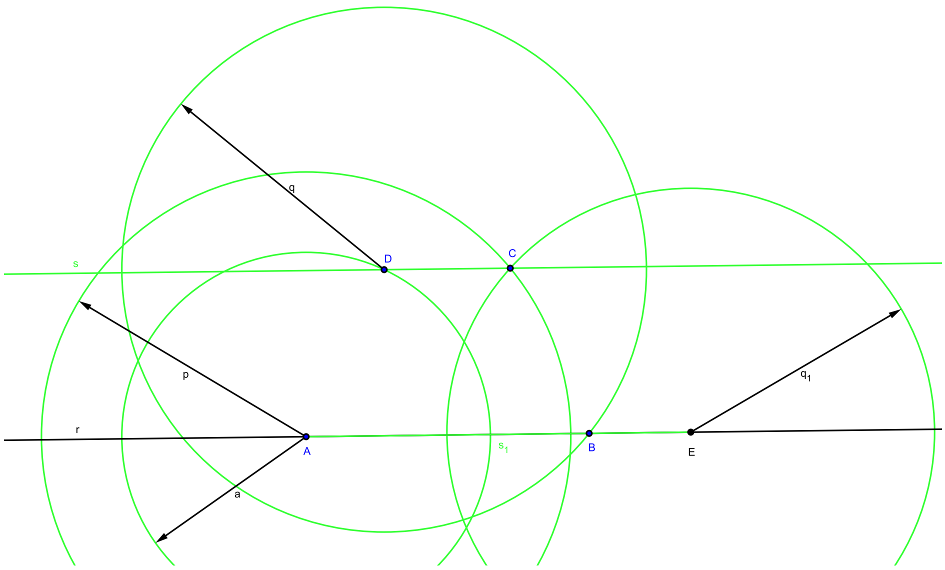
2. Consideremos o ponto C que é intersecção das circunferências de centros em A e E e raios p e q, respectivamente (figura abaixo);



3. Tracemos a reta $\underline{s}$ paralela à reta $\underline{r}$ pelo ponto C (figura abaixo);



4. A circunferência de centro no ponto A e raio $\underline{a}$ encontra a reta $\underline{s}$ no ponto D e a circunferência de centro no ponto D e raio $\underline{q}$ encontra a reta $\underline{r}$ no ponto B (figura abaixo);

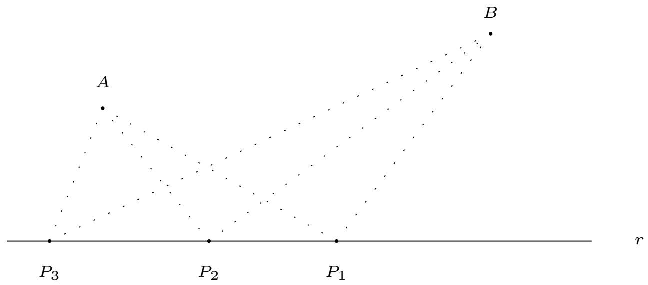


O trapézio $ABCD$ obtido é o procurado pois, $AD = a$, $AC = p$, $BD = q$.
Além disso temos que $CD = BE$ (pois $BECD$ é um paralelogramo), assim

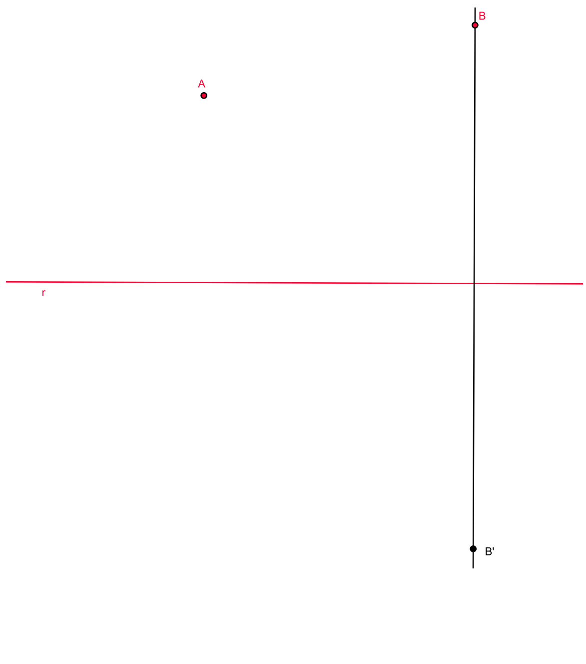
$$AB + CD = AB + BE = s.$$

Exercício 1.10.35 *Dados os pontos A e B em um mesmo semi-plano determinado pela reta r determinar o ponto P sobre a reta $\underline{r}$ de forma que $PA + PB$ seja o menor valor possível.*

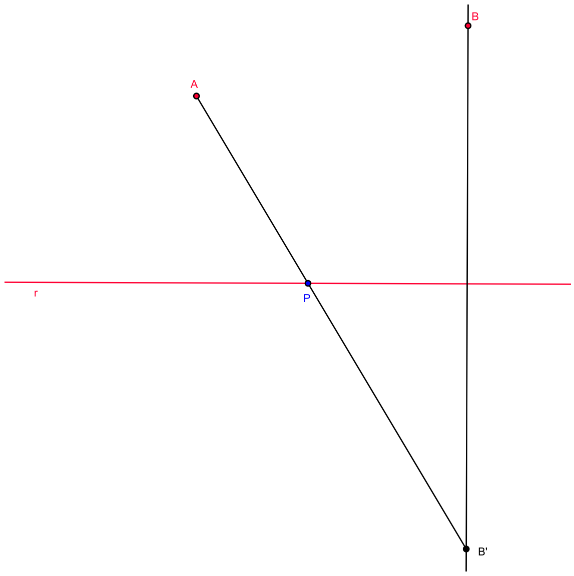
Resolução:
Observemos a figura:



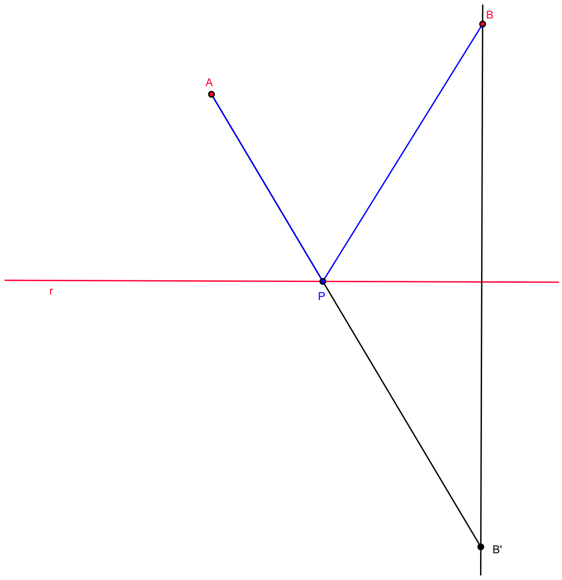
1. Seja B' o ponto simétrico de B em relação a reta r (obtido traçando-se a perpendicular a reta $\underline{r}$ pelo ponto B, que encontra a reta $\underline{r}$ no ponto C; assim podemos encontrar o ponto B' sobre a sem-reta obtida da perpendicular com extremidade em C que não contém B tal que $CB' = CB$ - figura abaixo);



2. Tracemos o segmento $\overline{AB'}$ que intercepta a reta $\underline{r}$ no ponto P (figura abaixo);



3. Afirmamos que o ponto P tem a propriedade de $PA + PB$ ser o menor valor da expressão $AX + XB$ para todo ponto X na reta $\underline{r}$ (figura abaixo).



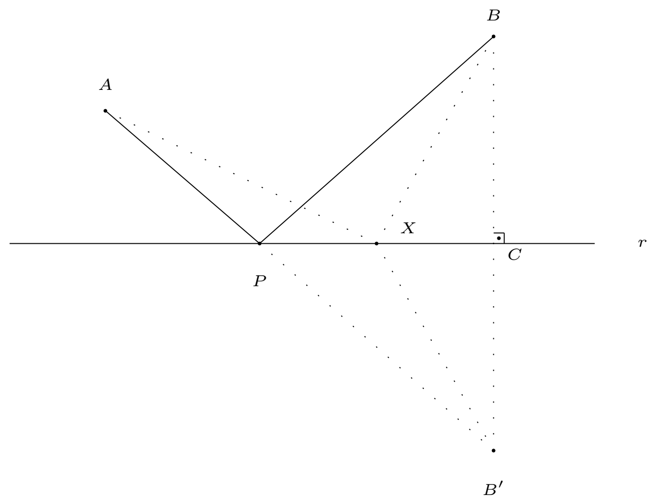
De fato, para qualquer X sobre a reta $\underline{r}$ temos que

$$AX + XB \geq AP + PB$$

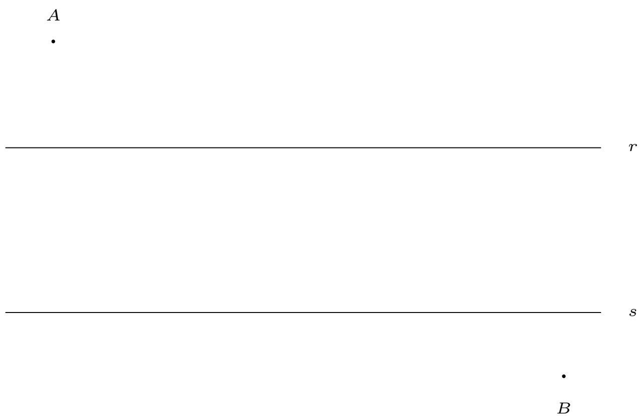
pois os pontos A, P e B' são colineares e se $X \neq P$ temos que os pontos A, X e B' não serão colineares, ou seja,

$$AX + XB = AX + XB' \geq AP + PB' = AP + PB,$$

mostrando que este valor é o menor possível (figura abaixo).



Exercício 1.10.36 *Suponhamos que as retas paralelas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *são as margens de um rio e os pontos* A *e* B *representam cidade em lados opostos da margem desse rio (vide figura abaixo).*



Deseja-se construir uma ponte $\overline{PQ}$ *(onde* $P \in r$ *e* $Q \in s$*) perpendicular às margens de forma que construindo-se as estradas* $\overline{AP}$ *e* $\overline{BQ}$ *o percurso total da cidade* A *até a cidade* B *seja o menor possível.*

Deteminar a posição da ponte.

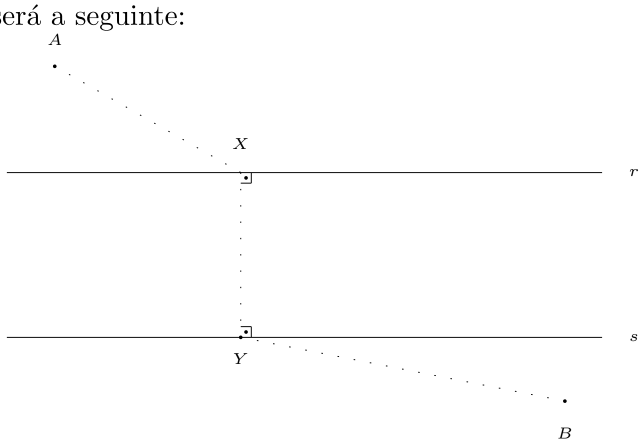
Resolução:

Na verdade devemos determinar onde deverá ficar o ponto P para que

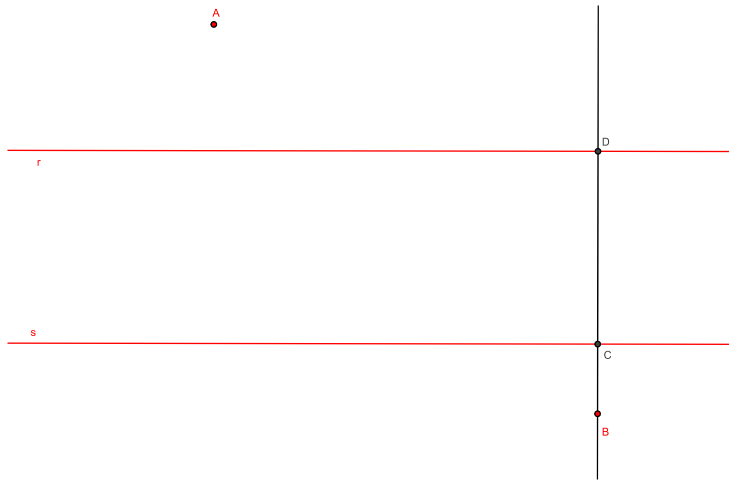
$$AP + PQ + QB$$

seja o menor valor possível com P e Q sobre as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, respectivamente.

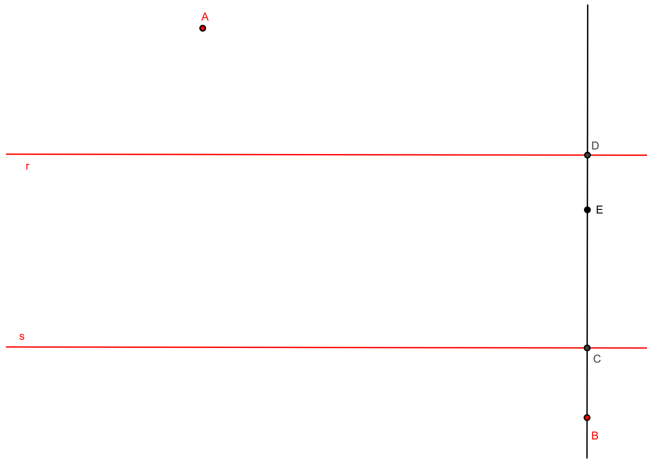
Em geral a situação será a seguinte:



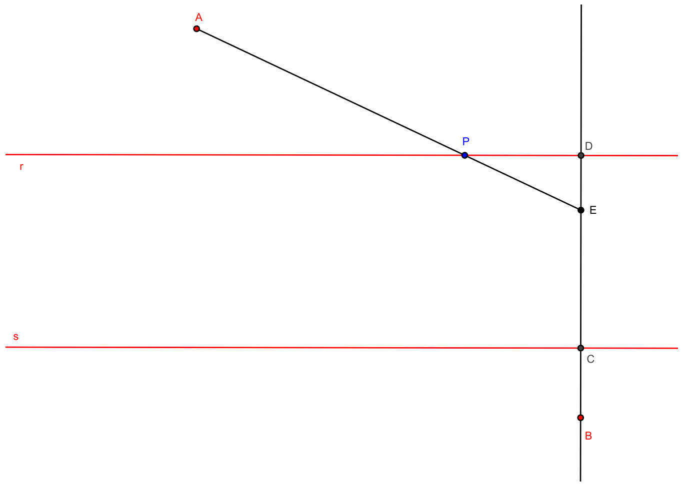
1. Encontremos a perpendicular a reta $\underline{r}$ (ou $\underline{s}$) que passa pelo ponto B; ela encontra a reta $\underline{s}$ no ponto C e a reta $\underline{r}$ no ponto D (figura abaixo);



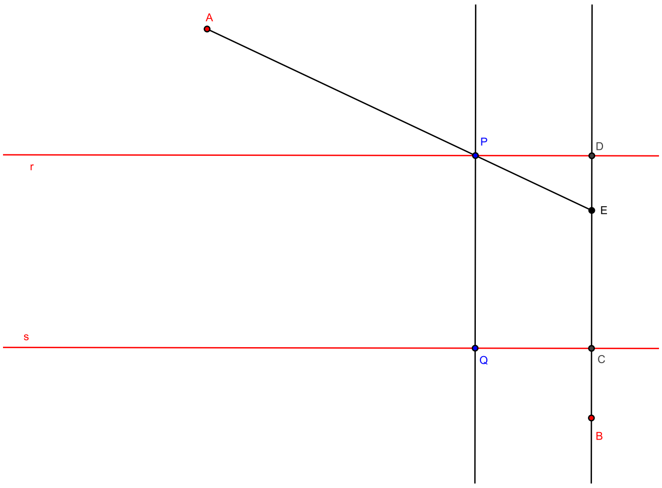
2. Encontre o ponto E sobre o segmento $\overline{BD}$ do item 1. tal que $BE = CD$ (figura abaixo);



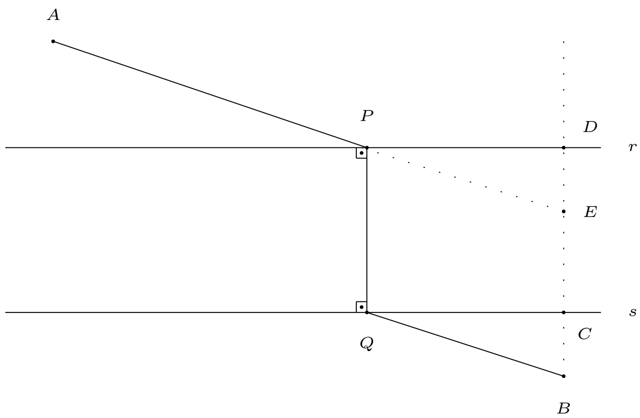
3. Tracemos o segmento de reta $\overline{AE}$ que encontra a reta $\underline{r}$ no ponto P (figura abaixo);



4. A reta perpendicular a reta $\underline{r}$ (ou $\underline{s}$) pelo ponto P encontra a reta $\underline{s}$ no ponto Q (figura abaixo);



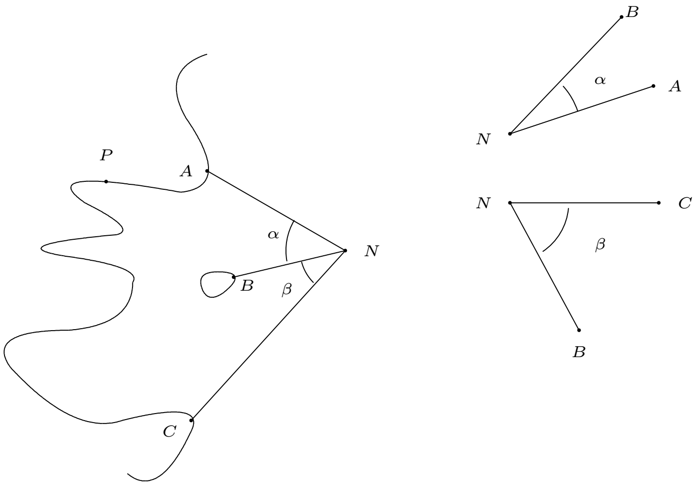
5. O caminho $\overline{AP} \cup \overline{PQ} \cup \overline{QB}$ será o caminho procurado (ou seja é o menor valor procurado).



A demonstração desse fato é semelhante a do exercíçio 35. (se as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ fossem coincidentes seria exatamente o caso do exercício 35.) e será deixada como exercício. $\boxed{\textbf{Valor: } +0.5}$.

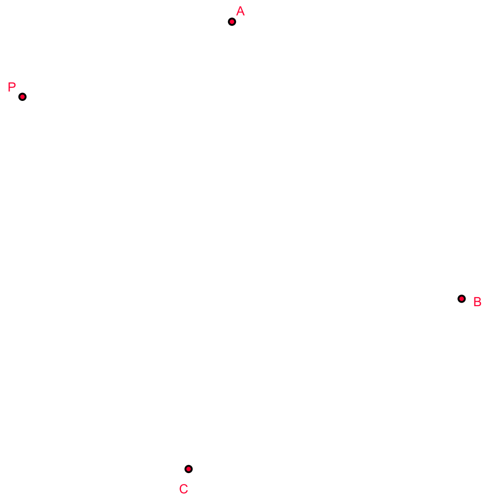
Exercício 1.10.37 *Um navio N deseja atingir o porto P da carta náutica mostrada na figura abaixo. Em derto instante, o capitão avista os faróis A, B e C (não colineares) e mede os seguintes ângulos $\widehat{ANB}$, $\widehat{BNC}$.*

Usando a régua é o compasso determine a posição do navio e sua distância ao porto. A escala da carta náutica é $1 : 10.000$.

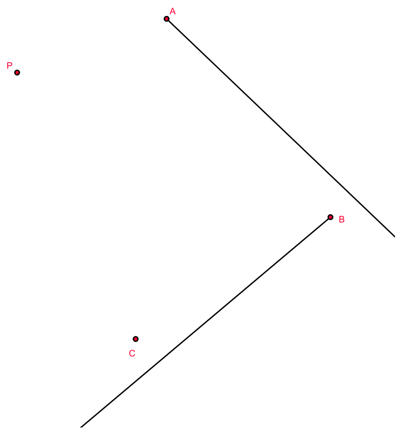


Resolução:

Vamos a resolução

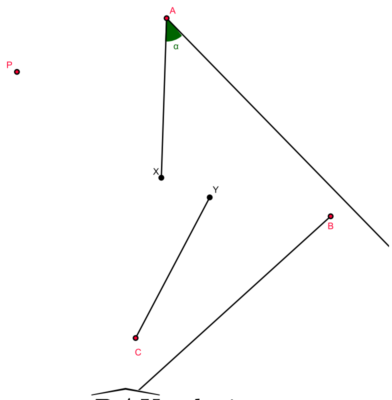


1. Consideremos a semi-reta que contém os segmentos $\overline{AB}$ com extermidade em A, denotada por $\overset{\mapsto}{AB}$ e a semi-reta que contém os segmentos $\overline{BC}$ com extermidade em B, denotada por $\overset{\mapsto}{BC}$ (figura abaixo);

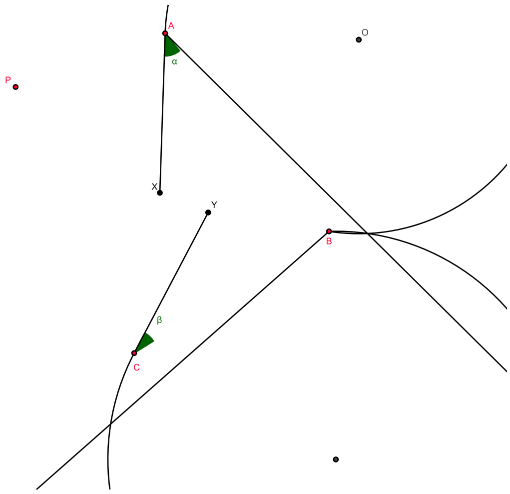


2. Encontremos o ponto X no semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ que comtém o ponto P, de tal modo que $\widehat{XAB} = \alpha$ (ver figura abaixo).

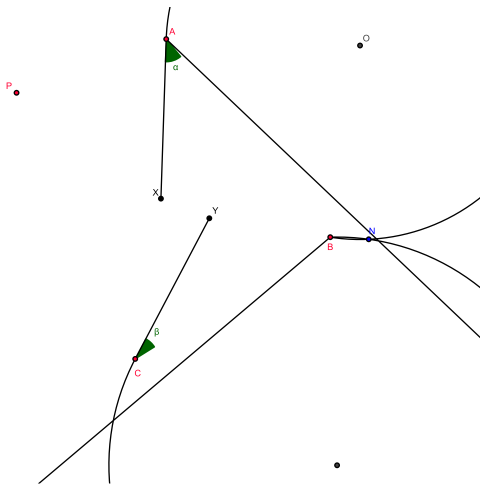
   De modo semelhante podemos encontrar o ponto Y no semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ que comtém o ponto P, de tal modo que $\widehat{YCB} = \beta$ (figura abaixo).



3. Tracemos o arco capaz dos ângulos $\alpha = \widehat{BAX}$ relativamente ao segmento $\overline{AB}$ e o arco capaz dos ângulos $\beta = \widehat{BCY}$ relativamente ao segmento $\overline{BC}$ (figura abaixo);



4. Na interseção dos arcos capazes encontra-se o ponto N (a localização na carta náutica do navio) pois N (o outro ponto de intersecção das duas circunferência é o ponto B);



5. Tendo a localização do ponto podemos utilizar uma régua enumerada para medir a distância do ponto N ao ponto P que multiplicada por 10.000 nos dará a distância real do navio ao porto.

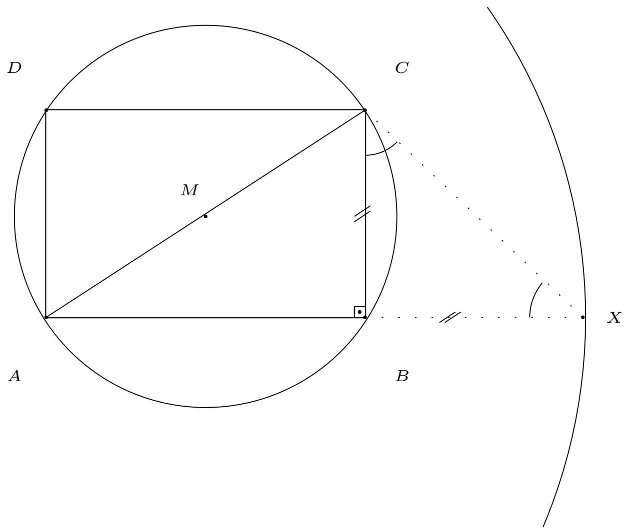
Exercício 1.10.38 (**Lucas Vioto dos Santos Ribeiro**) *Construir um triângulo ΔABC sabendo-se que o comprimento $AB = 5,3\,cm$, $\cos(\widehat{A}) = 0,6$ e que o lado $\overline{BC}$ é o menor possível.*

Resolução:

Exercício 1.10.39 *Construir um retângulo comprimento de uma diagonal, por exemplo, $AC = d$, e de seu semi-perímetro $AB + BC = p$.*

Resolução:

Suponhamos que o problema está resolvido.



Observemos que se X é um ponto de intersecção da circunferência de centro em A e raio $\underline{p}$ com a reta que passa pelos pontos A e B então o triângulo ΔXBC é isóceles, pois

$$AB + BC = p = AB + BX, \quad \text{logo} \quad BX = BC.$$

Assim $\widehat{BCX} = \widehat{CXB}$.

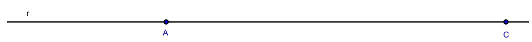
Mas o ângulo
$$\widehat{XBC} = \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2},$$
logo, da soma dos ângulos internos do triângulo ΔBCX ser igual a π, segue que

$$\widehat{BCX} = \widehat{CXB} = \frac{\pi}{4}.$$

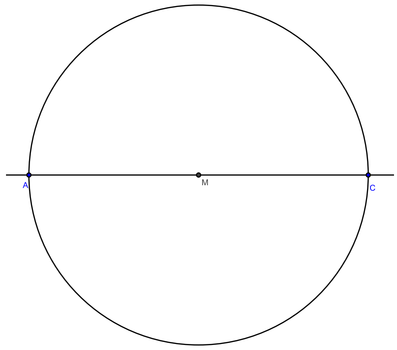
Portanto o ponto X está na intersecção da circunferência de centro no ponto A e raio $\underline{p}$ com o arco capaz do ângulo $\frac{\pi}{4}$ associado ao segmento $\overline{AC}$ e assim podemos construir o retângulo pedido.

Vamos a construção geométrica:

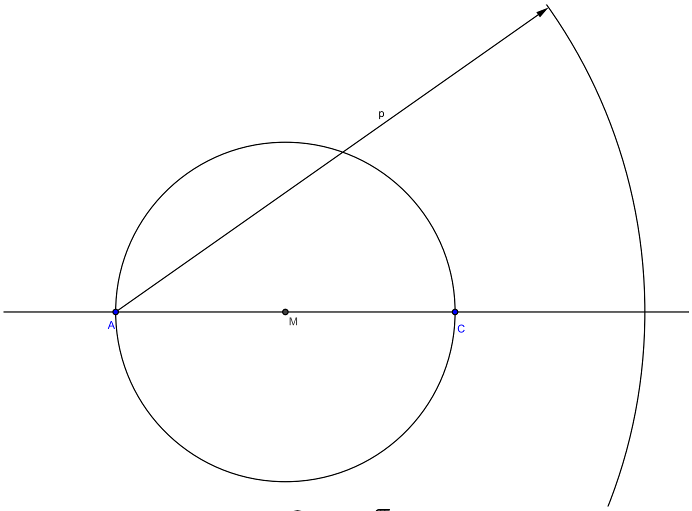
1. Dada uma reta $\underline{r}$ e um ponto A sobre a mesma encontremos um ponto C de tal modo que $AC = d$ (figura abaixo);



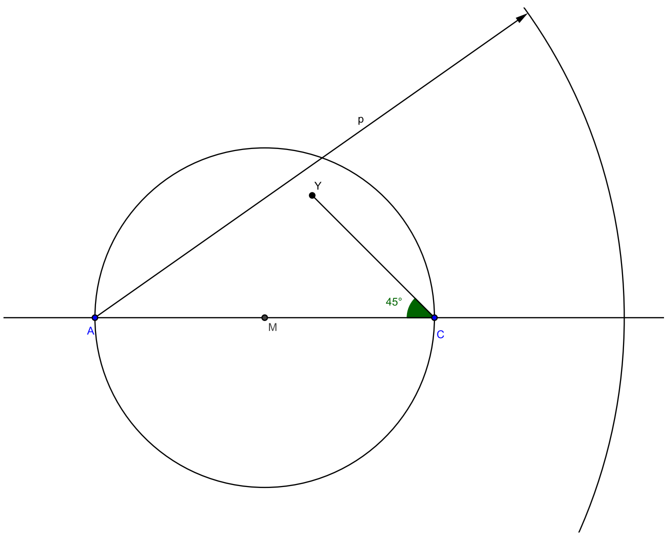
2. Encontremos o ponto médio M do segmento AC e tracemos uma circunferência, de centro em M, que contenha os pontos A e C (isto é, seu raio é $MA = MC$), que será indicada por $\mathcal{C}$(figura abaixo);



3. Tracemos uma circunferência, de centro em A de raio p, que será indicada por $\mathcal{C}'$ (figura abaixo);

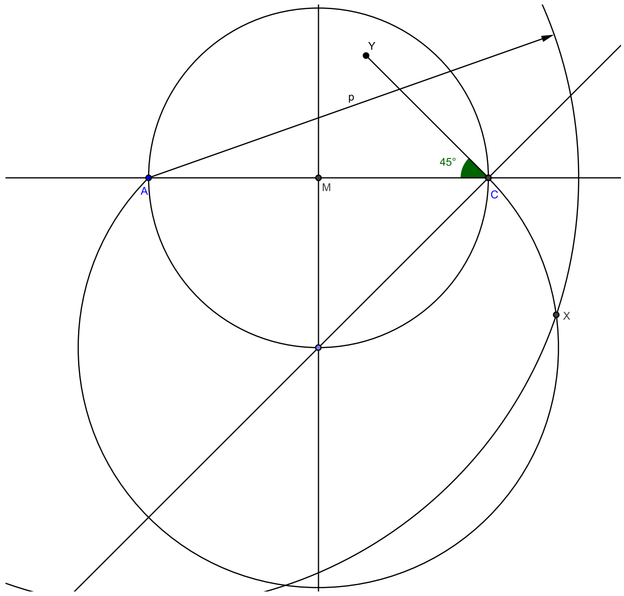


4. Encontremos o ponto Y de modo que $\widehat{YCA} = \dfrac{\pi}{4}$ (figura abaixo);



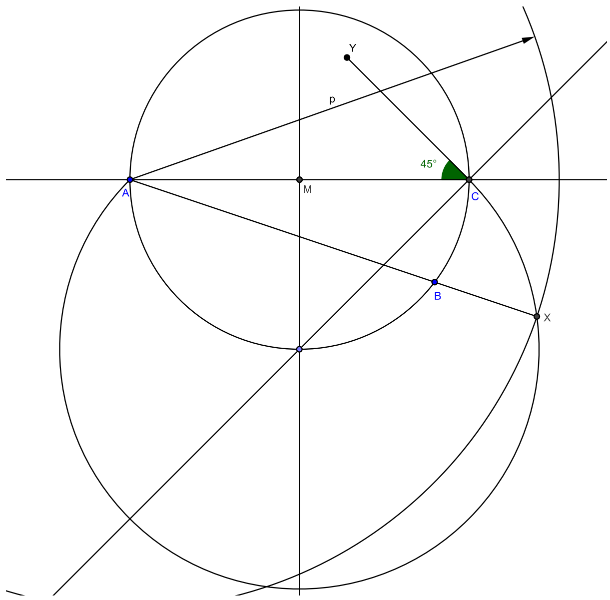
5. Tracemos o arco capaz do ângulo acima sobre o segmento $\overline{AC}$.

   Este arco encontrará a circunferência $\mathcal{C}'$ no ponto X (podemos ter outro ponto - figura abaixo);



6. O segmento de reta $\overline{AX}$ intercepta a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto B.

   O ponto B é um dos vértice do retângulo procurado (figura abaixo);



De fato, temos que o triângulo ΔABC é retângulo no ângulo $\widehat{B}$ pois o ponto B está na circunferência $\mathcal{C}$ (cuja hipotenusa é o segmento $\overline{AC}$).

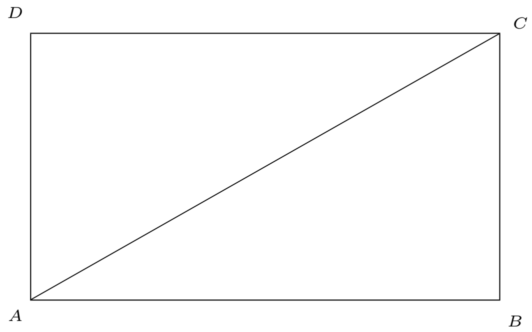
Como o triângulo ΔBXC é isóceles (na verdade $\widehat{BXC} = \dfrac{\pi}{4}$ e como $\widehat{XBC} = \dfrac{\pi}{2}$ temos que $\widehat{XCB} = \dfrac{\pi}{4}$) temos que $BX = BC$.

Assim
$$AB + BC = AB + BX = p,$$
pois os pontos A, B e X são colineares e $AX = p$ é raio da circunferência $\mathcal{C}'$.

Os outros vértices podem ser obtidos encontrando-se a intersecção das circunferências de centros nos pontos A e C e raios BC e AB, respectivamente.

Observação 1.10.6 *Podemos obter uma solução algébrica, como veremos a seguir:*

Suponhamos que o retângulo $ABCD$ tenha as propriedades requeridas.



Sabemos que

$$\begin{aligned}
&AC = d\\
&2.AB + 2.BC = 2p \Rightarrow AB + BC = p \Rightarrow BC = p - AB \quad (*)\\
&AB^2 + BC^2 = d^2 \Rightarrow AB^2 = d^2 - BC^2 \overset{(*)}{\Rightarrow} AB^2 = d^2 - (p - AB)^2 \Rightarrow\\
&\quad AB^2 = d^2 - (p^2 - 2.p.AB + AB^2) \Rightarrow AB^2 - p.AB - \frac{p^2 - d^2}{2} = 0 \Rightarrow \qquad (1.9)\\
&\quad AB = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4\frac{p^2-d^2}{2}}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{3p^2 - 2d^2}}{2}.
\end{aligned}$$

Como
$$3p^2 - 2d^2 > p^2,$$
(pois $p = AB + BC > AC = d$) temos duas soluções algébricas para o problema acima mas só uma pode ser obtida geometicamente, a saber,
$$AB = \frac{p + \sqrt{3p^2 - 2d^2}}{2},$$
pois $\sqrt{3p^2 - 2d^2} > p$.

Algebricamente temos que
$$x_2 \doteq p - AB = p - \frac{p + \sqrt{3p^2 - 2d^2}}{2} = \frac{p - \sqrt{3p^2 - 2d^2}}{2} < 0$$
será a outra solução da equações do segundo grau acima.

Tendo o valor de AB podemos obter geometricamente o retângulo com as propriedades requeridas bastando para isto executar os itens abaixo:

1. *Encontremos sobre uma reta $\underline{r}$ os pontos A e B tal que o segmento AB tenha comprimento AB obtido acima;*

2. *Tracemos pelo ponto A a circunferência de centro em A e raio $d = (AC)$;*

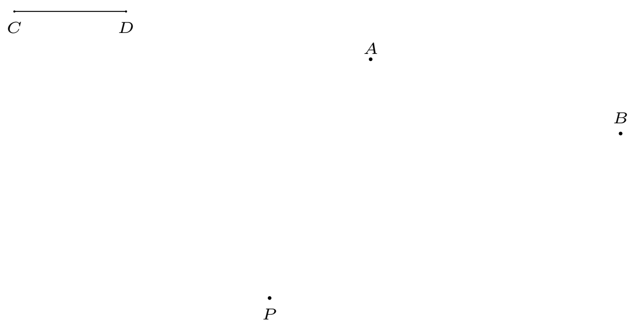
3. *A reta perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto B encontrará a circunferência acima no ponto C;*

4. *Tracemos as circunferência de centros em A e C e raios BC e AB, respectivamente.*

   Na intersecção das duas circunferências (que estiverem no mesmo semi-plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$) encontraremos o vértice D.

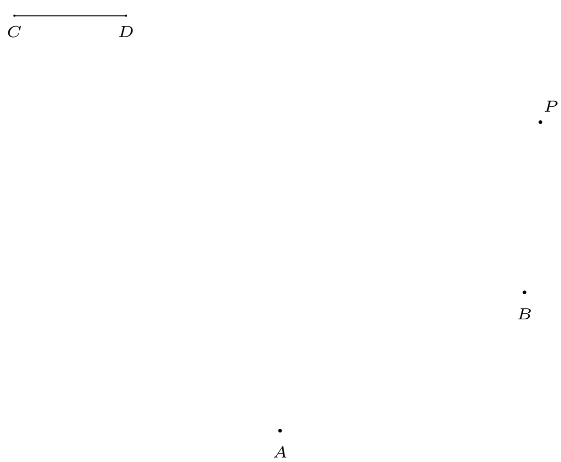
Como veremos no próximo capítulo, em algumas situações as soluções algébricas podem ser mais simples de serem obtidas do que as soluções geométricas (via regra e compasso).

Exercício 1.10.40 (**Wagner Lisbôa Mota**) *Dados em posição os pontos A, B e P e dado um segmento $\overline{CD}$, traçar pelo ponto P uma reta $\underline{r}$ de modo que os pontos A e B estejam num mesmo semi-plano determinado pela reta $\underline{r}$ e que a soma das distâncias dos pontos A e B à reta $\underline{r}$ sejam iguais a $2\,CD$ (ver figura abaixo).*



Resolução:

Exercício 1.10.41 (**Diego da Silva Oliveira**) *Dados em posição os pontos A, B e P e dado um segmento $\overline{CD}$, traçar pelo ponto P uma reta $\underline{r}$ de modo que os pontos A e B estejam em lados opostos dos semi-planos determinado pela reta $\underline{r}$ e que a soma das distâncias dos pontos A e B à reta $\underline{r}$ sejam iguais a CD (ver figura abaixo).*

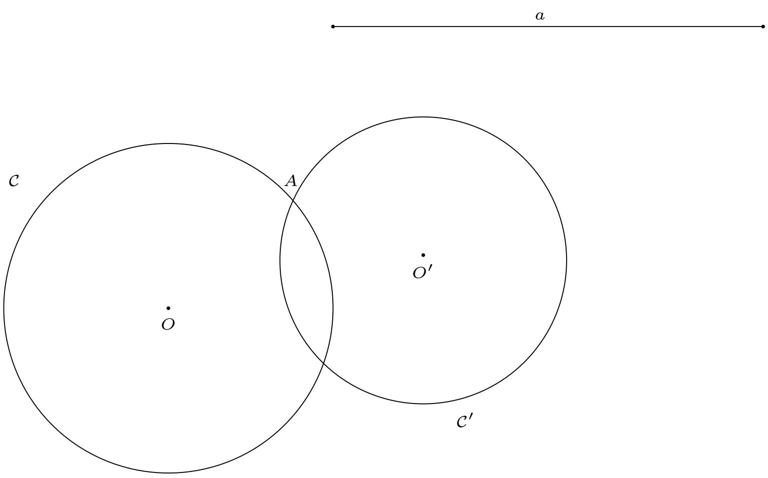


Resolução:

Exercício 1.10.42 (**Lauriane dos Santos Yamane**) *Nos problemas 40. e 41. substitua a palavra "soma" por "diferença".*

Resolução:

Exercício 1.10.43 (**Marilia Pelinson Tridapalli**) *Dados as circunferências $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}'$, o ponto A e $a > 0$, como na figura abaixo, traçar pelo ponto A uma reta secante que passa pelos pontos A, $P \in \mathcal{C}$ e $Q \in \mathcal{C}'$ de forma que tenhamos $PQ = a$.*



Resolução:

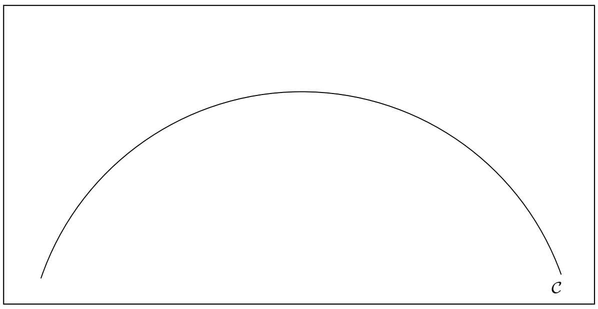
Exercício 1.10.44 (**Marina Ferrucci Bega**) *Utilizando a figura acima, encontrar os pontos $P \in \mathcal{C}$ e $Q \in \mathcal{C}'$ tal que os pontos P, A e Q sejam colineares e o segmento $\overline{PQ}$ tenha o maior comprimento possível.*

Resolução:

Exercício 1.10.45 (**Valdir José de Oliveira**) *Utilizando a figura acima, encontrar os pontos $P \in \mathcal{C}$ e $Q \in \mathcal{C}'$ tal que os pontos P, A e Q sejam colineares e $PA = AQ$.*

Resolução:

Exercício 1.10.46 (**Bruno Damien da Costa Paes Jurgensen**) *Conhecemos de uma circunferência $\mathcal{C}$ apenas a parte que se vê na figura abaixo. Limitando-se ao espaço disponível, determine o raio da circunferência $\mathcal{C}$.*



Resolução:

14.09.2011 - 11.a e 12.a

Exercício 1.10.47 (Wagner Lisbôa Mota) *Construir um quadrado conhecendo-se um ponto em cada um dos lados do mesmo.*

Resolução:

Exercício 1.10.48 (Sérgio Luiz Daltoso Junior) *Sejam A, B, C e D pontos, distintos, sobre uma reta $\underline{r}$, distribuidos sobre a mesma nessa oredem. Traçar pelos pontos A e B duas retas paralelas e pelos pontos C e D outras duas retas paralelas de modo que as interseções dessas retas formem um quadrado.*

Resolução:

Exercício 1.10.49 (Hugo Cesar Faggian) *Sejam A e B dois pontos que pertecem um mesmo semi-plano determinado por uma reta $\underline{r}$. Determinar um ponto P sobre a reta $\underline{r}$ de modo que o ângulo formado pela reta $\underline{r}$ e pelo segmento $\overline{PB}$ seja o dobro do o ângulo formado pela reta $\underline{r}$ e pelo segmento $\overline{PA}$.*

Resolução:

Exercício 1.10.50 (Diego da Silva Oliveira) *Sejam A e B dois pontos que pertecem um mesmo semi-plano determinado por uma reta $\underline{r}$. Determinar um ponto P sobre a reta $\underline{r}$ de modo que a medida do ângulo $\widehat{APB}$ seja o maior possível.*

Resolução:

Capítulo 2

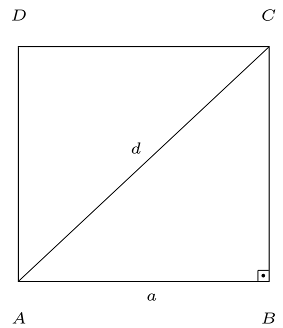
Expressões Algébricas

2.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de problemas de construções geométricas via resolução de **equações algébricas** e vice-versa.

Como motivação consideremos o seguinte problema:

Exemplo 2.1.1 *Construir um quadrado* $\square ABCD$ *conhecendo-se a soma da diagonal com um dos lados, por exemplo,* $AC + AB$ *é dado.*



Resolução:

Se $AB = a$ (não conhecemos este comprimento) e $\underline{d}$ é a diagonal (que também não conhecemos) então como o triângulo ΔABC (figura acima) é retângulo e isósceles, do Teorema de Pitágoras, segue que

$$d^2 = AB^2 + BC^2 \overset{[CD=AB=a]}{=} 2a^2 \quad \Rightarrow \quad d = a\sqrt{2}. \tag{2.1}$$

Assim

$$d = a\sqrt{2} + a$$

é conhecido, digamos $\underline{s}$, ou seja, temos que resolver a equação algébrica

$$d + a = s \quad \overset{(2.1)}{\Rightarrow} \quad a\sqrt{2} + a = s \quad \Rightarrow \quad a = \frac{s}{\sqrt{2}+1},$$

ou ainda,

$$a = \frac{s}{\sqrt{2}+1}\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{s\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = s\left(\sqrt{2}-1\right),$$

ou seja,

$$a = s(\sqrt{2}-1).$$

Portanto temos uma fórmula para encontrar o comprimento de um dos lados (e portanto todos) do quadrado e podemos tentar traçá-lo geometricamente (deixaremos como exercício para o leitor traçá-lo).

Veremos, mais adiante, como essa solução pode ser construída geometricamente.

2.2 A 4.^{a} Proporcional

Definição 2.2.1 *Sejam $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ o comprimento de três segmentos.*

Diremos que $\underline{x}$ é a **4.^{a} proporcional entre $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$** *se*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Observação 2.2.1

1. *A relação acima é equivalente a igualdade*

$$ax = bc$$

que apareceu no Exemplo (1.1.1) no início do curso onde obtivemos a sua resolução geométrica, utilizando as ideías dos gregos.

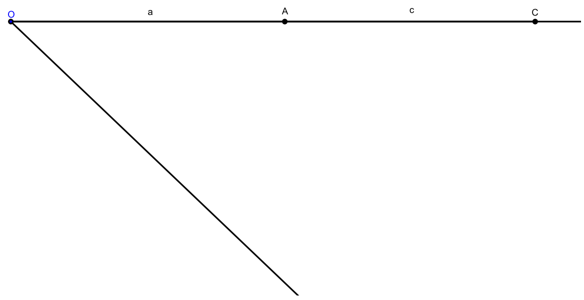
2. *Vamos obter $\underline{x}$, geometricamente, de uma outra maneira, utilizando o* **Teorema de Tales**.

Para isto:

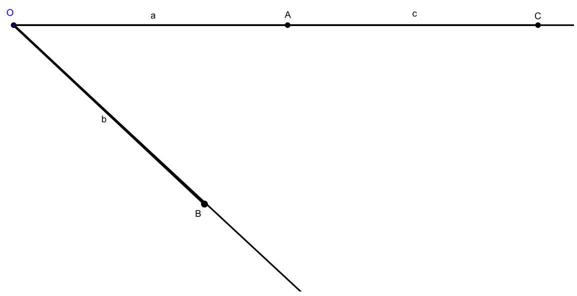
(a) *Consideremos um ângulo qualquer (não raso, isto é, não igual a π) com vértice no ponto O (ver figura abaixo).*

(b) *Sobre um dos lados do ângulo encontremos os pontos A e C de tal modo que (ver figura abaixo)*

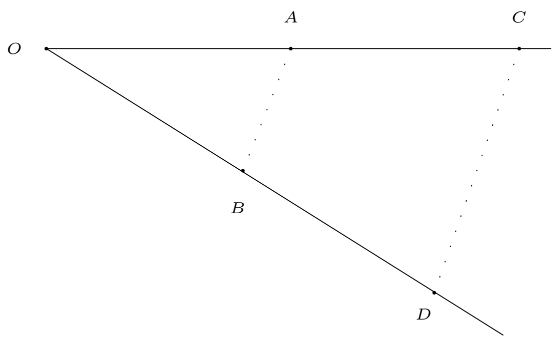
$$OA = a \quad e \quad AC = c.$$



(c) *Sobre o outro lado do ângulo encontremos o ponto B de tal modo que $OB = b$ (figura abaixo).*



(d) *Tracemos pelo ponto C uma reta paralela a reta $\overleftrightarrow{AB}$, que intercepta a semi-reta $\overrightarrow{OB}$ no ponto D (figura abaixo).*



(e) *Afirmamos que $x \doteq BD$, isto é, a solução da 4.^{a} proporcional entre $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$.*

De fato, como as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas, os triângulos ΔOAB e ΔOCD são semelhantes (caso AAA).

Logo lados correspondentes guardam uma mesma proporção, por exemplo:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD},$$

ou seja,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA + AC}{OB + BD},$$

ou ainda,

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+x}, \quad \textit{isto é,} \quad a(b+x) = b(a+c),$$

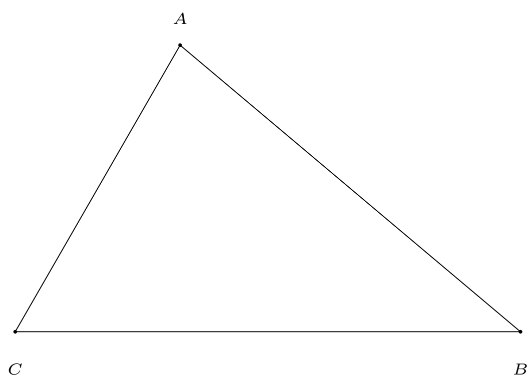
que implicará (observemos que $ab = ba$)

$$ax = bc, \quad \textit{ou, equivalentemente} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

mostrando que $x = BD$ é a 4.a proporcional entre $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$.

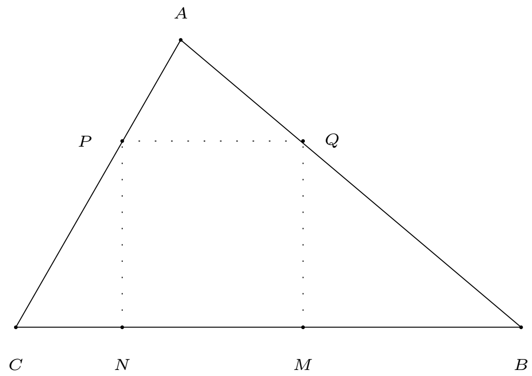
Trataremos a seguir de vários exemplos que mostrarão como esta noção poderá ser útil em construções geométricas.

Exemplo 2.2.1 *Inscrever no triângulo ΔABC dado um quadrado com um lado sobre o segmento $\overline{BC}$.*



Resolução:

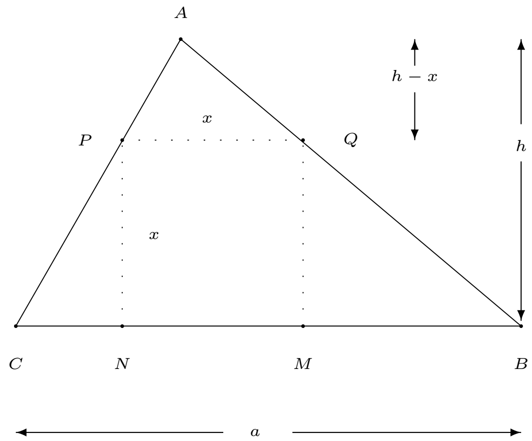
Suponhamos que o problema foi resolvido (figura abaixo).



Observemos que o quadrado $\square MNPQ$ está inscrito no triângulo ΔABC com lado $\overline{MN}$ sobre o lado $\overline{BC}$.

Consideremos $BC = a$ e o comprimento da altura do triângulo ΔABC igual a $\underline{h}$, relativamente ao lado $\overline{BC}$ (isto é $h = h_a$).

Seja $\underline{x}$ o comprimento do lado do quadrado $\square MNPQ$ (figura abaixo).



Observemos que os triângulos ΔAQP e ΔABC são semelhante (caso AAA, pois as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{CB}$ são paralelas).

Logo elementos correspondentes quardam a mesma proporção, em particular:

$$\frac{h-x}{h} = \frac{QP}{BC} = \frac{x}{a}.$$

Logo

$$xh = ah - ax, \quad \text{ou seja,} \quad ax + xh = ah$$

e assim

$$x = \frac{ah}{a+h}. \tag{2.2}$$

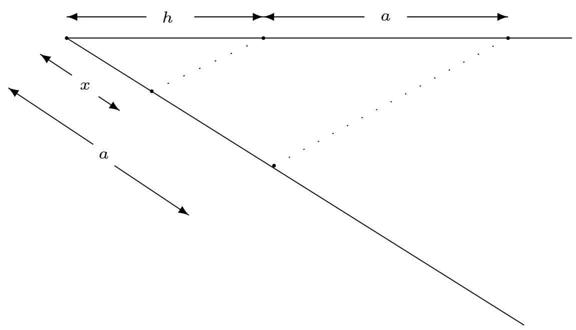
Portanto temos uma fórmula que nos dá o valor $\underline{x}$ em função dos valores $\underline{a}$ e $\underline{h}$.

Para construirmos o quadrado observemos que a relação (2.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{a+h}{a} = \frac{h}{x},$$

isto é, $\underline{x}$ é a 4.^{a} proporcional entre $a+h$, $\underline{a}$ e $\underline{h}$.

Logo podemos obter um segmento de comprimento $\underline{x}$ utilizando a construção a seguir:



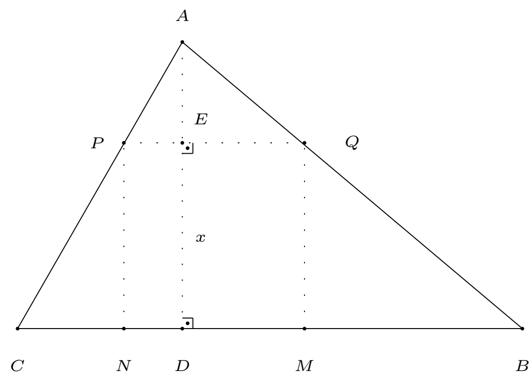
Conhecido o valor $\underline{x}$, gemometricamente, podemos traçar quadrado $\square MNPQ$ da seguinte forma:

1. Tracemos a altura $\overline{AD}$ do triângulo ΔABC (basta encontrar a perpendicular a reta $\overleftrightarrow{BC}$ pelo ponto A);

2. Sobre o segmento $\overline{AD}$, encontrar o ponto E tal que $DE = x$;

3. A reta paralela a reta $\overleftrightarrow{BC}$ pelo ponto E interceptará os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos Q e P, respectivamente;

4. Traçando-se as retas perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{QP}$ pelos pontos Q e P obtermos, na intersecção com a reta $\overleftrightarrow{BC}$, os outros dois vértices M e N, respectivamente (figura abaixo).



5. O quadrilátero $MNPQ$ é um quadrado (verifique!) inscrito no triângulo ΔABC com o lado $\overline{MN}$ sobre o lado $\overline{BC}$, como queríamos.

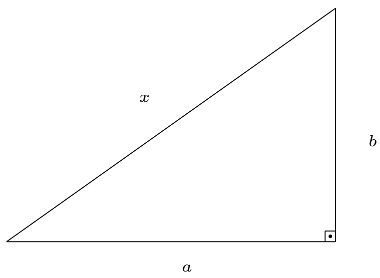
2.3 Sobre a Equação $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$

Observação 2.3.1 *Sejam $\underline{a}$ e $\underline{b}$ comprimentos de dois segmentos.*

1. *Então o número real (maior que zero)*

$$x \doteq \sqrt{a^2 \pm b^2},$$

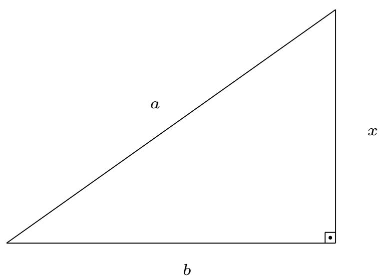
pode ser interpretado, pelo Teorema de Pitágoras, como sendo o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimentos $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (figura abaixo).



2. *De modo semelhante, o número real (maior que zero)*

$$x \doteq \sqrt{a^2 - b^2}$$

pode ser interpretado, pelo Teorema de Pitágoras, como o valor do comprimento de um dos catetos de um triângulo retângulo que tem hipotenusa com comprimento $\underline{a}$ e outro cateto com comprimento $\underline{b}$ (figura abaixo).



3. *Mais geralmente, expressões do tipo*

$$\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm \underbrace{\cdots}_{\text{número finito de parcelas}}}$$

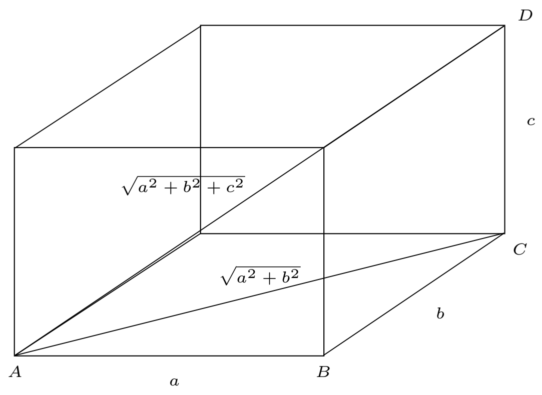
podem ser construídas geometricamente utilizando várias vezes os procedimentos acima, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.1 *Construir a diagonal de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$.*

Resolução:

Sabemos que o comprimento diagonal de um paralelepípedo reto cujos comprimentos das arestas que o determinam são: $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ é dada por (basta aplicar o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos ΔABC e ΔACD - ver figura abaixo):

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Seja

$$m \doteq \sqrt{a^2+b^2}.$$

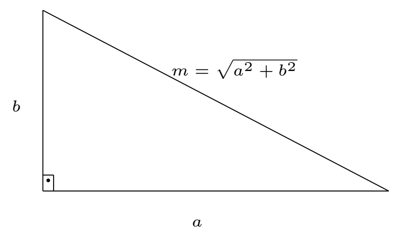
Deste modo

$$x = \sqrt{m^2+c^2}$$

e assim determinamos o comprimento da diagonal, geometricamente, utilizando-se duas vezes o procedimento definido anteriormente, a saber:

1. Construimos o triângulo retângulo de catetos com comprimentos $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

   Logo sua hipotenusa tem comprimento $\underline{m}$ (figura abaixo);

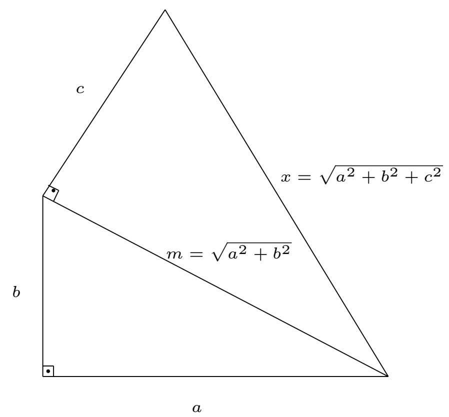


2. Depois construimos o triângulo retângulo com um cateto de comprimento $\underline{c}$ e o outro cateto com comprimento m.

   Assim sua hipotenusa terá comprimento

$$\sqrt{c^2+m^2} \overset{[m^2=a^2+b^2]}{=} \sqrt{a^2+b^2+c^2} = x$$

   como queríamos (figura abaixo).



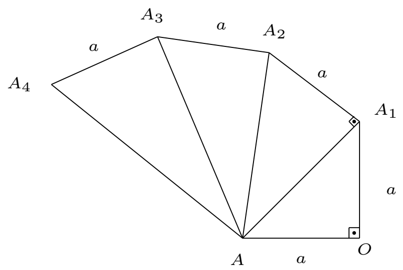
2.4 A Expressão $a\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$

Observação 2.4.1

1. *Dado* $\underline{a}$*, o comprimento de um segmento, podemos construir segmentos cujos comprimentos são*

$$a\sqrt{2}, \quad a\sqrt{3}, \quad a\sqrt{4}, \cdots, a\sqrt{n}, \cdots$$

por meio da seguinte construção:



De fato, aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔOAA_1 *temos*

$$AA_1^2 = OA_1^2 + OA^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

logo

$$AA_1 = a\sqrt{2}.$$

Aplicando-se novamente o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔAA_1A_2 *temos*

$$AA_2^2 = AA_1^2 + A_1A^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2,$$

logo

$$AA_2 = a\sqrt{3}.$$

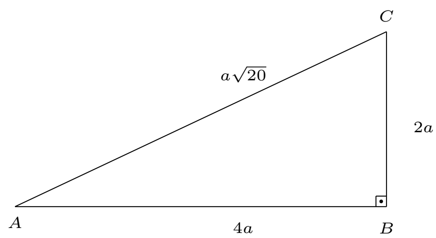
Logo, por indução, podemos mostrar que:

$$AA_1 = a\sqrt{2} = \quad AA_2 = a\sqrt{3}, \quad AA_3 = a\sqrt{4}, \quad AA_4 = a\sqrt{5}, \cdots$$

2. *Se* $\underline{n}$ *for muito grande podemos, algumas vezes, encontrar um caminho mais rápido para construir o segmento com o valor pedido.*

   Por exemplo, se queremos construir um segmento de comprimento $a\sqrt{21}$ *podemos agir da seguinte forma:*

   (a) *Construimos um triângulo retângulo com catetos de comprimentos* $4a$ *e* $2a$*.*
   Logo sua hipotenusa, pelo Teorema de Pitágoras, terá comprimento $a\sqrt{20}$ *(figura abaixo).*

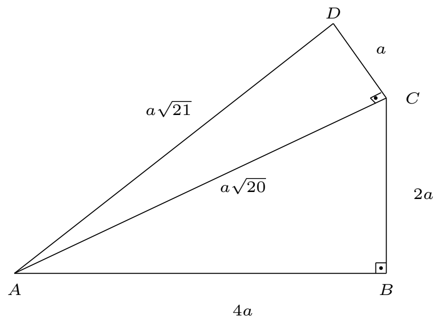


De fato, pois aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔABC *obteremos*

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{16a^2 + 4a^2} = a\sqrt{20},$$

com isto obtemos um segmento de comprimento $a\sqrt{20}$*, a saber, o segmento* $\overline{AC}$.

(b) Em seguida construimos um triângulo retângulo com catetos de comprimento $a\sqrt{20}$ *e* $\underline{a}$. *Deste modo sua hipotenusa terá comprimento* $a\sqrt{21}$ *(figura abaixo).*



De fato, pois aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔACD *obteremos*

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{20a^2 + a^2} = a\sqrt{21},$$

com isto obtemos um segmento de comprimento $a\sqrt{21}$*, a saber, o segmento* $\overline{AD}$.

Um outro de exemplo que podemos aplicar as idéias acima é dado pelo:

Exemplo 2.4.1 *Construir um quadrado conhecendo-se a soma,* $\underline{s}$*, do comprimento da diagonal com o comprimento de um lado do mesmo.*

Resolução:

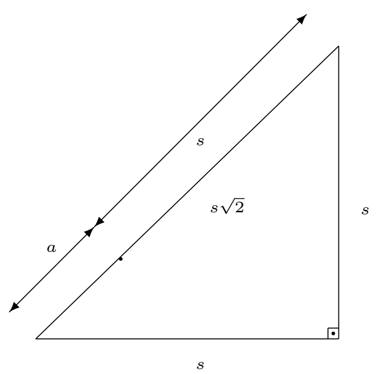
Se $\underline{a}$ é o comprimento do lado do quadrado procurado sabemos (do Exemplo (2.1.1)) que

$$a = s(\sqrt{2} - 1) = s\sqrt{2} - s.$$

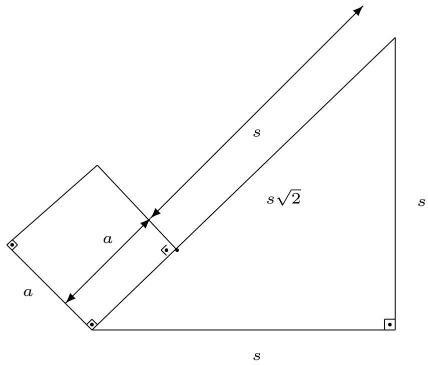
Para obtê-lo geométricamente construimos um triângulo retângulo isóceles com comprimento dos catetos iguais a $\underline{s}$.

Logo sua hipotenusa terá comprimento $s\sqrt{2}$.

Subtraindo-se $\underline{s}$ do valor acima obteremos o valor $\underline{a}$, e portanto um segmento de comprimento $\underline{a}$ (figura abaixo).



Com isto podemos construir nosso quadrado a partir desse lado de comprimento conhecido (figura abaixo).



2.5 A Média Geométrica

Definição 2.5.1 *Dados os números reais positivos* a *e* b, *definimos a sua* **média aritmética**, *indicada por* m_a, *como sendo:*

$$m_a \doteq \frac{a+b}{2}.$$

Sua **média geométrica**, *indicada por* m_g, *será definida como:*

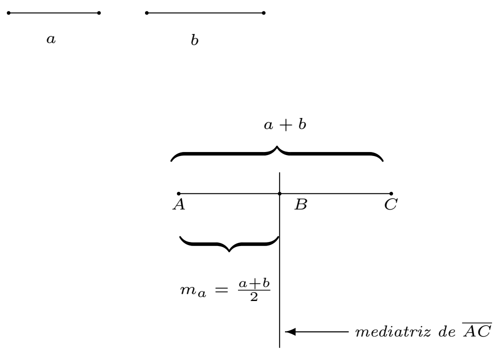
$$m_g \doteq \sqrt{ab}.$$

Sua **média Pitagória**, *indicada por* m_p, *como sendo:*

$$m_p \doteq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Observação 2.5.1

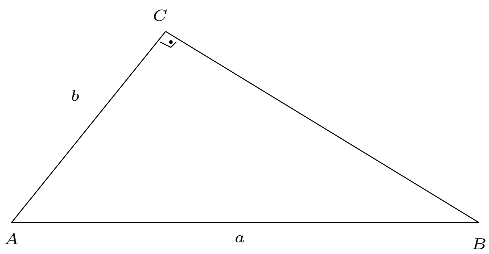
1. *A construção da média aritmetica é simples, para isto basta encontrar o ponto médio do intervalo de comprimento* $a+b$ *(via mediatriz - figura abaixo);*



   Ou seja, AB *é a média aritmética de* a *e* b.

2. *A construção da média geométrica aparece em um triângulo retângulo.*

   Suponhamos que um triângulo retângulo ΔABC *tem um cateto de comprimento* b *e hipotenusa de comprimento* a *(figura abaixo).*



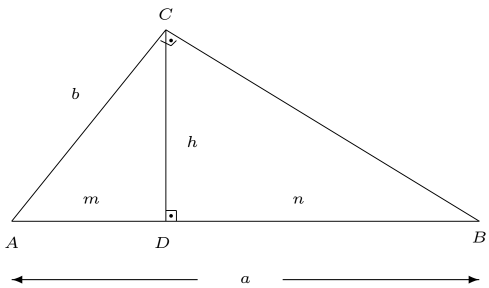
Se $\underline{h}$ é o comprimento da altura relativa a hipotenusa $\overline{AB}$ então temos as seguintes relações (cuja verificação será deixada como exercício para o leitor) **Valor: +0,5**

$$h^2 = m\,n \tag{2.3}$$
$$b^2 = a\,m, \tag{2.4}$$

onde

$$m = AD, \quad n = DB$$

e D é o ponto de interseção da reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto A com a reta $\overleftrightarrow{AB}$ (figura abaixo).



Assim, (2.3) nos diz que o comprimento da altura do triângulo ΔABC relativamente ao lado $\overline{AB}$ (ou seja, à hipotenusa do mesmo, ou ainda, $\underline{h}$) é a média geométrica entre os comprimentos das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, isto é,

$$h = \sqrt{m\,n}.$$

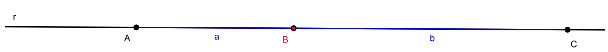
Já (2.4) nos diz que o comprimento de um cateto é a média geométrica dos comprimentos da sua projeção sobre a hipotenusa e o comprimento da própria, ou seja,

$$b = \sqrt{a\,m}.$$

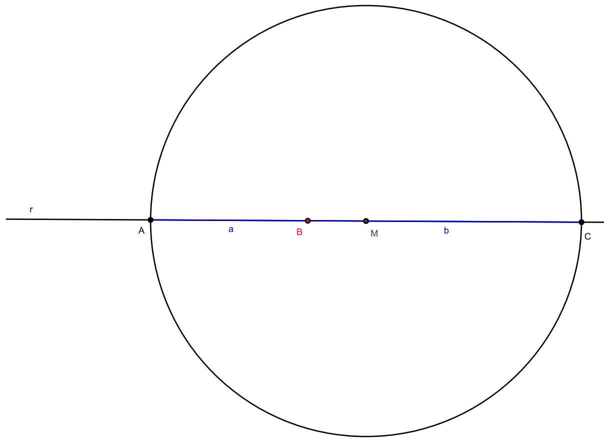
A construção da média geométrica pode ser feita de várias maneiras.
Exibiremos três modos distintos de fazê-la:

1.a construção:

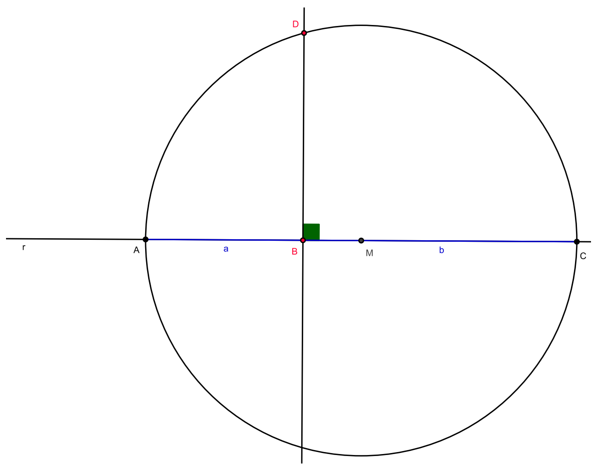
(a) Sobre uma reta $\underline{r}$ obtenha três pontos A, B e C de tais modo que $AB = a$ e $BC = b$, com o ponto B no segmento $\overline{AC}$ (figura abaixo);



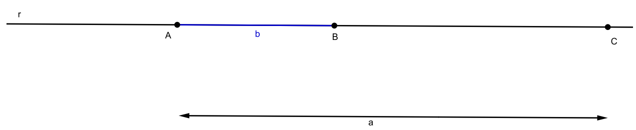
(b) Construa a semi-circunferência de centro no ponto médio, M, do segmento $\overline{AC}$ e raio $\dfrac{AC}{2}$(figura abaixo);



(c) Encontre a reta perpendicular a reta $\underline{r}$ pelo ponto B que encontra a circunferência obtida no item (b) no ponto D (figura abaixo);



(d) Temos $BD = \sqrt{a\,b}$, ou seja, BD é a média geométrica de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (figura abaixo).

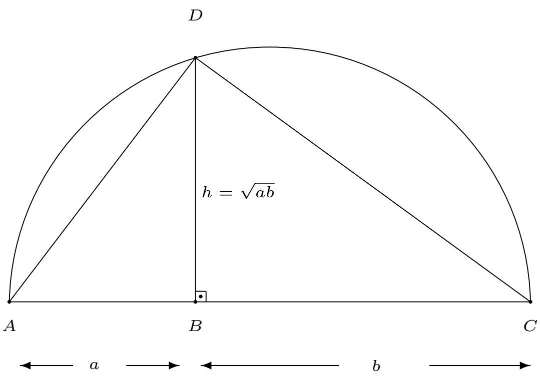


De fato, pois o triângulo ΔADC é um triângulo retângulo no vértice D.

Logo, do item 2. desta observação, segue que o comprimento da altura do triângulo ΔADC, $\underline{h}$, relativamente a hipotenusa $\overline{AC}$ será dada por $a.b$, isto é,

$$BD = h = \sqrt{ab},$$

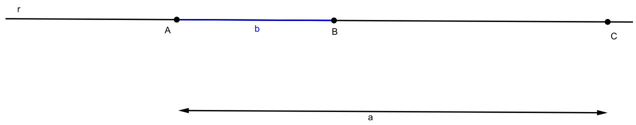
ou seja, BD será média geométrica de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (figura abaixo).



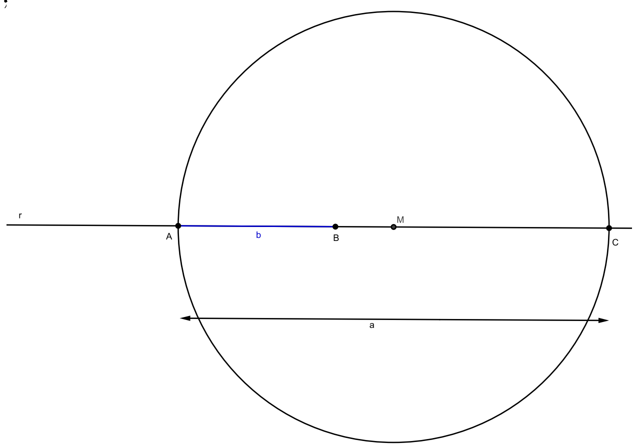
2.a construção:

Suponhamos que $a > b$.

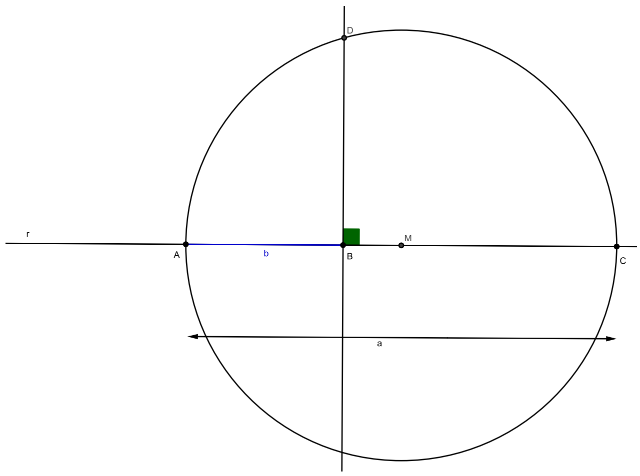
(a) Encontremos sobre uma reta $\underline{r}$ os pontos A, B e C de modo que $AC = a$, $AB = b$, com o ponto B no segmento $\overline{AC}$ (figura abaixo);



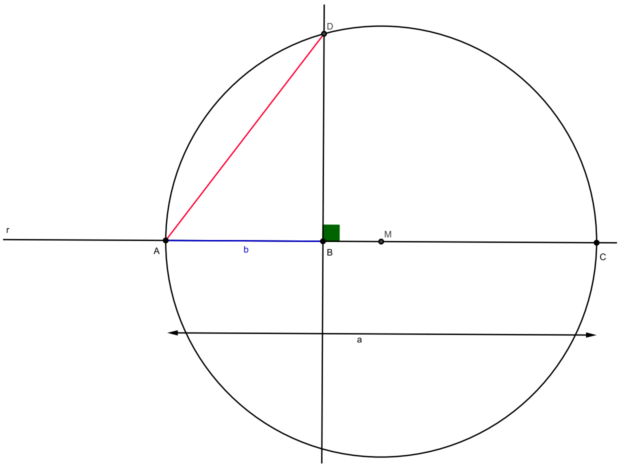
(b) Tracemos a semi-circunferência de centro no ponto médio, M, do segmento $\overline{AC}$ e raio $\dfrac{AC}{2}$ (figura abaixo);



(c) Encontremos a reta perpendicular a reta $\underline{r}$ pelo ponto B que encontra a sem-circunferência acima no ponto D (figura abaixo);



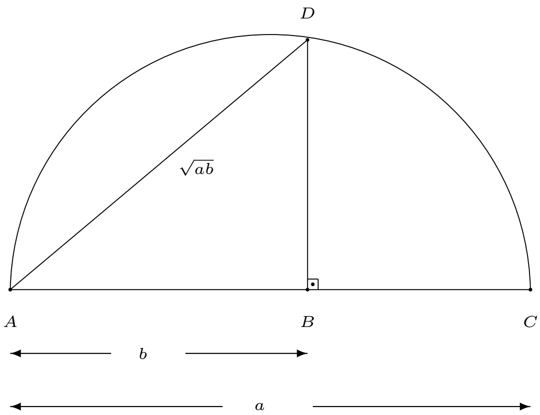
(d) Com isto temos que $AD = \sqrt{ab}$, ou seja a média geométrica entre $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (figura abaixo).



De fato, do item 2. da observação acima temos que $AD^2 = ab$, isto é,

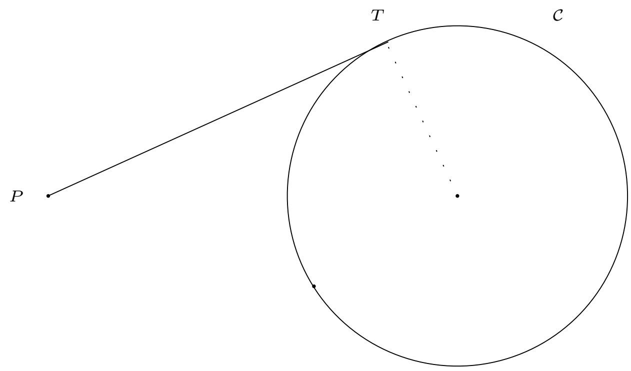
$$AD = \sqrt{ab},$$

ou seja, AD será média geométrica de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (figura abaixo).



III. A terceira delas utilizará a noção de potência de um ponto relativamente a uma circunferência que será introduzida a seguir.

Definição 2.5.2 *Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ e um ponto P exterior a circunferência $\mathcal{C}$ definimos a* **potência do ponto P relativamente à circunferência $\mathcal{C}$** *como sendo o comprimento do segmento $\overline{PT}$ elevado ao quadrado (isto é, PT^2) onde o ponto T é um ponto de tangência da reta tangente a circunferência $\mathcal{C}$ que contém o ponto P (figura abaixo).*



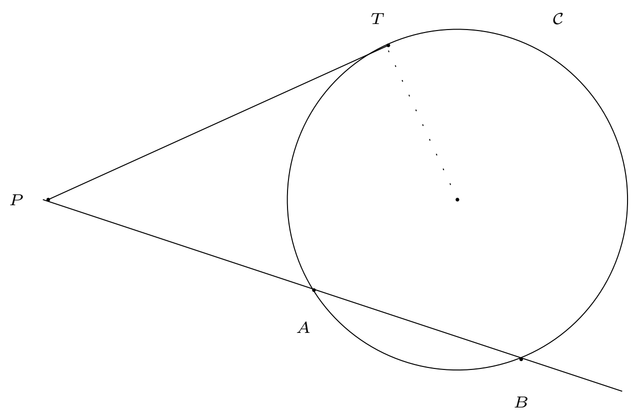
O Teorema abaixo nos dá um outro modo de construir a média geométrica.

Teorema 2.5.1 (Teorema da Secante-Tangente)

Sejam P é um ponto exterior a uma circunferência $\mathcal{C}$, $\overleftrightarrow{PT}$ e $P\overleftrightarrow{A}B$ as retas tangente e secante a circunferência $\mathcal{C}$, respectivamente (o ponto T é o ponto de tangência da reta $\overleftrightarrow{PT}$ com a circunferência $\mathcal{C}$, A e B estão sobre a circunferência $\mathcal{C}$ e sobre a reta secante - figura abaixo).

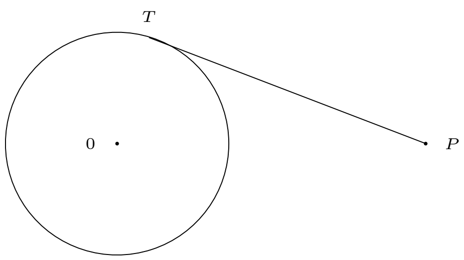
Então

$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

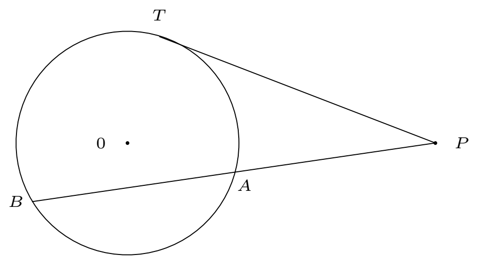


Demonstração:

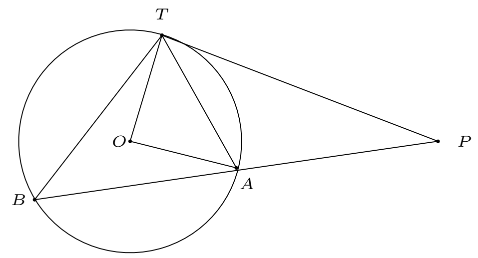
Suponhamos que a circunferência $\mathcal{C}$ tem centro no ponto O e raio OT, onde o ponto T é o ponto de tangência da reta que contém o ponto P com a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo).



Consideremos um ponto A sobre a circunferência $\mathcal{C}$ e o ponto B obtido da interseção da reta que contém o segmento $\overline{PA}$ com a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo).



Com isto temos a seguinte configuração geométrica.



Definamos

$$\alpha \doteq \widehat{PBT}, \quad \beta \doteq \widehat{BTP}, \quad \gamma \doteq \widehat{TPB},$$
$$y \doteq \widehat{TAO}, \quad x \doteq \widehat{ATP}, \quad z \doteq \widehat{PAT}.$$

Como segue que o triângulo ΔOTA é isóceles ($OT = OA$ é o raio da circunferência $\mathcal{C}$) segue que

$$\widehat{ATO} = \widehat{OAT} = y \quad \text{e} \quad \widehat{AOT} = 2\widehat{PBT} = 2\alpha.$$

Logo do triângulo ΔOTA segue que

$$\widehat{AOT} + \widehat{OTA} + \widehat{TAO} = \pi \Rightarrow 2\alpha + 2y = \pi, \quad \text{ou seja} \quad \alpha + y = \frac{\pi}{2}. \tag{2.5}$$

Observemos que

$$\widehat{PTO} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{logo} \quad x + y = \widehat{PTA} + \widehat{AOT} = \widehat{PTO} = \frac{\pi}{2}. \tag{2.6}$$

Das equações (2.5) e (2.6) acima segue que

$$x = \alpha \quad \text{ou seja,} \quad \widehat{PTA} = \widehat{PBT}. \tag{2.7}$$

Do triângulo ΔPBT segue que

$$\widehat{PBT} + \widehat{BTP} + \widehat{TPB} = \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi \tag{2.8}$$

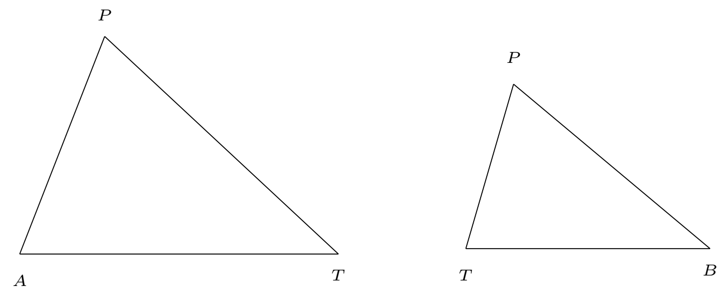
e do triângulo ΔPAT segue que

$$\widehat{PAT} + \widehat{ATP} + \widehat{TPA} = \pi \quad \overset{[\widehat{TPA}=\widehat{TPB}]}{\Rightarrow} \quad z + x + \gamma = \pi \quad \overset{(2.7)}{\Rightarrow} \quad z + \alpha + \gamma = \pi. \tag{2.9}$$

Comparando (2.8) e (2.9) segue que

$$z = \beta \Rightarrow \widehat{PAT} = \widehat{BTP}$$

o que implica que os triângulos ΔPAT e ΔPBT são semelhantes (caso AAA).



Logo elementos correspondentes dos dois triângulos guardam a mesma proporção, em particular temos que a seguinte identidade

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}, \quad \text{isto é,} \quad PA \cdot PB = PT^2,$$

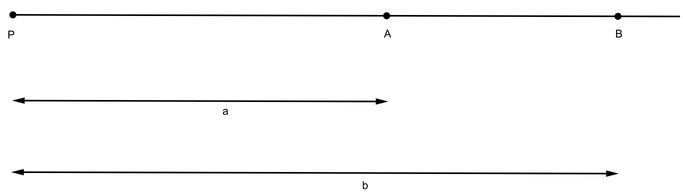
concluindo a demonstração do resultado.

$\square$

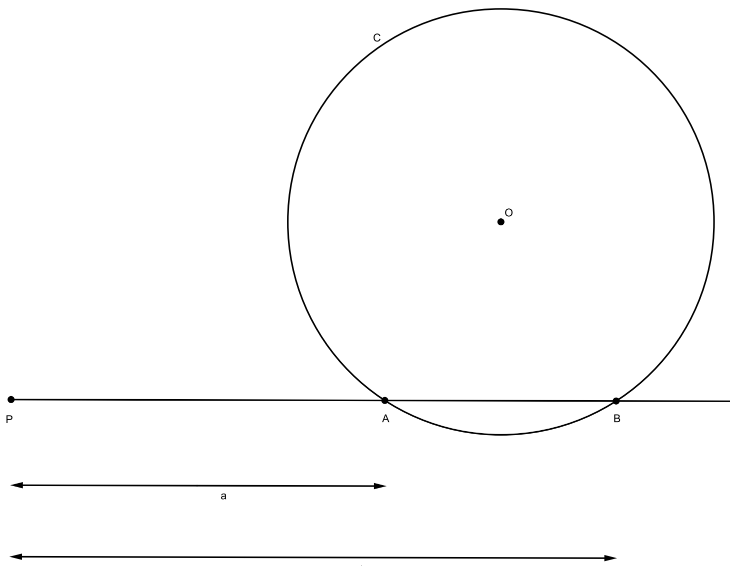
Observação 2.5.2

1. *Para obter geometricamente a média geométrica pelo terceiro modo, agiremos da seguinte forma:*

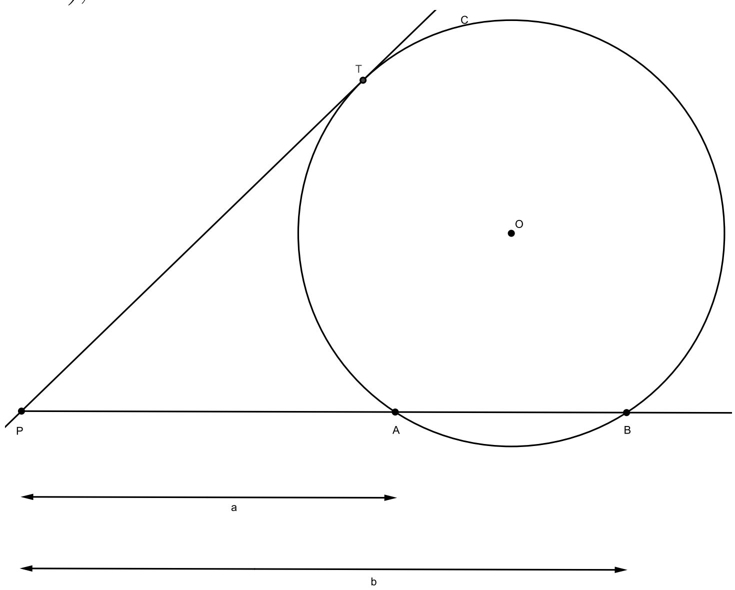
   (a) *Dados* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *encontremos três pontos* A*,* B *e* P *sobre uma semi-reta com extremidade no ponto* P *tal que* $PA = a$ *e* $PB = b$ *(figura abaixo);*



   (b) *Encontremos uma circunferência* $\mathcal{C}$ *que passe pelos pontos* A *e* B *(figura abaixo);*



(c) *Encontre o ponto T de tangência da reta tangente a circunferência $\mathcal{C}$ que contém o ponto P (figura abaixo);*



(d) *Com isto temos que PT é a média geométrica de $\underline{a}$ e $\underline{b}$.*

De fato, do Teorema da Secante-Tangente, segue que

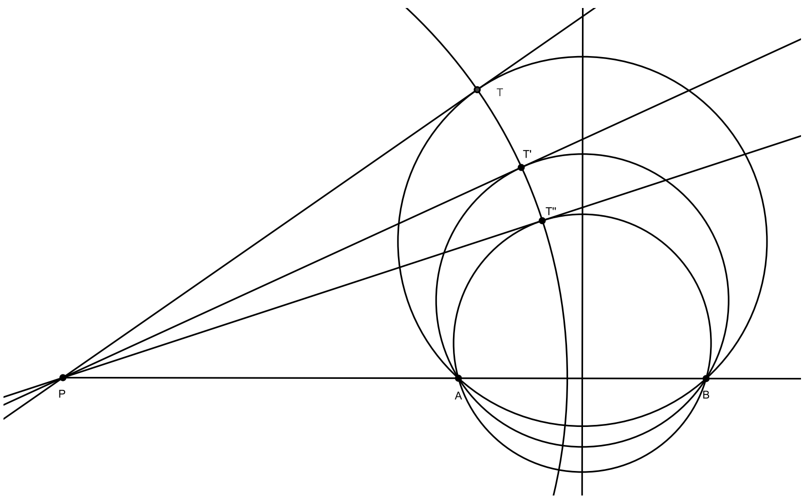
$$PT^2 = PA.PB, \quad \textit{ou seja,} \quad PT = \sqrt{PA.PB} = \sqrt{ab},$$

mostrando-se que PT é a média gemométrica entre $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

2. *Se no último caso, escolhermos uma outra circunferência $\mathcal{C}'$, o ponto de tangência T' irá mudar porém o comprimento do segmento $\overline{PT'}$ não se alterará, ou seja,*

$$PT = PT'.$$

3. *Na verdade mostramos que o lugar geométrico formado pelos pontos de tangência das retas tangentes, que contenham o ponto P, às circunferências que passam pelos pontos A e B estão sobre a circunferência de centro em P e raio PT, onde o ponto T foi escolhido com anteriormente (pois PT é constante, a saber, $PT = \sqrt{ab}$ - (figura abaixo).*



Exemplo 2.5.1 *Dados $a, b > 0$, resolver, geometricamente, a equação do 2.o grau*

$$x^2 - ax + b^2 = 0,$$

onde $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são números reais não negativos.

Resolução:

Observemos que para a equação do 2.o grau acima ter solução real deveremos ter

$$\Delta = (-a)^2 - 4.1.b^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \geq 2b.$$

Observemos que se $a = 2b$ então, a equação do 2.o grau acima tornar-se-á

$$(x - b)^2 = 0,$$

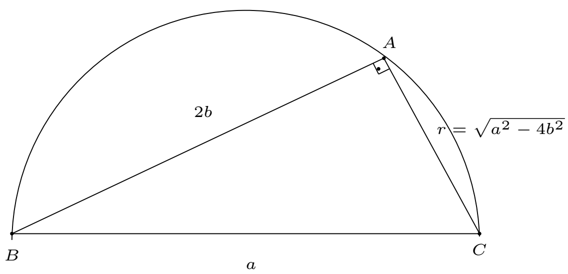
cuja única solução será $x = b$.
Logo um segmento $\overline{AB}$ de comprimento $\underline{b}$ será a solução do problema.
A seguir consideraremos o caso $a > 2b$.
1.^{a} Solução:
Algebricamente sabemos que

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}.$$

Observemos que

$$r \doteq \sqrt{a^2 - 4b^2} < \sqrt{a^2} = a$$

é o comprimento do cateto do triângulo retângulo ΔABC cuja hipotenusa ,$\overline{AB}$, tem comprimento $\underline{a}$ e o outro cateto, $\overline{AC}$, tem comprimento $2b$ (figura abaixo).



Logo a construção poderá ser feita e as raízes

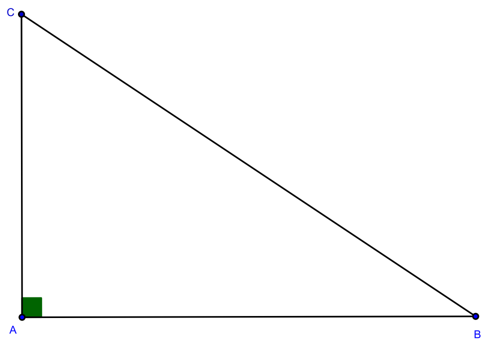
$$x_1 = \frac{a - r}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{a + r}{2}$$

podem ser obtidas, geometricamente, de modo simples, como veremos a seguir.

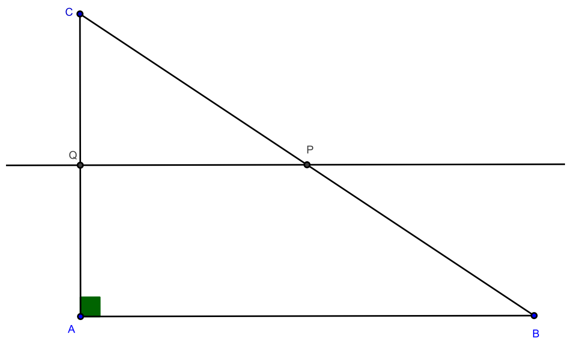
1. Construa um triângulo, retângulo no vértice A, ΔABC de tal modo que

$$AB = 2b \quad \text{e} \quad BC = a.$$

Deste modo obtemos $AC = r$ (figura abaixo);



2. Pelo ponto médio, P, do segmento $\overline{BC}$ traçamos a reta paralela a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que intercepta o segmento $\overline{AC}$ no ponto Q (figura abaixo);



Observemos que os triângulos ΔCBA e ΔCPQ são semelhantes (caso AAA) logo os comprimentos de lados correspondentes quardam uma mesma proporção, em particular,

$$\frac{QC}{AC} = \frac{PC}{BC} \overset{[AC=r,\, PC=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}]}{\Rightarrow} \frac{QC}{r} = \frac{\frac{a}{2}}{a}.$$

Logo

$$QC = \frac{r}{2}.$$

3. A circunferência de centro no ponto C e raio $\overline{QC}$ encontrará a reta $\overleftrightarrow{BC}$ nos pontos M e N.

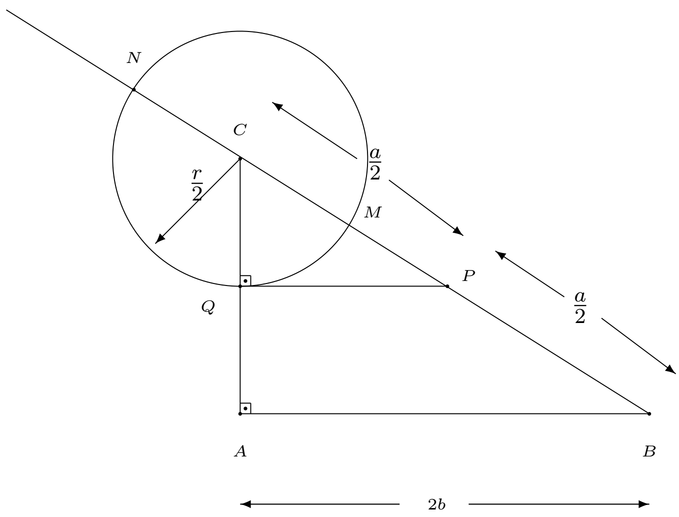
Logo

$$x_1 \doteq PM = PC - MC = PC - QC = \frac{a}{2} - \frac{r}{2} = \frac{a-r}{2}$$

e

$$x_2 \doteq PN = PC + CN = PC + QC = \frac{a}{2} + \frac{r}{2} = \frac{a+r}{2}$$

serão as raízes da equação do 2.o grau do problema (figura abaixo).



2.ª Solução:

Se x_1 e x_2 são soluções então deveremos ter que a soma das raízes deverá ser $\underline{a}$, isto é,

$$x_1 + x_2 = a$$

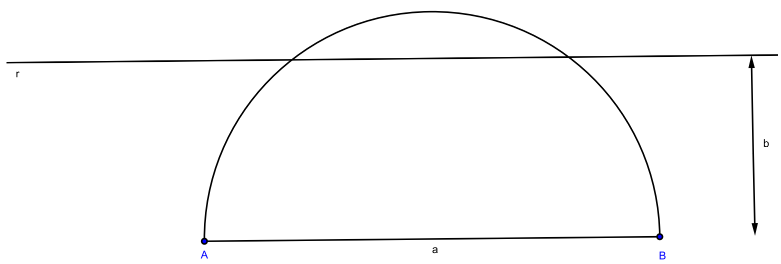
e o produto das raízes deverá ser $\underline{b^2}$, isto é,

$$x_1 x_2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x_1 x_2} = b.$$

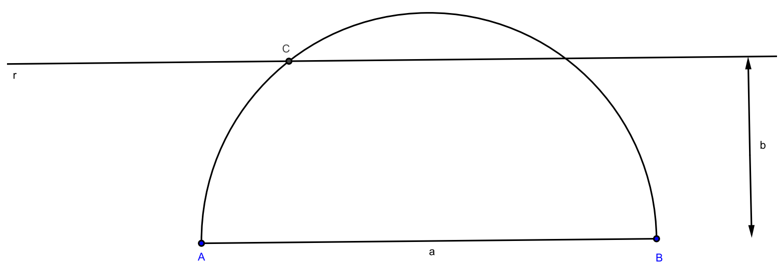
Logo, devemos encontrar dois segmentos cuja soma dos comprimentos seja $\underline{a}$ e a média geométrica seja b.

Para isto temos a seguinte constução:

1. Consideremos uma semi-circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ que tem comprimento $\underline{a}$ e um reta, $\underline{r}$, paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, que dista $\underline{b}$ da mesma (figura abaixo);



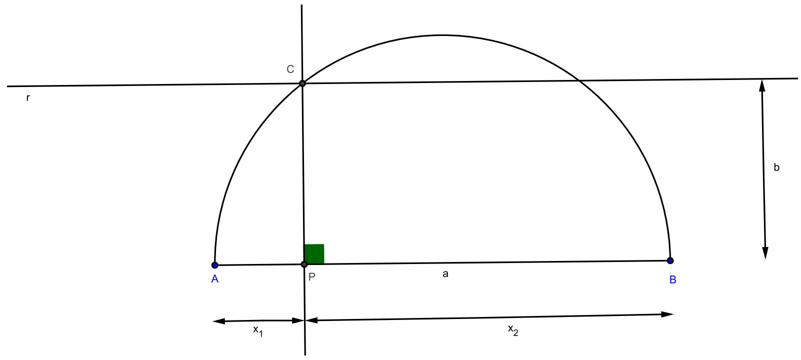
2. A reta $\underline{r}$ obtida acima determinará um ponto C sobre a semi-circunferência (figura abaixo);



3. A projeção do ponto C sobre o segmento $\overline{AB}$ nos dará um ponto P tal que

$$x_1 \doteq PA \quad e \quad x_2 \doteq PB$$

serão as soluções da equação do 2.o grau do problema (figura abaixo).

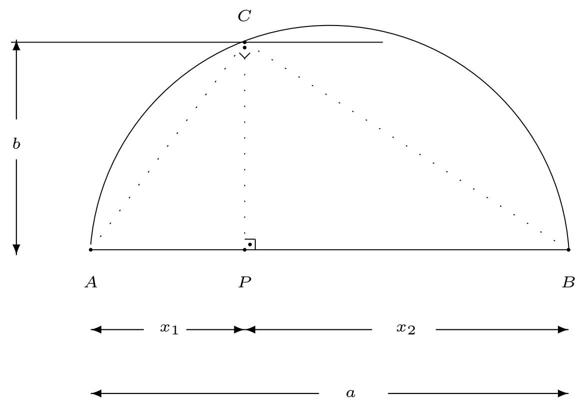


Para mostrar que a afirmação é verdadeira basta observar que o triângulo ΔABC é retângulo no vértice C.

Logo do item 2. da observação acima, sabemos que o comprimento da altura $\overline{CP}$ relativa a hipotenusa $\overline{AB}$ (isto é, $CP = b$) satisfaz

$$b^2 = x_1 x_2,$$

ou seja, obtivemos, geometricamente, as soluções da equação do 2.o grau dada no problema.



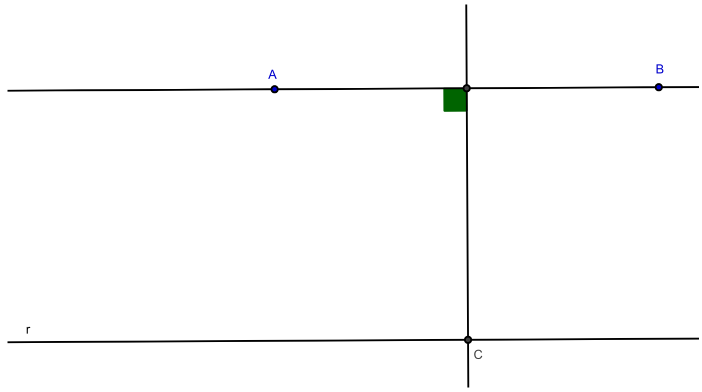
Exemplo 2.5.2 *Dados os pontos distintos A e B em um mesmo semi-plano determinado pela reta $\underline{r}$ construir, geometricamente, uma circunferência que contenha os pontos A e B e seja tangente a reta $\underline{r}$.*

Resolução:

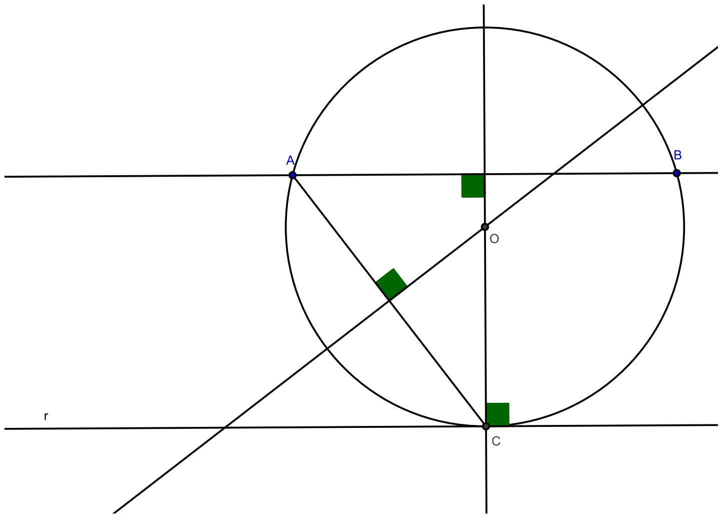
1.o Caso: A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a reta $\underline{r}$.

Neste caso agiremos da seguinte forma:

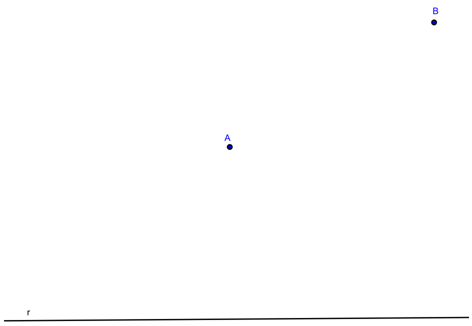
(a) Consideramos a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$ que interceptará a reta $\underline{r}$ num ponto C (figura abaixo).



(b) A circunferência procurada será a que passa pelos pontos A, B e C.
Para traça-la, bastará encontrar a mediatriz do segmento $\overline{AC}$ e na intersecção da mesma com a mediatriz obtida acima termos o centro da circunferência, O.
O raio será $\overline{OC}$ (ou $\overline{OA}$ ou $\overline{OB}$ (figura abaixo).

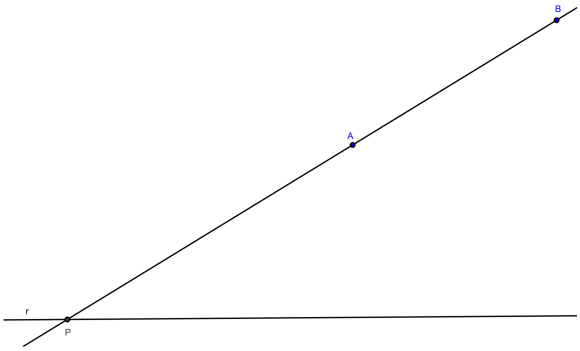


<u>2.o Caso:</u> A reta $\overleftrightarrow{AB}$ não é paralela a reta $\underline{r}$ (figura abaixo).

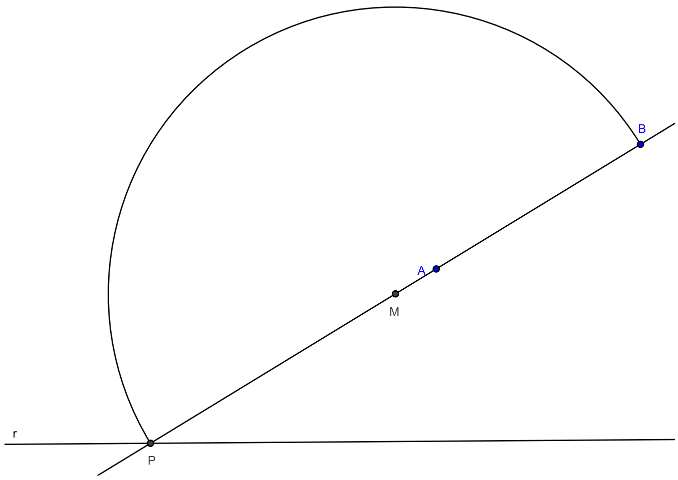


Neste caso agiremos da seguinte forma:

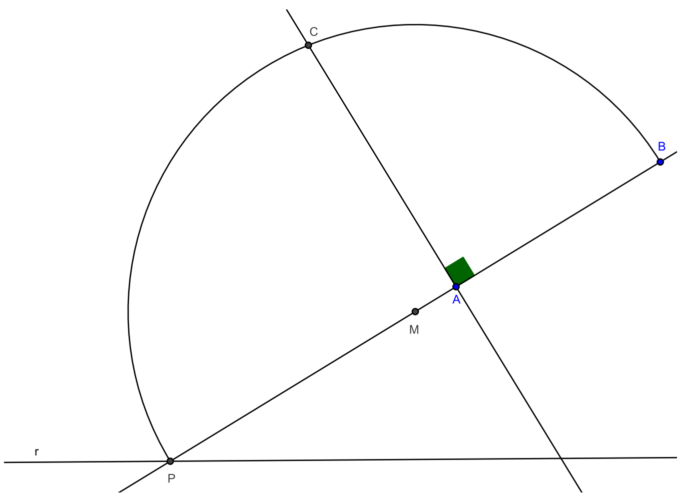
(a) Como as retas $\underline{r}$ e a reta pelos pontos A e B não são paralelas, existirá um ponto P na interceção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a reta r que chamaremos de P (figura abaixo).



(b) Consideremos a semi-circunferência de centro no ponto médio, M, do segmento $\overline{PB}$ (estamos supondo que $PA < PB$) e raio $\dfrac{PB}{2}$ (figura abaixo).



(c) Seja C o ponto da intersecção da reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto A com a semi-circunferência do item (b) acima (figura abaixo).



Do item 2. da observação anterior sabemos que

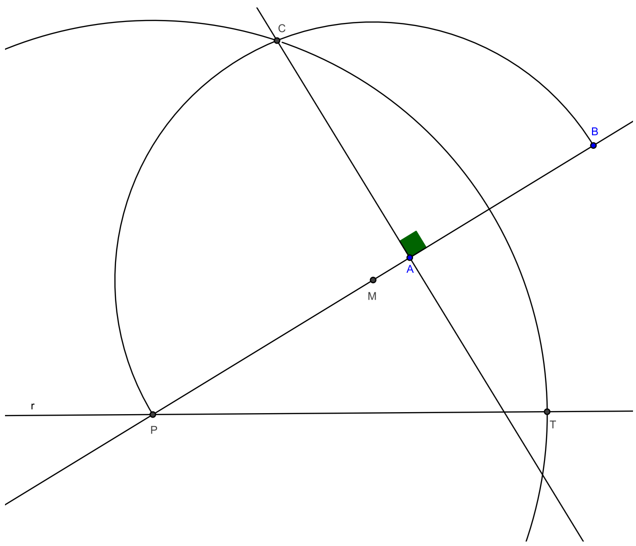
$$PC^2 = PA.PB$$

pois o triângulo ΔPCB é retângulo no vértice C.
Observemos que se T é o ponto de tangência da circunferência procurada com a reta $\underline{r}$ então, do Teorema da Secante-Tangente teremos

$$PT^2 = PA.PB,$$

ou seja, PT é a média geométrica entre PA e PB, assim, $PT = PC$.

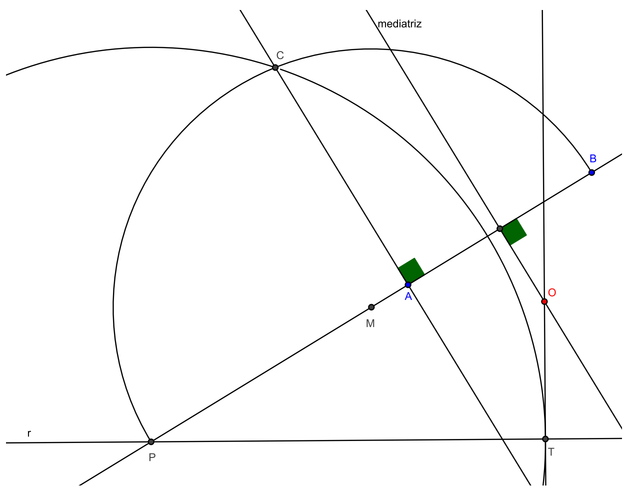
(d) A circunferência de centro em P e raio $\overline{PC}$ interceptará a reta $\underline{r}$ no ponto T (que está no semi-plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{PC}$ que contém o ponto A - figura abaixo).



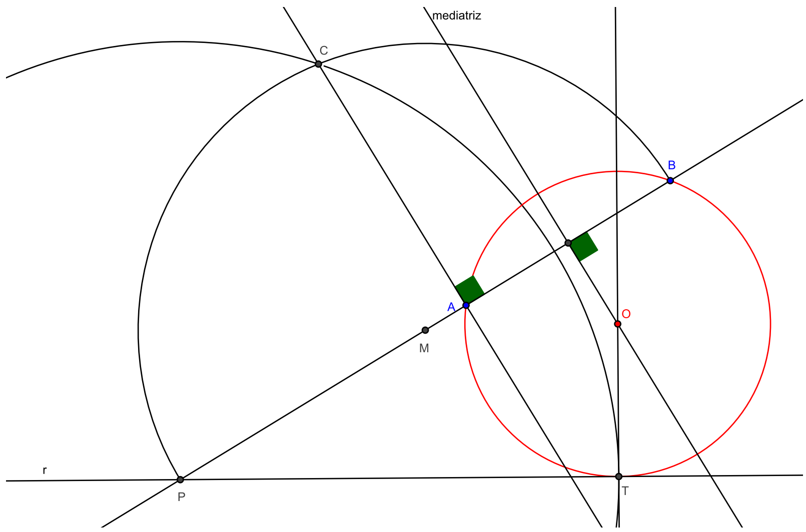
(e) A perpendicular a reta $\underline{r}$ pelo ponto T interceptará a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$ no ponto O (figura abaixo).
Afirmamos que

$$OT = OA = OB$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor. **Valor:+0.5**



(f) A circunferência procurada terá centro no ponto O e seu raio será $\overline{OT}$ (ou $\overline{OA}$ ou $\overline{OB}$ - figura abaixo) .



AQUI

2.6 O Segmento Áureo

Consideremos um ponto C sobre o segmento $\overline{AB}$ (excetuando-se os extremos, isto é, $C \neq A$ e $C \neq B$) de tal modo que a razão entre os comprimentos dos segmentos de menor comprimento pelo comprimento outro (que tem maior comprimento) seja igual a razão entre este comprimento deste último pelo de comprimento total.

Para ilustrar se consideremos a figura abaixo teremos:

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Definição 2.6.1 *Na situação acima o segmento $\overline{AC}$ será dito* **segmento áureo do segmento $\overline{AB}$**.

Observação 2.6.1

1. *Se $AB = a$ segue que $\overline{AC}$ será segmento áureo do segmento $\overline{AB}$ se, e somente se,*

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

ou, equivalentemente,

$$AC^2 = AB.CB = a.CB = a.(AB - AC) = a.CB = a.(a - AC) = a^2 - a.AC,$$

ou seja,

$$AC^2 + a.AC - a^2 = 0,$$

que é uma equação do 2.o grau (na variável AC) cujas raízes são

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2a} < 0 \quad e \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = a\frac{\sqrt{5} - 1}{2} > 0.$$

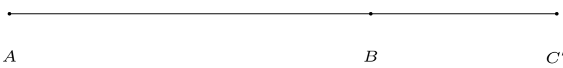
A raiz $x_1 < 0$ será descartada (não representa comprimento de um segmento), logo

$$AC = a\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

1. *Esse número aparace em várias situações no desenvolvimento da Matemática, por exemplo, ele é o comprimento do lado de um decágono regular inscrito numa circunferência de raio a.*
A demonstração disso será deixada como exercício para o leitor. $\boxed{\textbf{Valor: +0.5}}$

2. *Suponhamos que C' sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é um ponto exterior ao segmento $\overline{AB}$ com a mesma propriedade acima, isto é, (vide figura abaixo)*

$$\frac{BC'}{AB} = \frac{AB}{AC'}.$$



Definição 2.6.2 *O segmento $\overline{AC'}$ será dito* **segmento áureo externo ao segmento $\overline{AB}$**.

Observação 2.6.2

1. *Se $AB = a$ então $\overline{AC'}$ é segmento áureo externo ao segmento $\overline{AB}$ se, e somente se,*

$$\frac{BC'}{AB} = \frac{AB}{AC'},$$

ou, equivalentemente,

$$AC'.BC' = a^2,$$

ou ainda

$$a^2 = AC'.(AC' - AB) = AC'^2 - a.AC'.$$

Logo

$$AC'^2 - a.AC' - a^2 = 0.$$

A equação acima é uma equação do 2.o grau (na variável AC') e neste caso a solução que nos interessa será (a outra será descartada pois é $a\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ que é negativa):

$$AC = a\frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

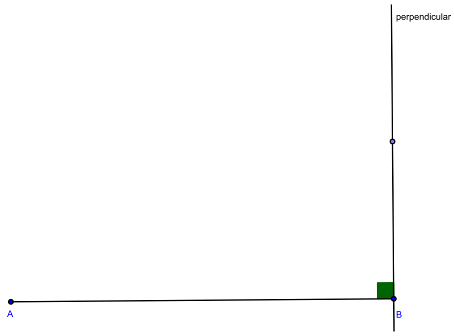
2. *Observemos que na situação acima teremos*

$$AC.AC' = a\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.a\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = a^2 = AB^2,$$

ou seja, a média geométrica entre AC e AC' será AB.

3. *Dado o segmento $\overline{AB}$ daremos, a seguir, um modo de obter, geometricamente, a razão áurea do segmento $\overline{AB}$.*

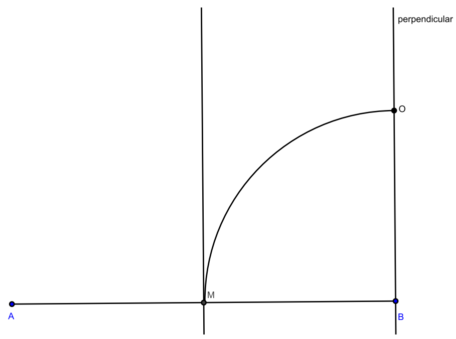
   (a) *Para isto escolhemos um segmento $\overline{AB}$ tal que $AB = a$ e tracemos a reta perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto B (figura abaixo);*



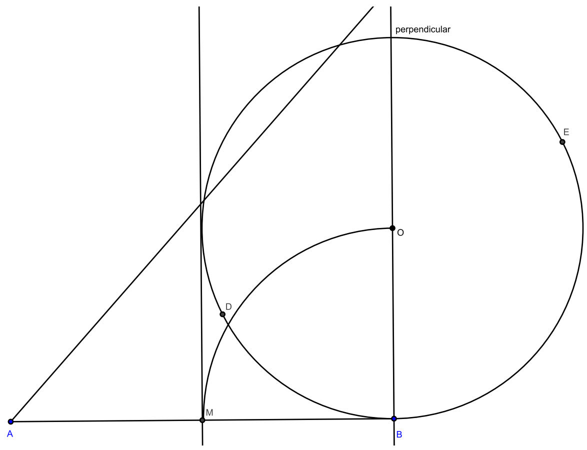
(b) Encontramos o ponto O sobre a perpendicular obtida acima de modo que

$$OB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

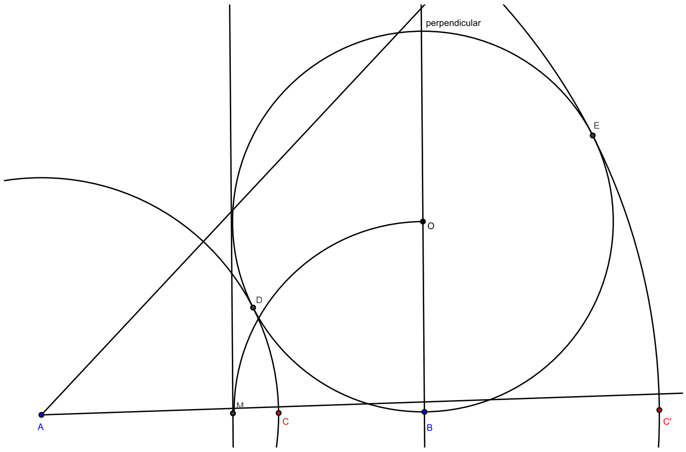
Observemos que existem dois pontos que tem a mesma propriedade, escolha um deles (figura abaixo).



(c) A circunferência de centro em O e raio $\frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ intercepta a reta $\overleftrightarrow{AO}$ nos pontos D e E (figura abaixo);



(d) As circunferências de centro em A e raios AD e AE interceptarão a semi-reta que tem extremidade no ponto A e contém o ponto B nos pontos C e C' (figura abaixo);



(e) *Com isto temos que*

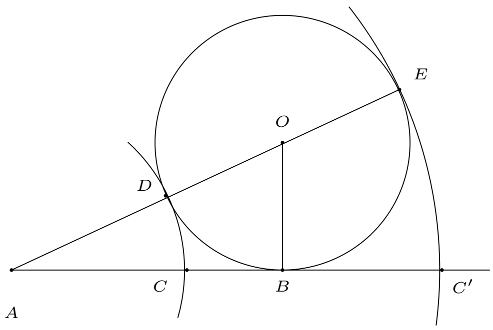
$$AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad e \quad AC' = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

isto é, $\overline{AC}$ e $\overline{AC'}$ são segmentos áureo e áureo externos do segmento $\overline{AB}$, respectivamente.

De fato, para mostrar que isto é verdade basta observar que do Teorema da Secante-Tangente temos que

$$AB^2 = AD.AE = AC.AC',$$

pois o segmento $\overline{AB}$ é tangente a circunferência e o segmento $\overline{AE}$ é secante à circunferência nos pontos D e E (e $AD = AC$, $AE = AC'$ por construção).



2.7 Os Números: $\frac{1}{a}$, a^2 e $\sqrt{a}$

Nesta seção trataremos dos problemas relacionados a traçar geometricamente segmentos de comprimentos $\frac{1}{a}$, a^2 e $\sqrt{a}$, para $a > 0$.

Para isto temos a:

Observação 2.7.1

1. *Se $a > b > 0$ são comprimentos de dois segmentos então*

$$\text{a soma,} \quad a+b, \quad \text{e a diferença,} \quad a-b$$

podem ser obtidas geometricamente da seguinte maneira:

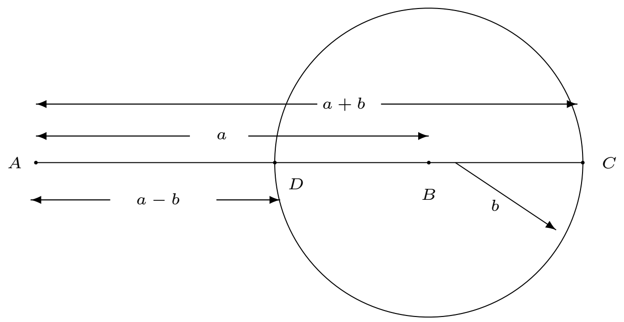
Escolher sobre uma reta $\underline{r}$ *dois pontos* A *e* B *tal que* $AB = a$.

A circunferência de centro no ponto B *e raio* $\underline{b}$ *interceptará a reta* $\underline{r}$ *em dois pontos, que indicaremos por* C *e* D*, sendo o ponto* C *no exterior do segmento* $\overline{AB}$ *e o ponto* D *no interior do segmento* $\overline{AB}$ *(figura abaixo).*

Neste caso

$$AD = a - b \quad e \quad AC = a + b.$$

Geometricamente temos:



2. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a > 0$ *(comprimento de um segmento dado) podemos construir, geometricamente, segmentos de comprimentos* $n \cdot a$, $\dfrac{a}{n}$ *e* $a\sqrt{n}$ *como vimos anteriormente.*

3. *Uma questão interessante seria:*

Dados $b > 0$ *como dar um significado geométrico para a expressão* $\dfrac{a}{b}$ *?*

Observemos que se estabelecermos um segmento como sendo a unidade de medida do comprimento (isto é, associaremos a esse segmento o número real 1*) a expressão* $\dfrac{a}{b}$ *poderá ser representada geometricamente por um segmento (ou seja, poderemos construir um segmento cujo comprimento seja* $\dfrac{a}{b}$*).*

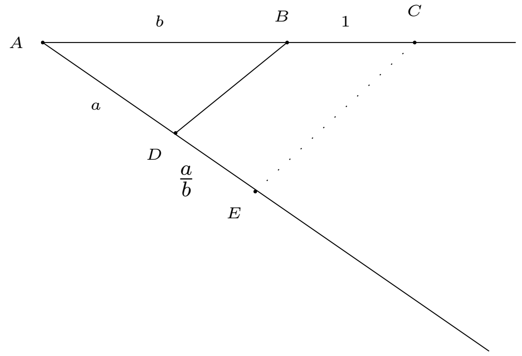
De fato, se definirmos

$$x \doteq \frac{a}{b}$$

poderemos escrever

$$x = \frac{a.1}{b}, \quad ou\ ainda, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{x},$$

e assim $\underline{x}$ *será a quarta proporcional entre os segmentos de comprimento* $\underline{b}$, $\underline{a}$ *e o segmento unitário (vide figura).*



$AB = b,\ BC = 1,\ AD = a \ \Rightarrow\ DE = \dfrac{a}{b}$

Devido a isso, temos a:

Definição 2.7.1 *Na situação acima, estando estabelecido um segmento unitário, diremos que a expressão*

$$x = \frac{a}{b}$$

*é **construtível**.*

Observação 2.7.2

1. *O mesmo ocorre com as expressões $\dfrac{1}{a}$, a^2, $\sqrt{a}$ que, utilizando as idéias desenvolvidas anteriormente, podem representar comprimentos de segmentos, ou seja, são* **construtíveis**.

2. *A seguir daremos uma construção alternativa de um segmento de comprimento $\dfrac{1}{a}$ (um modo de obtê-lo seria tomando-se $a = 1$ e $b = a$ na observação anterior):*

   (a) Sejam A e C dois pontos sobre uma reta $\underline{r}$ tais que $AC = a$;

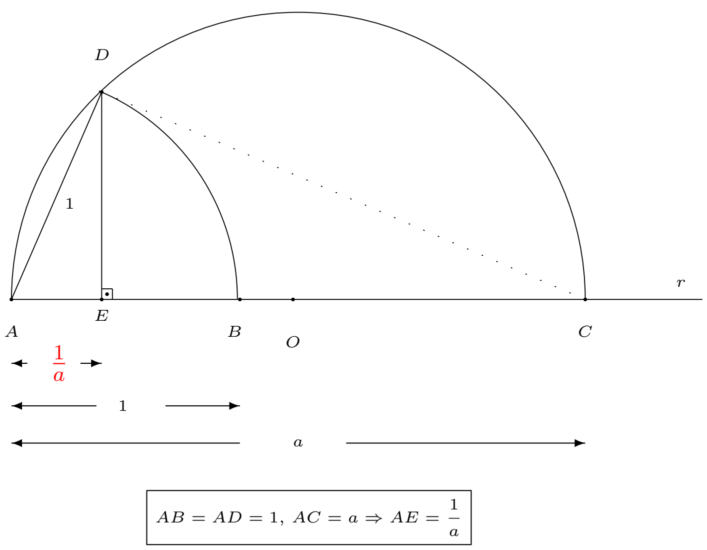
   (b) Encontre o ponto médio, O, do segmento $\overline{AC}$ e trace a semi-circunferência, $\mathcal{C}$, de centro no ponto O e raio $OA = OC$;

   (c) Trace a circunferência de centro no ponto A e raio 1 que interceptará a semi-circunferência $\mathcal{C}$ do item acima no ponto D e à reta $\underline{r}$ no ponto B;

   (d) A reta perpendicular a reta $\underline{r}$ que passa pelo ponto D interceptará a reta $\underline{r}$ no ponto E;

   (e) Com isto temos que o (figura abaixo)

$$AE = \frac{1}{a}.$$



Para mostrar a afirmação acima observemos que o triângulo ΔACD é retângulo no vértice D. Logo de uma observação feita anteriormente temos que

$$AD^2 = AC \cdot AE, \quad \textit{ou seja,} \quad 1 = a \cdot AE,$$

que implicará

$$AE = \frac{1}{a}$$

como queríamos mostrar.

3. *Construção de um segmento de comprimento* $\underline{a^2}$*:*

   (a) *Sejam* O *e* A *dois pontos sobre uma reta* $\underline{r}$ *tais que* $OA = 1$*;*

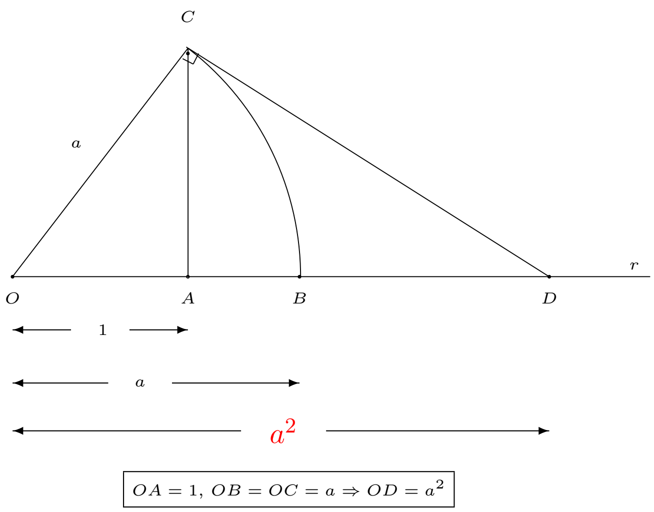
   (b) *A semi-circunferência de centro em* O *e raio* $\underline{a}$ *intercepta a reta perpendicular à reta* $\underline{r}$ *pelo ponto* A *no ponto* C*;*

   (c) *A semi-circunferência de centro em* O *e raio* $\underline{a}$ *intercepta a reta* $\underline{r}$ *no ponto* B*;*

   (d) *A reta perpendicular à reta que contém os pontos* O, C*, pelo ponto* C*, interceptará a reta* $\underline{r}$ *no ponto* D*;*

   (e) *Com isto temos que o (figura abaixo)*

$$OD = a^2.$$



Para mostrar a afirmação acima observemos que o triângulo ΔOCD *é retângulo no vértice* C*. Logo de uma observação anterior segue que*

$$OC^2 = OA.OD, \quad \text{ou seja,} \quad a^2 = OD,$$

como queríamos mostar.

4. *Construção de um segmentos de comprimento* $\sqrt{a}$*:*

   (a) *Sejam* O*,* A *e* B *três pontos sobre uma reta* $\underline{r}$ *tais que*

$$OA = 1, \quad OB = a$$

   com o ponto A *pertencente ao segmento* $\overline{OB}$*;*

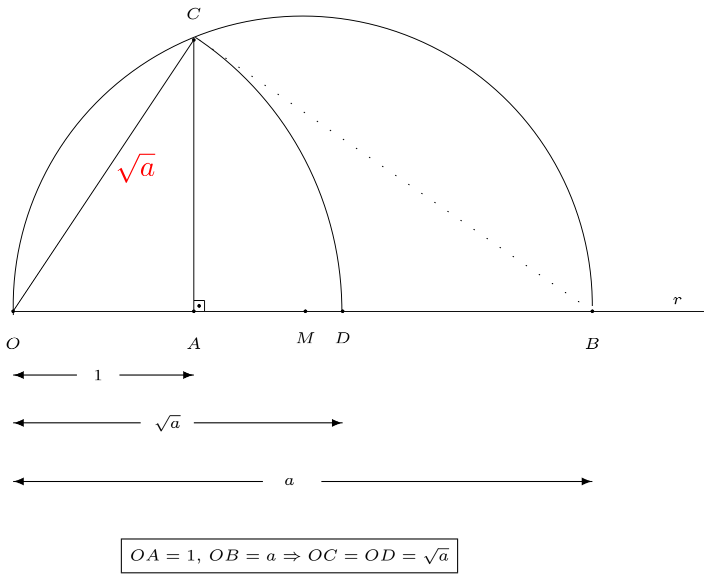
   (b) *Tracemos uma semi-circunferência,* $\mathcal{C}$*, de centro no ponto* M*, ponto médio do segmento* $\overline{OB}$*, e raio* $MO = MB$*;*

(c) A reta perpendicular à reta $\underline{r}$ *pelo ponto* A, *interceptará semi-circunferência* $\mathcal{C}$, *obtida acima, no ponto* C;

(d) A circunferência de centro em O *e raio* OC *encontrará o segmento* $\overline{OB}$ *no ponto* D;

(e) Com isto temos que o (figura abaixo)

$$OD = \sqrt{a}.$$



Observemos que o triângulo ΔOBC *é retângulo no vértice* C.

Logo, de uma observação anterior, segue que

$$OC^2 = OA.OB = a, \quad \text{ou seja,} \quad OD = OC = \sqrt{a}.$$

2.8 Exercícios

Para os exercícios que seguem vamos supor que esteja fixa uma unidade de comprimento, ou seja, um segmento de comprimento 1.

Exercício 2.8.1 *Construir um segmento de comprimento*

$$x = \frac{a\,b\,c}{d\,e},$$

onde a, b, c, d, e *são comprimento de segmentos dados* ($x \neq 0$).

Resolução:

Observemos que

$$x = \frac{abc}{de} \quad \text{se, e somente se,} \quad \frac{de}{ab} = \frac{c}{x},$$

ou seja, $\underline{x}$ será a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{de}$, $\underline{ab}$, $\underline{c}$.

Precisamos construir segmentos de comprimentos

$$y = ab \quad e \quad z = de.$$

Observemos que isto é equivalente a constuir segmentos de comprimentos $\underline{b, a, y}$ e $\underline{e, d, z}$ tais que

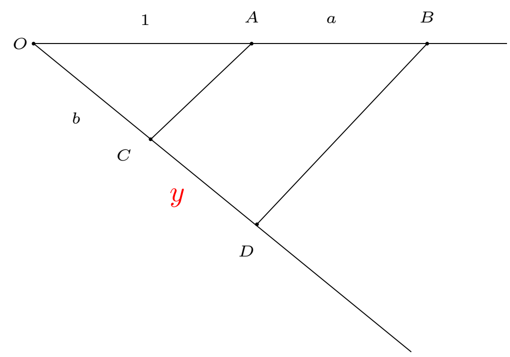
$$\frac{1}{b} = \frac{a}{y} \quad \text{e} \quad \frac{1}{e} = \frac{d}{z},$$

respectivamente, ou seja $\underline{y}$ e $\underline{z}$ deverão ser as quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{1, b, a}$ e $\underline{1, e, d}$, respectivamente.

Deste modo podemos construir segmentos de comprimentos $\underline{y}$ e $\underline{z}$ e, com estes, construirmos um de comprimento $\underline{x}$.

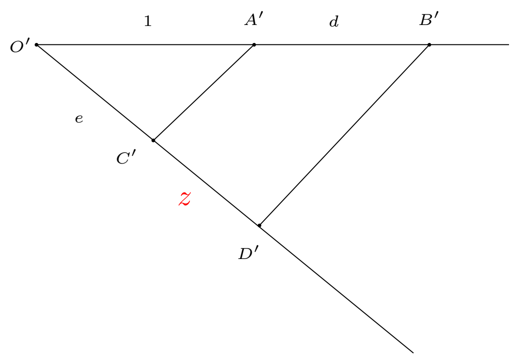
Vamos obter, geometricamente, um segmento de comprimento $\underline{x}$.

1. Começamos obtendo um segmento de comprimento $\underline{y}$ (quarta proporcional do segmento de comprimento $\underline{1, b, a}$):



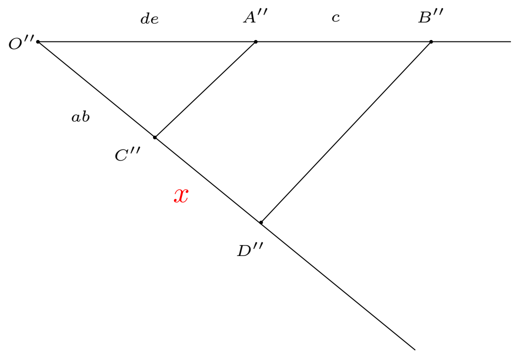
$$\boxed{\frac{1}{b} = \frac{a}{y} \Leftrightarrow y = ab}$$

2. De modo semelhante obtemos um segmento de comprimento $\underline{z}$ (quarta proporcional do segmento de comprimento $\underline{1, e, d}$):



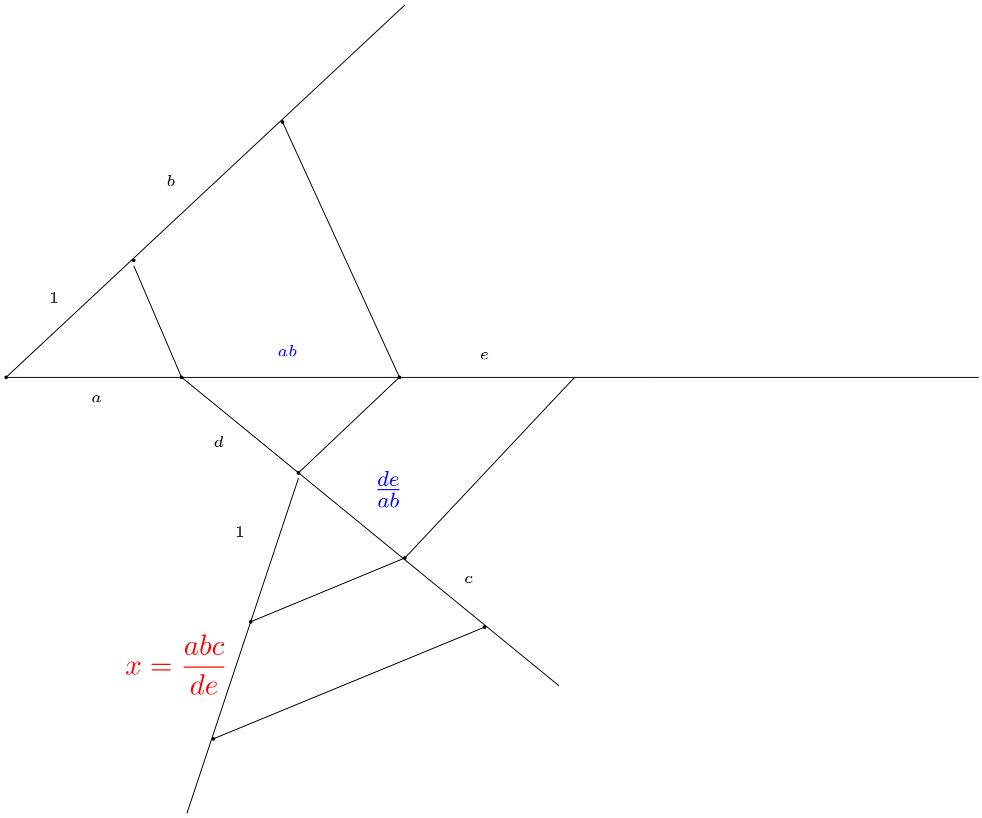
$$\boxed{\frac{1}{e} = \frac{d}{z} \Leftrightarrow z = de}$$

3. Com os comprimentos $y = ab$ e $z = de$ podemos obter $\underline{x}$ (quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{de}$, $\underline{ab}$, $\underline{c}$):



$$\boxed{\frac{de}{ab} = \frac{c}{x} \Leftrightarrow x = \frac{abc}{de}}$$

Um outro modo de obtermos, geometricamente, um segmento de compriumento $\underline{x}$ é dado pela figura abaixo:



Exercício 2.8.2 *Construir um segmento de comprimento*

$$x = \sqrt{a^2 + 3b^2}$$

onde $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são comprimentos de segmentos dados.

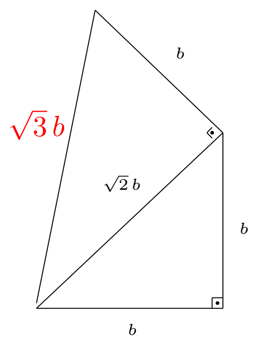
Resolução:

Observemos que

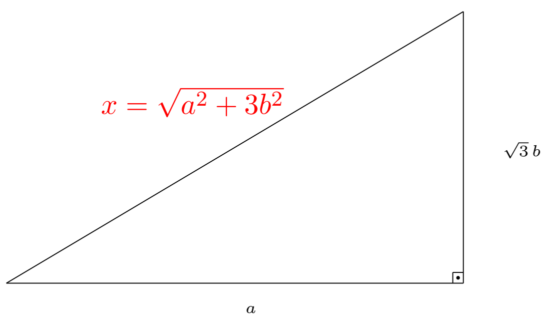
$$x = \sqrt{a^2 + 3b^2} = \sqrt{a^2 + (\sqrt{3}\, b)^2}.$$

Como sabermos construir $\sqrt{3}\, b$ poderemos construir $\underline{x}$ da seguinte forma:

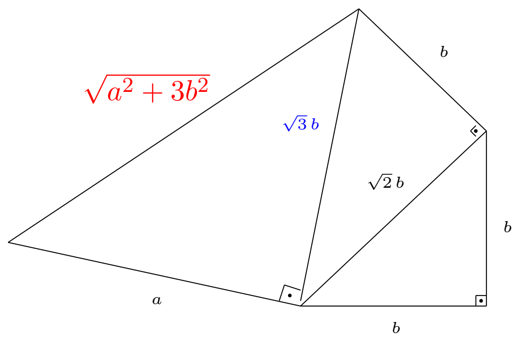
1. Para a construção de $\sqrt{3}\,b$ temos a figura abaixo:



2. Para obter
$$x = \sqrt{a^2 + (\sqrt{3}\,b)^2} = \sqrt{a^2 + c^2},$$
onde $c = \sqrt{3}\,b$ foi obtido no item acima temos, geometricamente:



Ou de maneira direta temos, geometricamente:

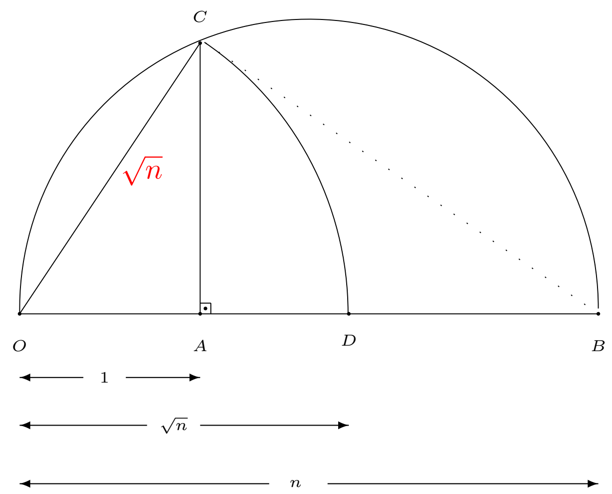


Exercício 2.8.3 *Construir um segmento de comprimento*
$$x = \frac{a}{\sqrt{n}}$$
onde $\underline{a}$ é o comprimento de um segmento dado e $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

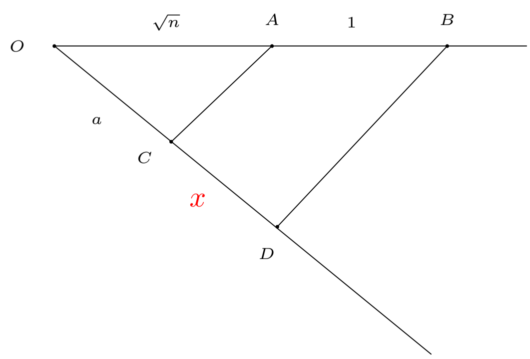
Uma possibilidade de obtermos $\underline{x}$, geometricamente, é a seguinte:

1. Obtemos geometricamente $\sqrt{n}$ (como na Observação (2.7.2) item 4.):



$$\boxed{OA = 1,\ OB = n \Rightarrow OC = OD = \sqrt{n}}$$

2. Observemos que
$$x = \frac{a}{\sqrt{n}} \quad \text{se, e somente se,} \quad \frac{\sqrt{n}}{a} = \frac{1}{x},$$
ou seja, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\sqrt{n}$, a, 1.
Logo podemos obtê-lo como na figura abaixo:



$$\boxed{\frac{\sqrt{n}}{a} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{n}}}$$

Exercício 2.8.4 *Construir um segmento com comprimento* $\sqrt{5.8}$ *centímetros.*

Resolução:

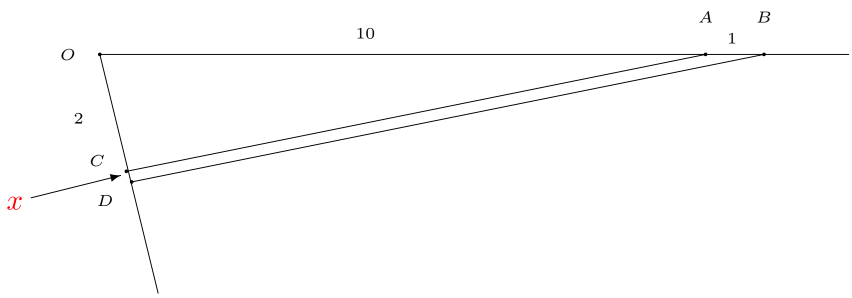
1. Observemos que
$$5.8 = 6 - 0.2.$$

2. Para obter um segmento de $0.2\,cm$ podemos agiremos da seguinte forma:

   Observemos que

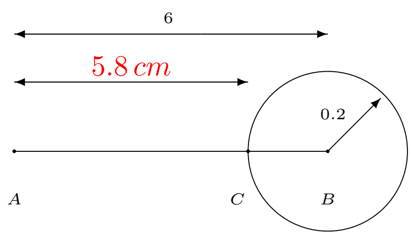
$$x = 0.2 = \frac{2}{10} \quad \text{se, e somente se,} \quad \frac{10}{2} = \frac{1}{x},$$

   isto é, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos 10, 2, 1, que pode ser obtida geometricamente por:



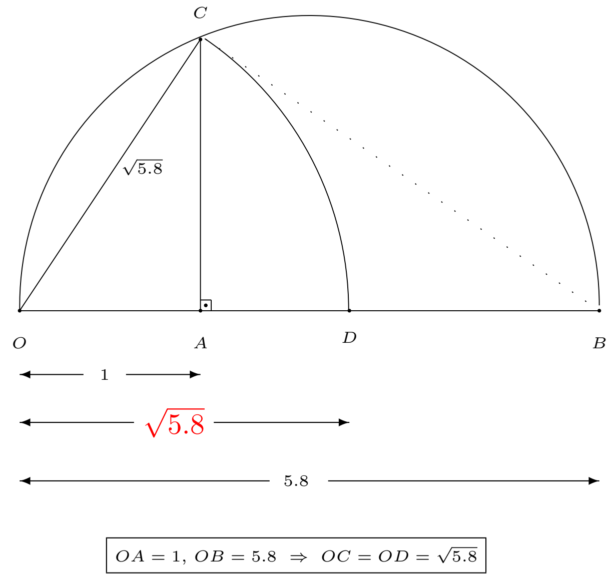
$$\boxed{\frac{10}{2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{10}}$$

3. Tendo um segmento de comprimento $x = 0.2\,cm$ podemos, geometricamente, obter um segmento de comprimento $5.8\,cm$ da seguinte forma:



$$\boxed{AB = 6\,cm,\ CB = 0.2\,cm \Rightarrow AC = 5.8\,cm}$$

4. Sabendo construir um segmento de $5.8\,cm$ podemos construir um de comprimento $\sqrt{5.8}\,cm$ como em uma observação anterior (figura abaixo).



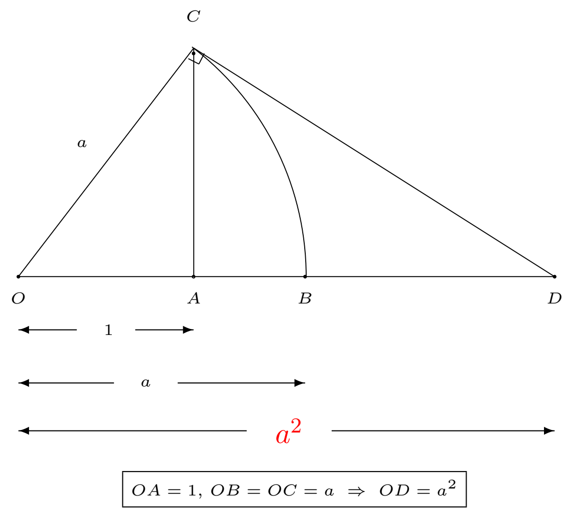
Exercício 2.8.5 *Construir um segmento de comprimento*

$$x = \frac{a^2}{b},$$

onde $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são comprimentos de segmentos dados.

Resolução:

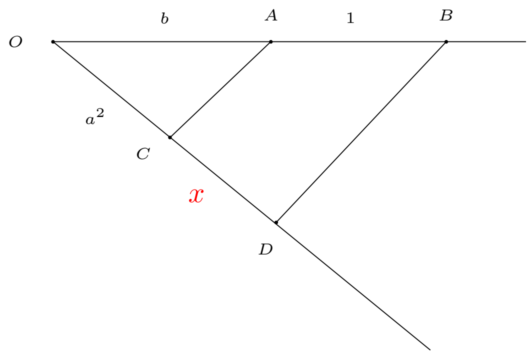
1. Primeiramente construimos um segmento de comprimento a^2 (figura abaixo):



2. Observemos que

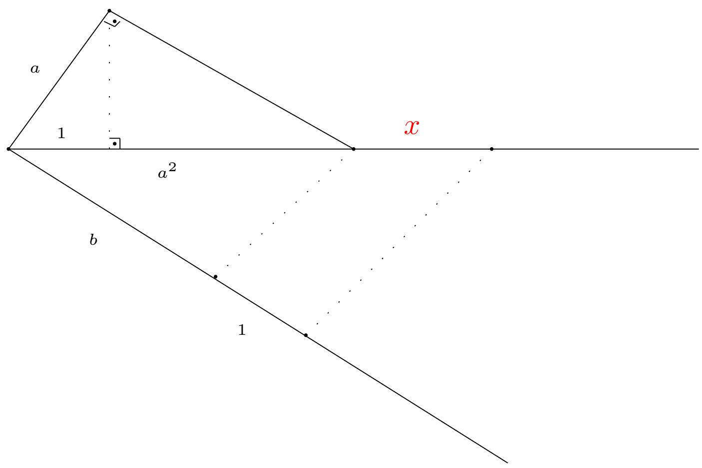
$$x = \frac{a^2}{b} \quad \text{se, e somente se,} \quad \frac{b}{a^2} = \frac{1}{x},$$

ou seja, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos b, a^2, 1, assim:



$$\boxed{\frac{b}{a^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{b}}$$

Podemos obter um segmento de comprimento $x = \dfrac{a^2}{b}$ em único desenho da seguinte forma:



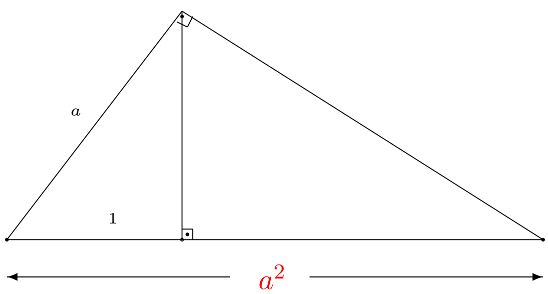
Exercício 2.8.6 *Construir um segmento de comprimento*

$$x = \frac{a^2 + bc}{d},$$

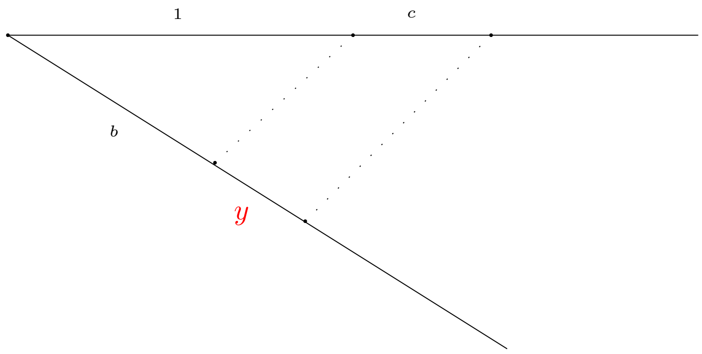
onde $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ *e* $\underline{d}$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

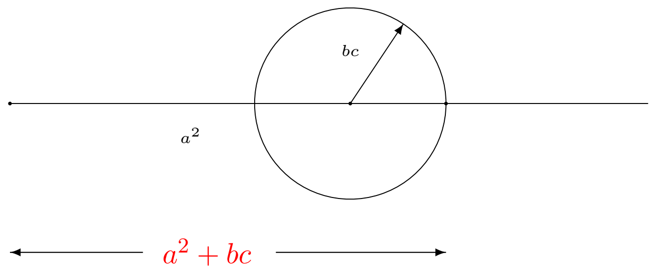
1. Construimos um segmento de comprimento a^2 (figura abaixo):



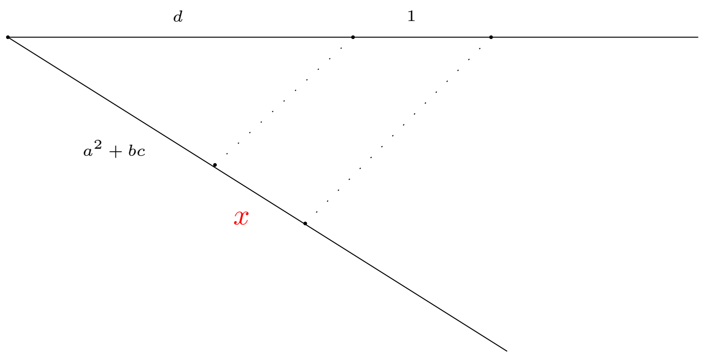
2. Para construir um segmento de comprimento
$$y = bc,$$
basta observarmos que esta igualdade é equivalente a
$$\frac{1}{b} = \frac{c}{y},$$
ou seja, $\underline{y}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos 1, b, c, assim temos a seguinte construção:



3. Podemos agora obter $a^2 + bc$ por meio da seguinte construção:



4. Finalmente podemos construir
$$x = \frac{a^2 + bc}{d}$$
escrevendo a igualdade como
$$\frac{d}{a^2 + bc} = \frac{1}{x},$$
ou seja, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos d, $a^2 + bc$, 1 e com isto temos a seguinte construção:



Exercício 2.8.7 *Construir um segmento de comprimento*

$$x = \frac{a^3 + a^2 b}{a^2 + b^2},$$

onde $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

Observemos que

$$x = \frac{a^3 + a^2 b}{a^2 + b^2} = a^2 \frac{a + b}{a^2 + b^2},$$

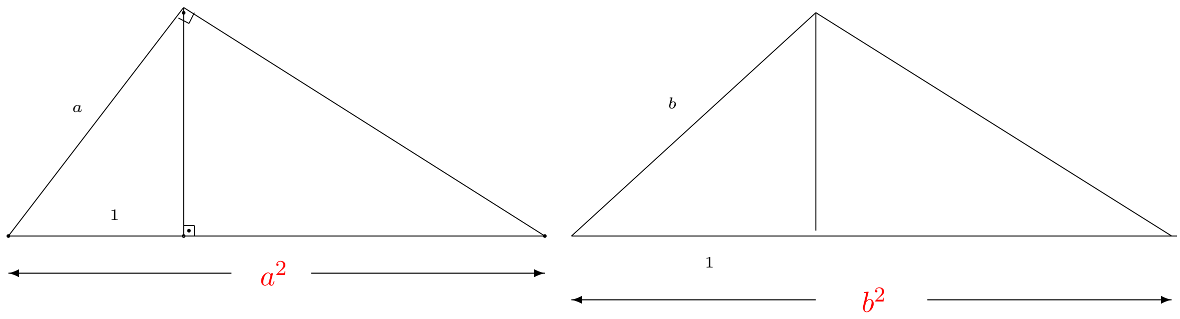
ou ainda,

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2}{x},$$

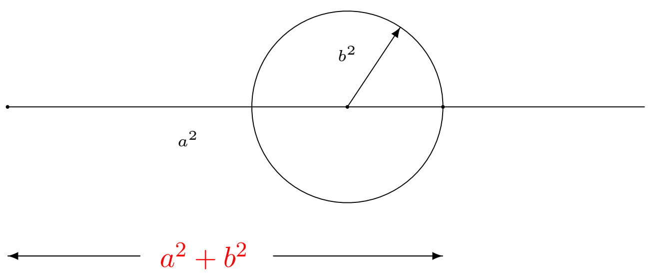
isto é, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segemtos $a^2 + b^2$, $a + b$, a^2.

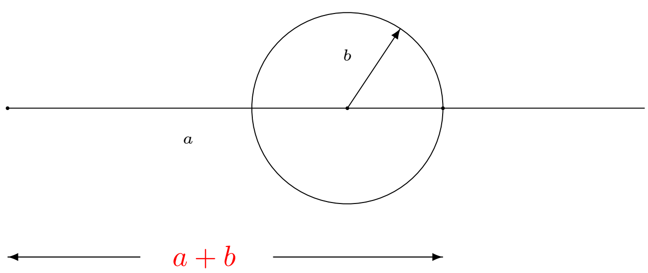
Com isto podemos obter, geometricamente, um segmento de comprimento $\underline{x}$ da seguinte forma:

1. Construimos segmentos de comprimentos a^2 e b^2 (figuras abaixo):

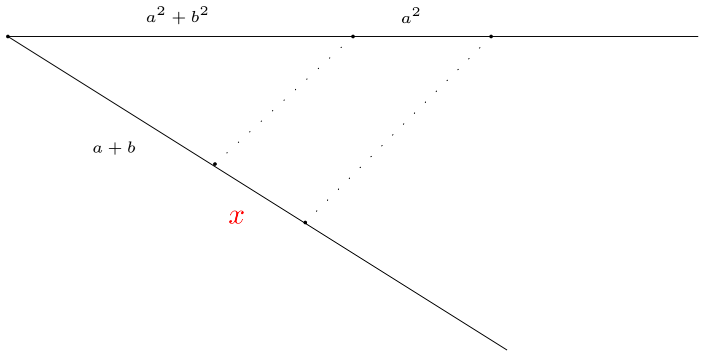


2. Podemos agora obter segmentos de comprimentos $a^2 + b^2$ e $a + b$ (figuras abaixo):





3. Como $x = \dfrac{a^3 + a^2 b}{a^2 + b^2}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $a^2 + b^2$, $a + b$, a^2 teremos, geometricamente, a seguinte construção:



Exercício 2.8.8 *Resolver, geometricamente, o sistema (não linear)*

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b^2 \end{cases},$$

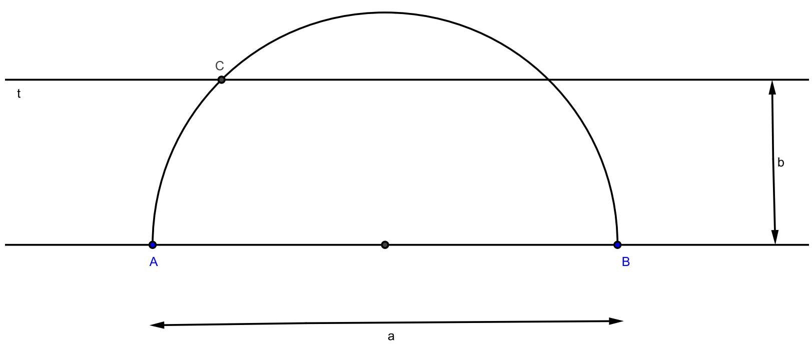
onde $a, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

Precisamos encontrar segmentos de comprimentos $\underline{x}$ e $\underline{y}$ de tal modo que a soma e a média geométrica dos mesmos sejam dadas.

Para isto:

1. Consideremos uma semi-circunferência, $\mathcal{C}$, de diâmetro, $\overline{AB} = a$ e uma reta, $\underline{t}$ paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ distando $\underline{b}$ da mesma que intercepta a semi-circunferêcia $\mathcal{C}$ no ponto C (figura abaixo):

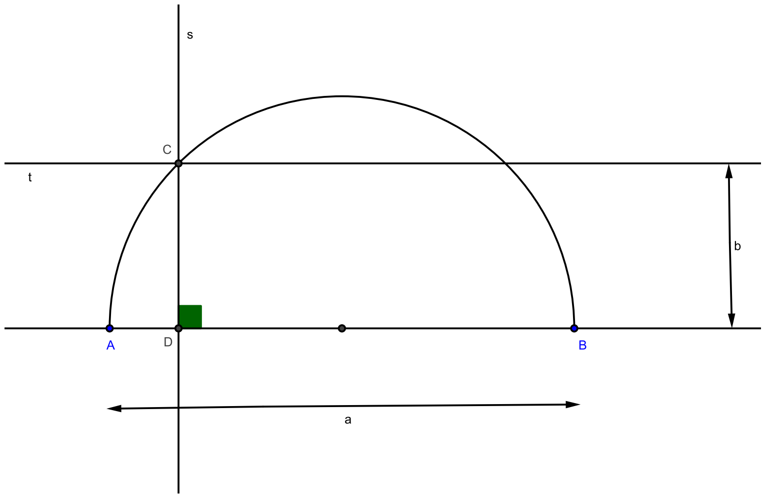


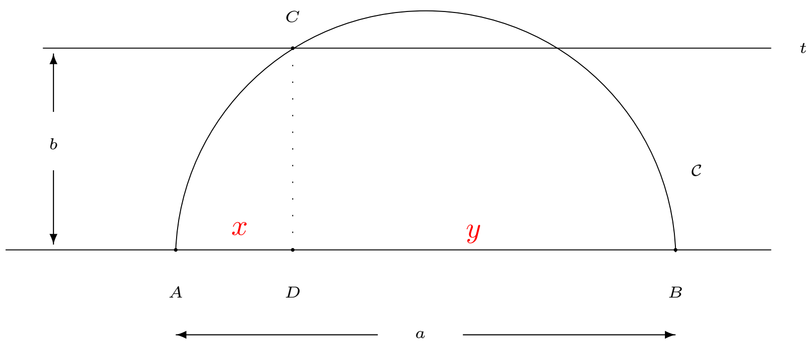
2. Consideremos a reta $\underline{s}$, perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto C cuja interseção com a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é o ponto D (figura abaixo):

3. Afirmamos que

$$AD = x \quad \text{e} \quad DB = y$$

são as soluções do sistema dado.





De fato, como o triângulo ΔACB é retângulo no vértice C segue, de uma observação anterior, que

$$CD^2 = AD.DB$$

e, da construção, temos que

$$AB = AD + DB.$$

Como $CD = b$, $AB = a$ segue que

$$b^2 = xy \quad \text{e} \quad a = x + y,$$

como queríamos mostrar.

Observação 2.8.1 *Vale observar que o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação*

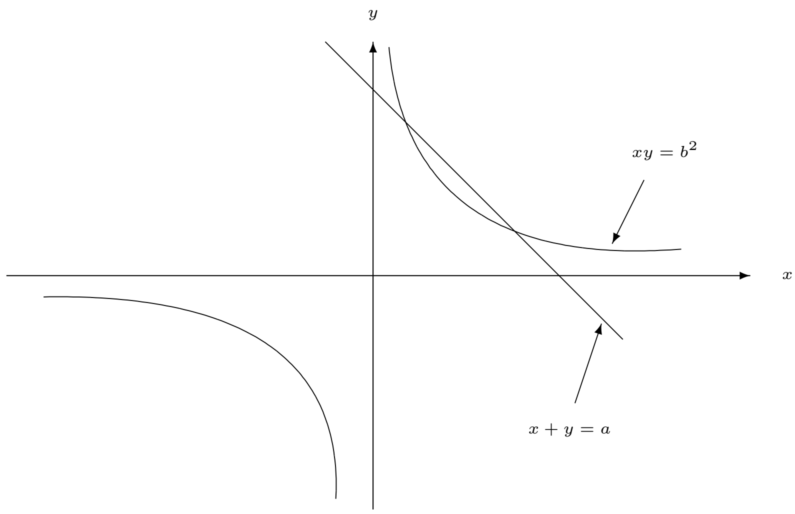
$$x + y = a$$

é uma reta e o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação

$$xy = b^2$$

é uma hipérbole.

Logo resolver o problema acima é, geometricamente, encontrar a interseção desses lugares geométricos, no caso, a interseção da reta com a hipérbole (podem ter até dois pontos - figura abaixo).



Exercício 2.8.9 *Resolver, geometricamente, o sistema (não linear)*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases},$$

onde $a, b > 0$ são comprimentos de segmentos dados.

Resolução:

Observemos que

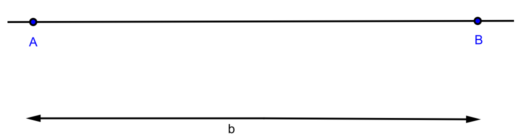
$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Mas $x + y = b$, logo o sistema dado é equivalente ao seguite sistema (linear):

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{a^2}{b} \\ \\ x + y = b \end{cases}.$$

Para obtermos segmentos com comprimentos $\underline{x}$ e $\underline{y}$ agiremos da seguinte forma:

1. Consideremos um segmento $\overline{AB}$ tal que $AB = b$ (figura abaixo);

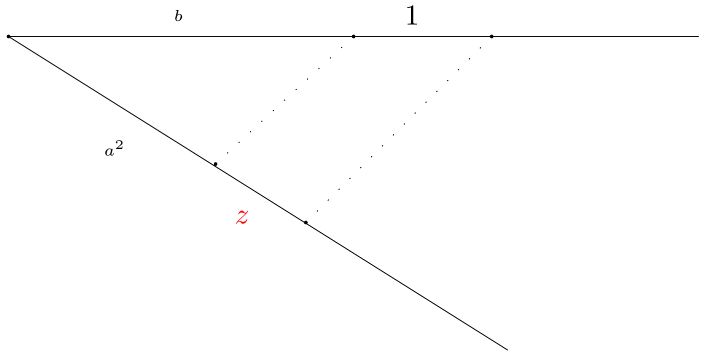


2. Construir um segmento de comprimento a^2 (como no exercício 6.);

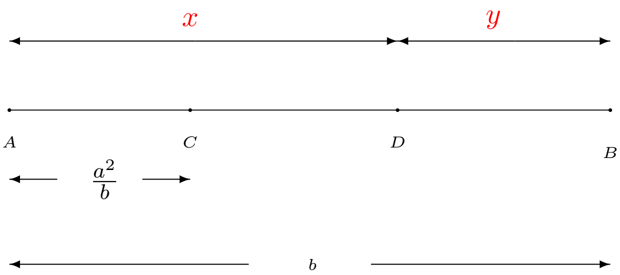
3. Obtenhamos um segmento de comprimento $z = \dfrac{a^2}{b}$, ou seja,

$$\frac{b}{a^2} = \frac{1}{z},$$

isto é, $\underline{z}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos b, a^2, 1 (figura abaixo);



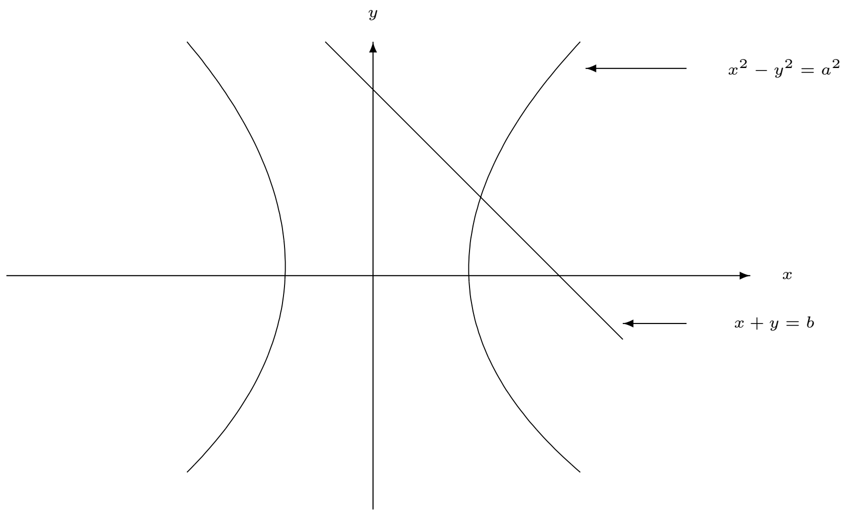
4. Sobre o segmento $\overline{AB}$ encontremos um ponto C de tal modo que $AC = \dfrac{a^2}{b}$ (veja na observação (2.7.1) item 3. como construir um segmento com esse comprimento).
5. Seja D o ponto médio do segmento $\overline{CB}$.
   Afirmamos que
   $$x = AD \quad \text{e} \quad y = DB$$
   satisfazem ao sistema acima (figura abaixo).



De fato, observemos que
$$AD + DB = AB,$$
ou seja
$$x + y = b.$$
Por outro lado, $CD = DB$, pois D é o ponto médio do segmento $\overline{CB}$.
Logo
$$x - y = AD - DB = AD - CD = AC = \frac{a^2}{b},$$
assim
$$x - y = \frac{a^2}{b},$$
como queríamos demonstrar.

Observação 2.8.2 *Observemos que o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação*
$$x + y = b$$
é uma reta e o o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação
$$x^2 - y^2 = a^2$$
é uma hipérbole.

Logo resolver o problema acima é encontrar, geometricamente, a interseção dos lugares geométricos, no caso, a interseção da reta com a hipérbole (podem ter até dois pontos - figura abaixo).



Exercício 2.8.10 *Resolver, geometricamente, o sistema*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x.y = b^2 \end{cases},$$

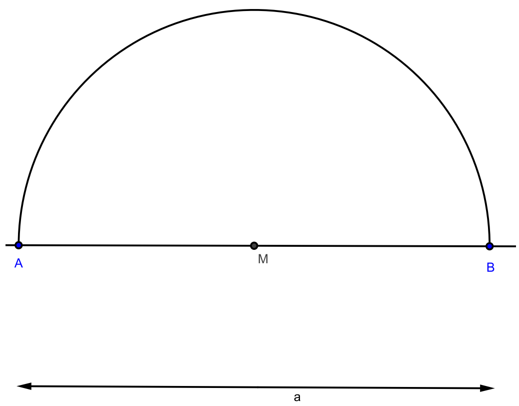
onde $a, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

Temos a seguinte constução:

1. Consideremos um segmento $\overline{AB}$ tal que $AB = a$.

   Construa uma semi-circunferência, $\mathcal{C}$, que tenha como diâmetro o segmento $\overline{AB}$ (figura abaixo);



2. Observemos que se C é um ponto qualquer da semi-circunferência $\mathcal{C}$ então temos

   $$AC^2 + CB^2 = a^2,$$

   pois $\overline{AB}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo ΔABC (figura abaixo).

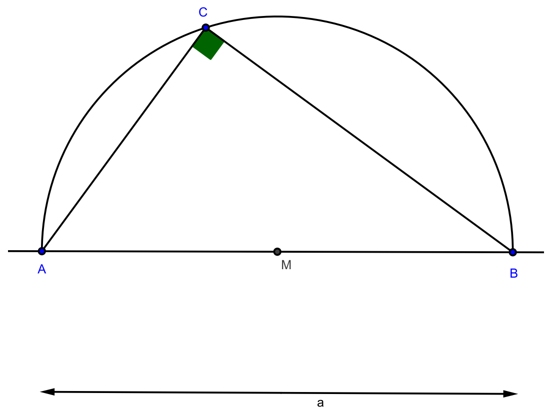
   Assim, se $x = AC$ e $y = CB$ então

   $$x^2 + y^2 = a^2.$$

   Logo se o ponto C está na semi-circunferência $\mathcal{C}$ temos que

   $$x = AC \quad \text{e} \quad y = CB$$

   satisfazem a 1.a equação do sistema dado, para qualquer ponto C escolhido da circunferência $\mathcal{C}$.



3. Por outro lado, se $h = AD$ é a altura do um triângulo ΔABC (relativamente ao lado $\overline{AB}$), com C na semi-circunferência $\mathcal{C}$ então sua área será dada por

$$\frac{ah}{2}. \tag{2.10}$$

Mas a área desse triângulo pode ser dada por:

$$\frac{AC.CB}{2} = \frac{xy}{2} \stackrel{(*)}{=} \frac{b^2}{2}, \tag{2.11}$$

onde, em (*), usamos que $\underline{x}$ e $\underline{y}$ devem satisfazer a 2.a equação do sistema.

Logo, de (2.10) e (2.11) deveremos os ter:

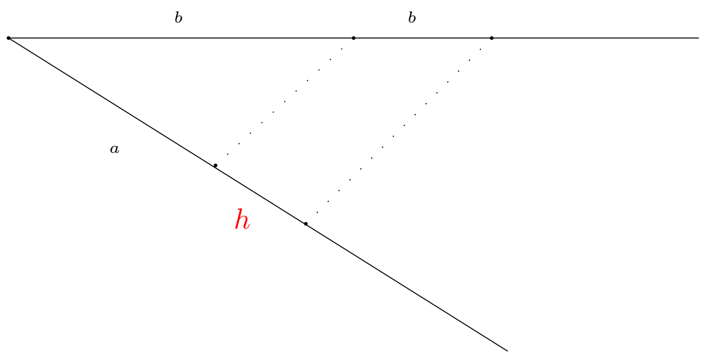
$$\frac{ah}{2} = \frac{b^2}{2},$$

isto é,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{h},$$

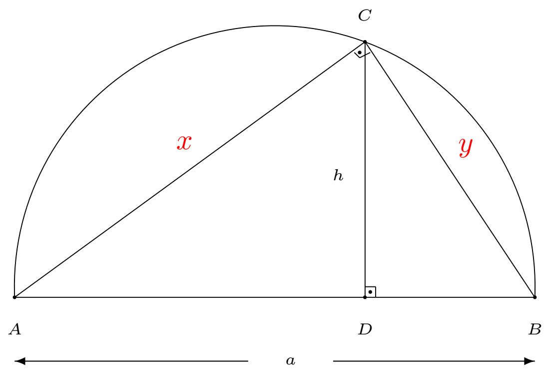
ou seja, $\underline{h}$ deve ser a 4.a proporcional dos segmentos de comprimentos a, b, b.

Geometricamente temos:



Deste modo obtemos um segmento de comprimento $\underline{h}$.

4. Tracemos a reta paralela a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que dista $\underline{h}$ da mesma, que interceptará a semi-circunferência $\mathcal{C}$ no ponto C (figura abaixo).



Deste modo

$$x = AC \quad \text{e} \quad y = CB$$

são soluções do sistema dado.

De fato, pois

$$x^2 + y^2 = AC^2 + CB^2 = a^2 \quad \text{e} \quad xy = AC.CB \overset{[\text{ área do } \Delta ABC]}{=} ah = b^2,$$

como queríamos demonstar.

Observação 2.8.3 *Observemos que o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação*

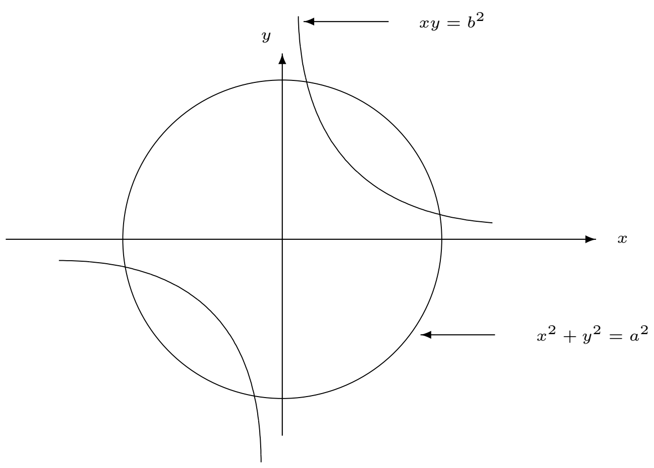
$$x^2 + y^2 = a^2$$

é uma circunferência de centro na origem e raio a e o o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação

$$xy = b^2$$

é uma hipérbole.

Logo resolver o problema acima é, geometricamente, encontrar a interseção dos lugares geométricos, no caso, a interseção da circunferência com a hipérbole (podem ter até dois pontos; na verdade 4 pontos, mas x, $y > 0$ - figura abaixo).



Exercício 2.8.11 *Resolver, geometricamente, o sistema (não-linear)*

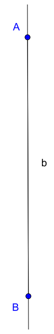
$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b^2 \end{cases},$$

onde $a, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

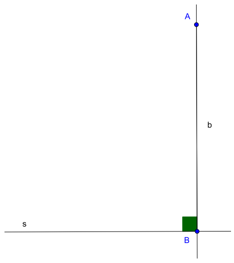
Resolução:

Temos a seguinte construção:

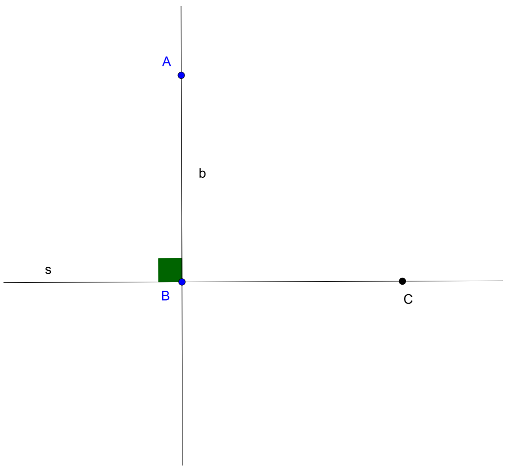
1. Consideremos em uma reta $\underline{r}$ um segmento $\overline{AB}$ tal que $AB = b$ (figura abaixo);



2. Considere a reta $\underline{s}$ perpendicular a reta $\underline{r}$ pelo ponto B (figura abaixo);

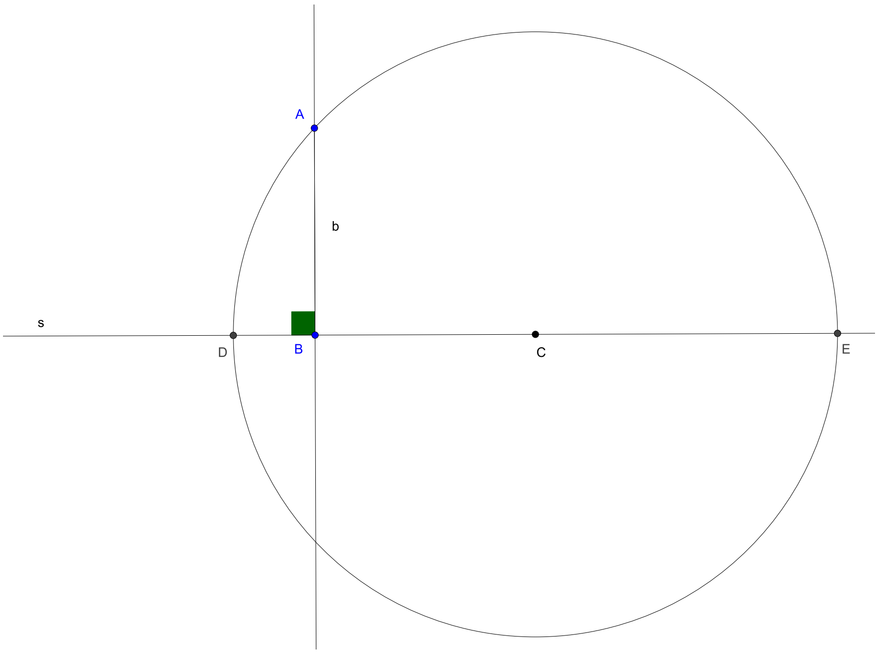


3. Obtenha o ponto C sobre a reta $\underline{s}$ tal que $BC = \dfrac{a}{2}$ (figura abaixo);



4. Construa a circunferência de centro em C e raio CA.

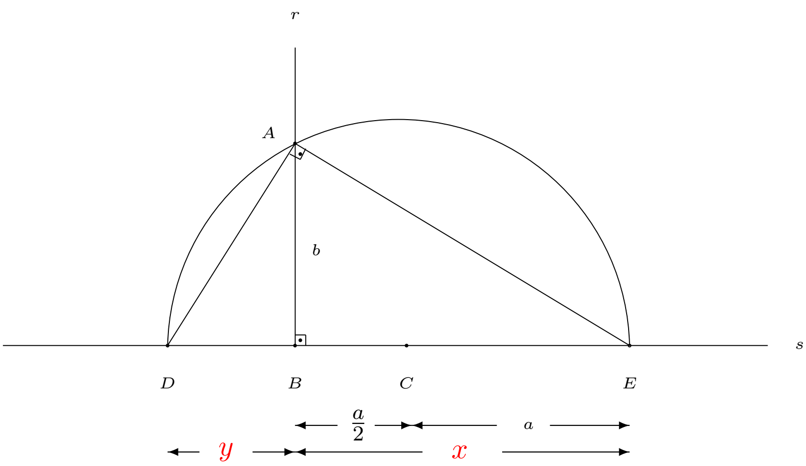
   Sejam D e E os pontos de interseção dessa circunferência com a reta $\underline{s}$ (figura abaixo);



5. Deste modo temos

$$y = DB \quad \text{e} \quad x = BE$$

   são soluções do sistema dado (figura abaixo).



De fato, como o triângulo ΔAED é retângulo no vértice A segue, de uma observação anterior, que

$$AB^2 = DB.BE,$$

isto é,

$$b^2 = xy.$$

Além disso,

$$2(DB + BC) = DB + BE,$$

isto é,

$$2(y + \frac{a}{2}) = y + x, \quad \text{logo} \quad x - y = a,$$

mostrando que $\underline{x}$ e $\underline{y}$ acima satisfazem o sistema dado.

Exercício 2.8.12 *Encontrar, geometricamente, uma solução da equação*

$$x^2 - ax - b^2 = 0,$$

onde $a, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

As soluções algébricas são:

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}.$$

Observemos que

$$a - \sqrt{a^2 + 4b^2} < 0, \quad \text{pois} \quad a < \sqrt{a^2 + 4b^2},$$

logo encontraremos, geometricamente, somente a solução x_1.

Para resolver o problema basta, essencialmente, construir um segmento de comprimento

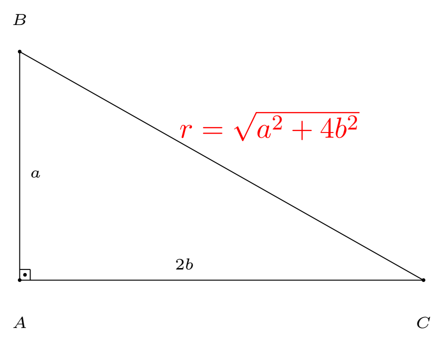
$$r \doteq \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

Para isto:

1. Consideremos o triângulo ΔABC retângulo no vértice A onde os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ têm comprimentos a e $2b$, repectivamente.

   Logo a hipotenusa $\overline{BC}$ terá comprimento (figura abaixo)

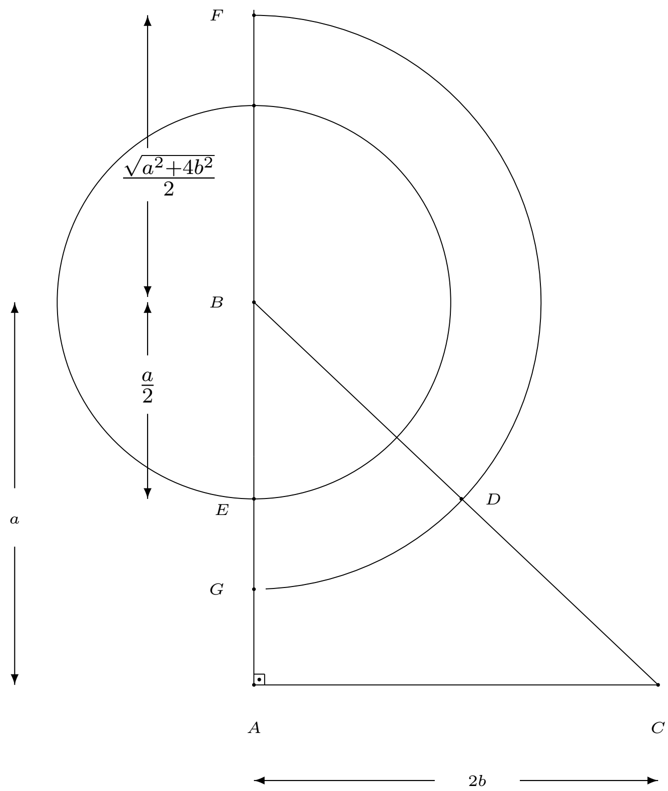
   $$r = \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$



2. Considere os pontos médios, D e E, dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente (figura abaixo);

3. A circunferência de centro no ponto B e raio $\overline{BD}$ encontrará a reta $\overleftrightarrow{AB}$ num ponto F, de tal modo que o ponto B pertencerá ao segmento $\overline{AF}$ (figura abaixo).

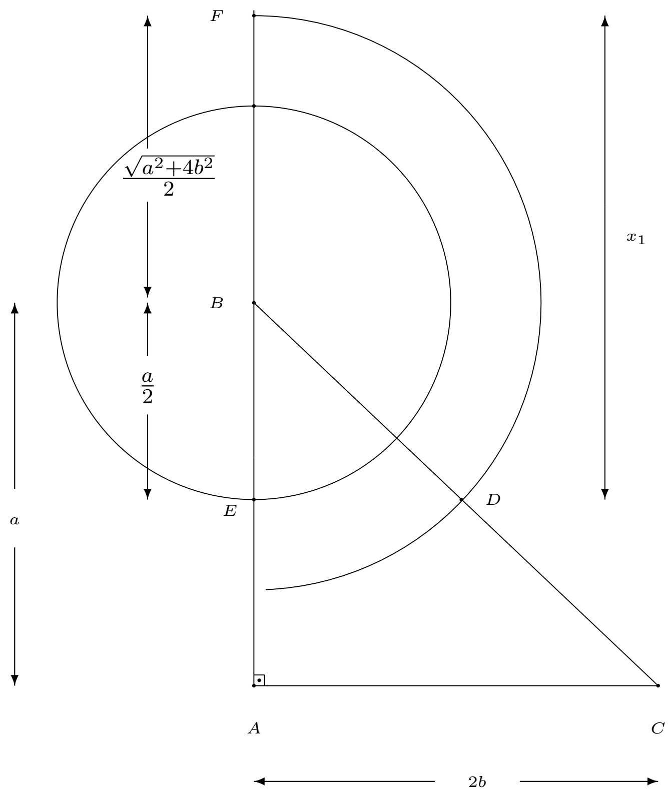
4. A circunferência de centro no ponto B e raio $\frac{a}{2}$ encontrará a reta $\overleftrightarrow{AB}$ num ponto E tal que o ponto E pertença ao segmento $\overline{AB}$ (figura abaixo).



5. Deste modo, por construção, temos que

$$x_1 = EF$$

será uma solução procurada (figura abaixo).



Exercício 2.8.13 *Construir a solução da equação*

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

onde $a, b > 0$ são comprimentos de segmentos dados.

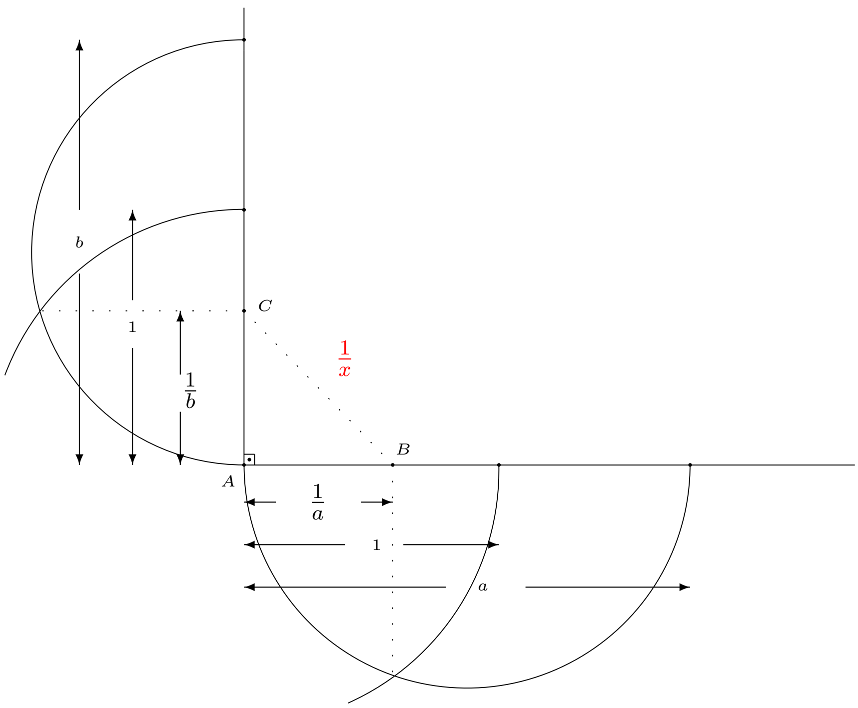
Resolução:

Temos a seguinte construção:

1. Consideremos um triângulo retângulo ΔABC tal que seus catetos têm comprimentos

$$AB = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad AC = \frac{1}{b}.$$

A observação (2.7.2) item 2. nos diz como construir um segmento de comprimento $\frac{1}{a}$ (figura abaixo).



Deste modo sua hipotenusa terá comprimento

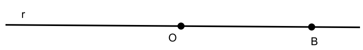
$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}},$$

que é o valor $\frac{1}{x}$ procurado.

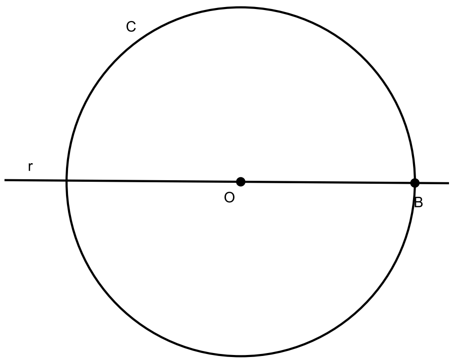
2. Se $\frac{1}{x} = 1$ então $x = 1$, ou seja, o comprimento de um segmento de comprimento $x = 1$ satisfaz a equação dada;

3. Se $\frac{1}{x} < 1$ faremos a seguinte construção: e

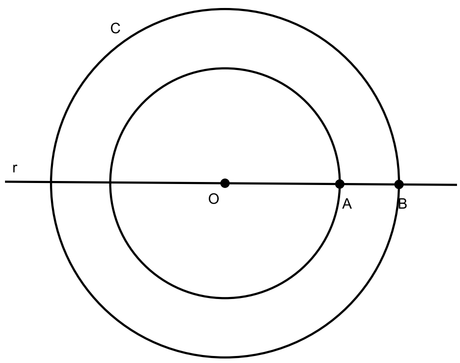
   (a) Sobre uma reta $\underline{r}$ encontremos pontos O e B tais que $OB = 1$ (figura abaixo);



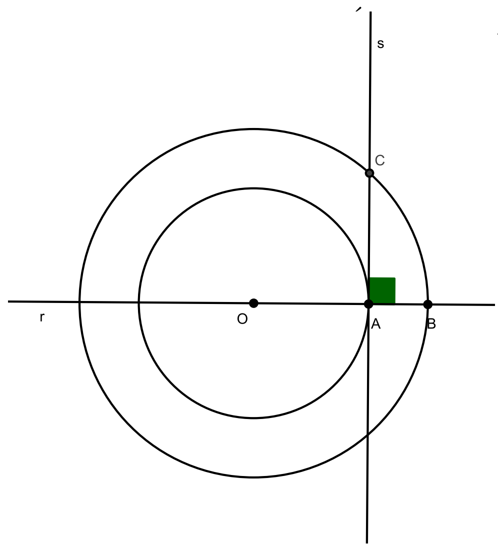
(b) Tracemos a circunferência $\mathcal{C}$ de centro no ponto O e raio $OC = 1$ (figura abaixo);



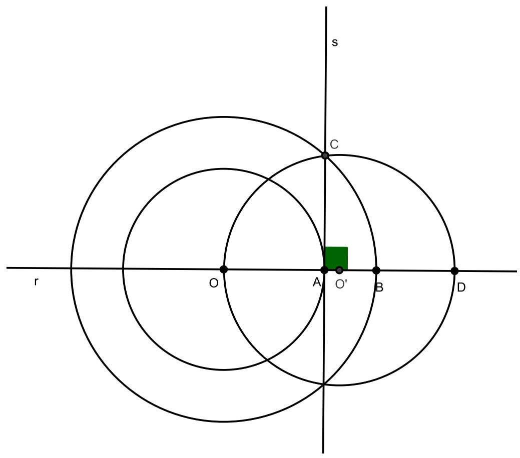
(c) Sobre a reta $\underline{r}$ encontremos o ponto A tais que $OA = \dfrac{1}{x}$ de modo que os pontos A e B estão sobre a mesma semi-reta determinada pela reta $\underline{r}$ com extremo no ponto O.
Observemos que o ponto A pertence ao segmento $\overline{OB}$, pois $\dfrac{1}{x} < 1$ (figura abaixo);



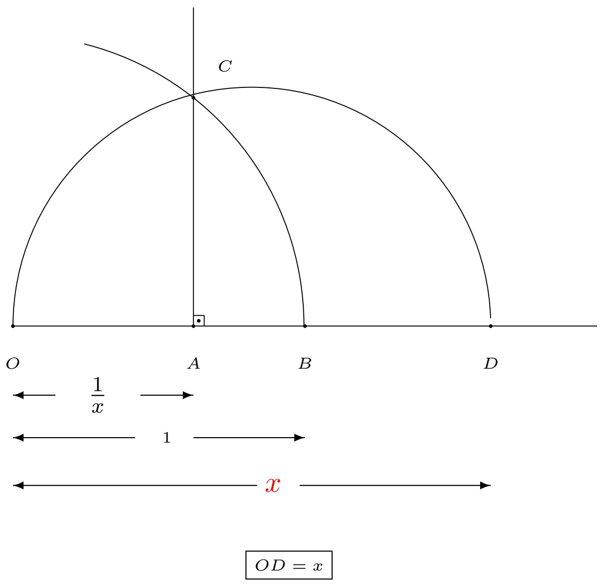
(d) A reta $\underline{s}$ perpendicular à reta $\underline{r}$ pelo ponto A encontrará a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto C (na verdade em dois pontos, escolha um deles - figura abaixo);



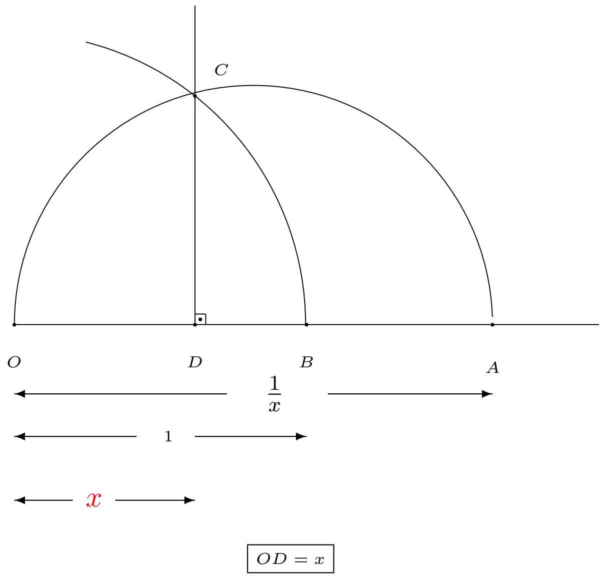
(e) A circunferência de centro sobre a reta $\underline{r}$ que passa pelos pontos O e C encontrará a semi-reta que está contida na $\underline{r}$ com extremidade no ponto O no ponto D (figura abaixo);



(f) Da observação (2.7.2) item 2., segue que $OD = x$ (figura abaixo).



4. Se $\dfrac{1}{x} > 1$ a construção é semelhante a do item 3. acima (figura abaixo):



Exercício 2.8.14 (Lucas Vioto dos Santos Ribeiro) *Construir a solução da equação*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

onde $a, b > 0$ são comprimentos de segmentos dados.

Resolução:

Exercício 2.8.15 (Sérgio Luiz Daltoso Junior) *Construir um triângulo retângulo conhecendo-se a soma dos comprimentos dos catetos da altura relativa à hipotenusa.*

Resolução:

Exercício 2.8.16 (Lauriane dos Santos Yamane) *Dados o centro e o raio de uma circunferência $\mathcal{C}$ e um ponto P que está no exterior da mesma pede-se traçar pelo pnto P uma secante PAB à circunferência $\mathcal{C}$ de modo que o ponto A seja o ponto médio do segmento $\overline{PB}$.*

Resolução:

Exercício 2.8.17 (Wagner Lisbôa Mota) *Construir um triângulo retângulo conhecendo-se o comprimento da hipotenusa e a soma dos comprimentos dos catetos.*

Resolução:

Exercício 2.8.18 (Wagner Lisbôa Mota) *A média harmônica de dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que têm comprimentos $\underline{a}$ e $\underline{b}$, respectivamente, é um segmento $\overline{EF}$ que tem comprimento $\underline{h}$, onde*

$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$

Construa, geometricamente, a média harmônica dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Resolução:

Exercício 2.8.19 (Diego da Silva Oliveira) *Um* **retângulo áureo** *é um retângulo em um lado é o segmento áureo do outro lado adjacente. Construir um retângulo áureo conhecendo-se o seu perímetro.*

Resolução:

Exercício 2.8.20 (Lauriane dos Santos Yamane) *Inscrever em uma circunferência dada um retângulo cujo perímetro é dado.*

Resolução:

Exercício 2.8.21 (Marilia Pelinson Tridapalli) *Dadas uma circunferência $\mathcal{C}$ e uma reta $\underline{t}$ tangente à $\mathcal{C}$, construir um quadrado que tenha dois vértices sobre $\mathcal{C}$ e os outros dois vértices sobre a reta $\underline{t}$.*

Resolução:

Exercício 2.8.22 (Marina Ferrucci Bega) *Construir um trapézio isóceles que está circunscrito à uma circunferência conhecendos suas bases.*

Resolução:

Exercício 2.8.23 (Valdir José de Oliveira) *Dados os pontos distintos A e B sobre a reta $\underline{r}$, construir as circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ que são tangentes entre si, de modo que a circunferência $\mathcal{C}$ seja tangente à reta $\underline{r}$ no ponto B e o raio da circunferência $\mathcal{C}$ seja o dobro do raioda circunferência $\mathcal{C}'$.*

Resolução:

Exercício 2.8.24 (Bruno Damien da Costa Paes Jurgensen) *O comprimento do lado de um decágono inscrito em uma circunferência de raio $\underline{R}$ será $R\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.*

Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro no ponto O e raio $\underline{R}$ considere os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ que dois diâmetros da circunferência $\mathcal{C}$, perpendiculares entre si. Selka M o ponto médio do segmento $\overline{OA}$. Seja P o ponto de interseção da circunferência de centro no ponto M e raio MC com o segmento $\overline{O}$.

Mostre que o segmento $\overline{OP}$ é o lado de um decágono inscrito na circunferência $\mathcal{C}$ e construa o polígono correspondente.

Resolução:

Exercício 2.8.25 (Marilia Pelinson Tridapalli) *O comprimento de um pentágono regular inscrito em uma circunferência de raio R é dado por $R\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$.*

Considerando-se a construção descrita no Exercício anterior mostre que o segmento $\overline{CP}$ é o lado do pentágono regular inscrito na circunferência acima e construa o polígono correspondente.

Resolução:

Exercício 2.8.26 (Hugo Cesar Faggian) *Construa um pentágono regular conhecendo-se um dos seus lados.*

Resolução:

Exercício 2.8.27 (Hugo Cesar Faggian) *Construa um pentágono regular conhecendo-se uma de suas diagonais.*

Resolução:

Exercício 2.8.28 (Marina Ferrucci Bega) *Dado um quadrado, construa um octógono regular cortando os "cantos" desse quadrado.*

Resolução:

Exercício 2.8.29 (Lucas Vioto dos Santos Ribeiro) *Dados os pontos distintos A e B pertencentes a um mesmo semi-plano determinado por uma reta $\underline{r}$, determinar o ponto P sobre a reta $\underline{r}$ de modo que o ângulo $\widehat{APB}$ seja o maior possível.*

Resolução:

Exercício 2.8.30 (Sérgio Luiz Daltoso Junior) *Dados os pontos distintos A e B e dois segmentos de comprimentos $\underline{m}$ e $\underline{n}$, dividir harmonicamente o segmento $\overline{AB}$ na razão $\frac{m}{n}$, ou seja, determinar os pontos M e N sobre a reta que contém os pontos A e B de modo que*

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}.$$

Notemos que a circunferência que tem diâmetro MN é denominada **circunferência de Apolônio do segmento $\overline{AB}$ na razão $\frac{m}{n}$**. *Para todo ponto P nesta circunferência teremos*

$$\widehat{APM} = \widehat{MPB} \quad e \quad \frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}.$$

Resolução:

Exercício 2.8.31 (Valdir José de Oliveira) *Dados os pontos distintos A, B e C, nesta ordem, sobre a reta $\underline{r}$, obter o lugar geométrico dos pontos P tais que*

$$\widehat{APB} = \widehat{BPC}.$$

Resolução:

Exercício 2.8.32 (Lucas Vioto dos Santos Ribeiro) *Dados a circunferência $\mathcal{C}$ e dois segmentos de comprimentos $\underline{h}$ e $\underline{m}$, inscrever na circunferência $\mathcal{C}$ um trapézio de altura $\underline{h}$ de modo que a soma das bases do mesmo seja $\underline{m}$.*

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 2.8.33 (Wagner Lisbôa Mota) *Dados os pontos distintos A e B e um segmento de comprimento $\underline{k}$, contruir o lugar geométrico dos pontos P tais que*

$$PA^2 + PB^2 = k^2.$$

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 2.8.34 (Diego da Silva Oliveira) *Construir um triângulo ΔABC conhencendo-se $BC = a$, o comprimento da altura h_a e a soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados, isto é, $\underline{k}$ onde*

$$AB^2 + AC^2 = k^2.$$

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 2.8.35 (Lauriane dos Santos Yamane) *Dados os pontos distintos A e B pertencentes a um mesmo semi-plano determinado pela reta $\underline{r}$, determinar o ponto P sobre a reta $\underline{r}$ de modo que $PA^2 + PB^2$ seja o menor possível.*

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 2.8.36 (Marilia Pelinson Tridapalli) *Dados $a, b > 0$, construir, geometricamente, um segmento de comprimento $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.*

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 2.8.37 (Marina Ferrucci Bega) *Dados dois segmentos de reta de comprimentos $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e um segmento unitário, construir um segmento de comprimento ab.*

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 2.8.38 (Valdir José de Oliveira) *Dados um segmento de reta de comprimento $\underline{a}$ e um segmento unitário, construir um segmento de comprimento $\sqrt[4]{a}$.*

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 2.8.39 (Bruno Damien da Costa Paes Jurgensen) *Dados os segmentos de reta de comprimentos $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ e um segmento unitário, construir um segmento de comprimento $\sqrt{abc}$.*

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 2.8.40 (Bruno Damien da Costa Paes Jurgensen) *Dado um segmento de reta de comprimento $\underline{a}$ e um segmento unitário, construir um segmento de comprimento $a^{\frac{2}{3}}$.*

<u>**Resolução:**</u>

Capítulo 3

Áreas de Polígonos

3.1 Equivalências

A seguir trataremos de várias questões relacionadas com áreas de polígonos (convexos).

Na verdade relacionaremos a área de um polígono $\mathcal{P}$ com a^2, onde $\underline{a}$ é o comprimento de um segmento, mais precisamente, diremos, neste caso, que a área de um polígono $\mathcal{P}$ é **equivalente** a de um quadrado de lado $\underline{a}$.

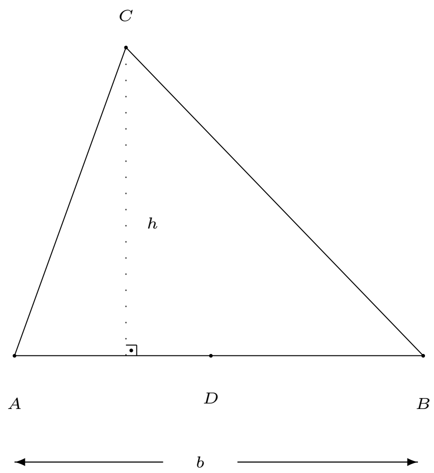
A questão, olhada sob esse ponto de vista, será encontrar um processo que transforme, sem alterar sua área, um polígono dado em um quadrado.

Triângulos

Começaremos pelo caso em que $\mathcal{P}$ é um triângulo:

Consideremos uma triângulo ΔABC dado.

Suponhamos que $AB = b$ e a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ seja $\underline{h}$ (figura abaixo).



Observemos que se esse triângulo é equivalente a um quadrado de lado de comprimento $\underline{a}$ então deveremos ter

$$a^2 = \frac{bh}{2},$$

ou seja,

$$a = \sqrt{\frac{b}{2}h}.$$

Portanto o comprimento do lado do quadrado é a média geométrica entre $\frac{b}{2}$ e h.

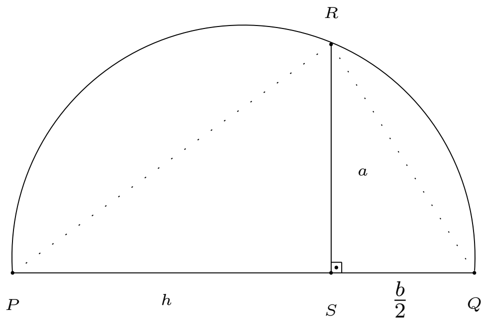
A construção (já feita anteriormente) é a seguinte:

Na figura abaixo, o triângulo ΔPQR é retângulo no vértice R, com $PS = h$ e $SQ = \dfrac{b}{2}$.

Logo de uma observação anterior temos que

$$RS^2 = PS.SQ, \quad \text{ou seja, se } a \doteq RS \text{ então } \quad a^2 = \frac{bh}{2},$$

como queríamos.



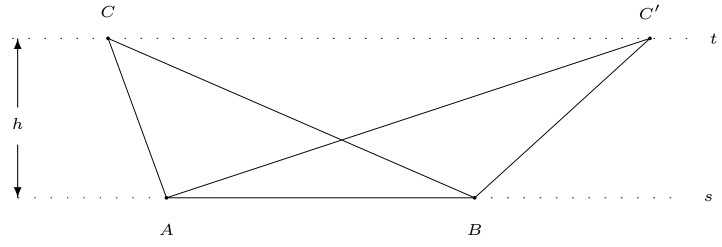
Com isto resolvemos o problema de construir um quadrado equivalente a um triângulo dado (precisamos conhecer um lado e a altura relativamente a esse lado do triângulo).

Quadriláteros

Observação 3.1.1 *Lembremos que num triângulo ΔABC de base $\overline{AB}$ fixada se deslocarmos o vértice C sobre uma reta paralela, distando a altura relativamente a esse lado da base $\overline{AB}$, sua área não se altera.*

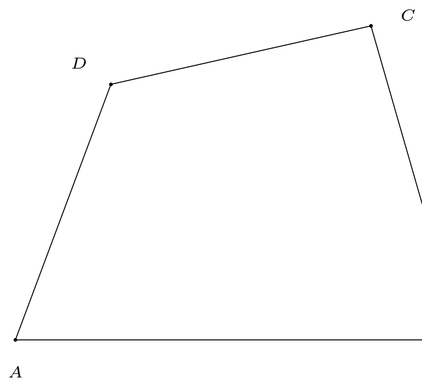
Na figura abaixo as retas $\underline{s}$ e $\underline{t}$ são paralelas.

Neste caso os triângulos ΔABC e $\Delta ABC'$ têm mesma área (eles têm mesma altura $\underline{h}$ relativamente ao lado $\overline{AB}$ - figura abaixo).

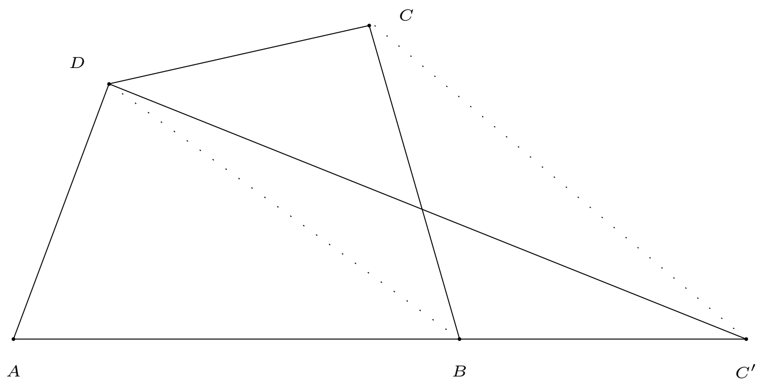


Numa primeira etapa "transformaremos" nosso polígono (no caso um quadrilátero) em um triângulo equivalente ao mesmo.

Para exemplificar, consideremos o quadrilátero $ABCD$ abaixo.



Tracemos pelo ponto C uma reta paralela à diagonal $\overline{BD}$ que encontrará o segmento $\overline{AB}$ no ponto C' (figura abaixo).

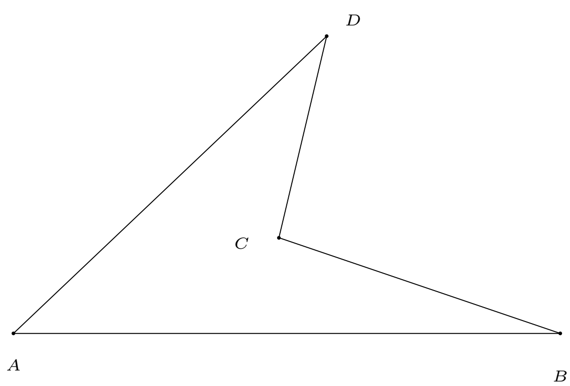


Com isto os triângulos ΔCBD e $\Delta C'BD$ são equivalentes (têm mesma área, pois têm mesma base $\overline{BD}$ e mesma altura, pois as retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são paralelas).

Logo o triângulo $\Delta ADC'$ é quivalente ao quadrilátero $ABCD$.

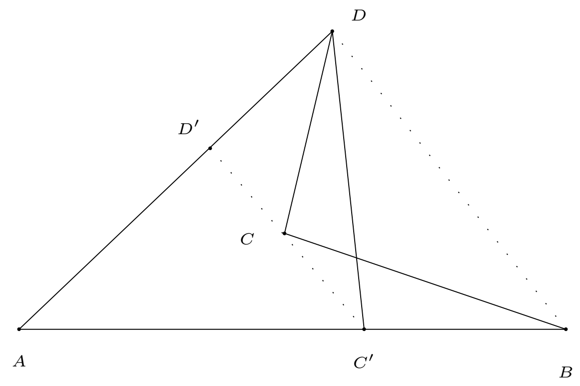
Observação 3.1.2 *Vale observar que podemos agir do mesmo se o quadrilátero não for convexo (lembremos que um conjunto é dito* **convexo** *se dados dois pontos do mesmo, o segmento que os une está inteiramente contido no conjunto).*

Para ilustrar consideremos o quadrilátero abaixo, que **não** *é convexo.*



A construção acima pode ser feita neste caso.

De fato, a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{BD}$ *passando pelo ponto* C *encontrará a reta* $\overleftrightarrow{AB}$ *no ponto* C' *e a reta* $\overleftrightarrow{AD}$ *no ponto* D' *(figura abaixo).*

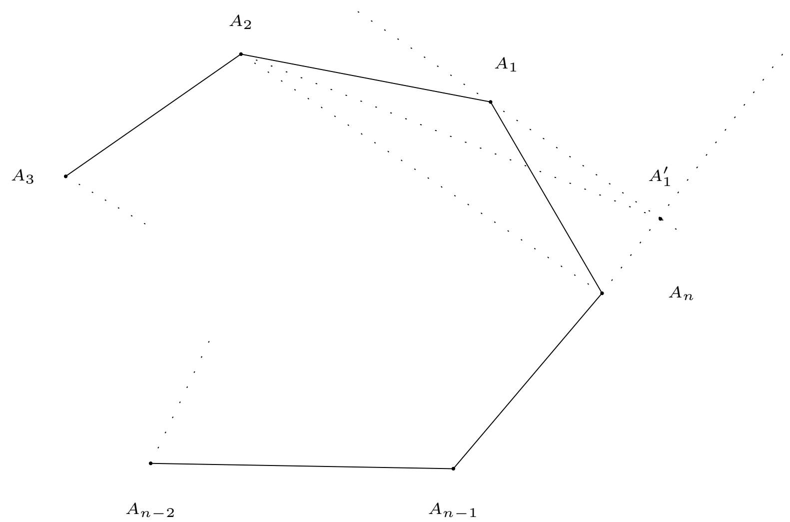


O triângulo $\Delta AC'D$ é equivalente ao quadrilátero $ABCD$, pois a soma das áreas dos triângulo $\Delta C'CB$ e $\Delta CDD'$ é igual a área do triângulo $\Delta C'DD'$ (veja figura acima),pois

$$\acute{A}rea(\Delta CDD') + \acute{A}rea(\Delta C'CB) = \frac{D'C.h}{2} + \frac{CC'.h}{2} = \frac{D'C'.h}{2} = \acute{A}rea(\Delta C'DD').$$

Para resolvermos o problema de "transformar" um polígono geral em um quadrado equivalente mostraremos, primeiramente, como "transformar" um polígono de n-lados num polígono de $(n-1)$-lados equivalente ao inicial.

Dado um polígono de n-lados $A_1A_2\cdots A_n$ tracemos pelo ponto A_1 uma paralela ao lado $\overline{A_2A_n}$ que encontrará o ponto A_1' sobre a reta $\overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$ (figura abaixo).



Observemos que o polígono $A_1'A_2\cdots A_n$ (que tem $(n-1)$-lados) é equivalente ao polígono $A_1A_2\cdots A_n$ (que tem n-lados).

De fato, na situação acima, se o polígono é convexo, os triângulos $\Delta A_2A_nA_1$ e $\Delta A_2A_nA_1'$ são equivalentes (pois têm mesma base e mesma altura).

Se não for convexo agimos como na situação anterior e concluiremos o mesmo.

Desta forma "transformamos" um polígono de n-lados num polígono de $(n-1)$-lados equivalente ao mesmo.

Repetindo o processo acima (por indução) "transformamos" um polígono de n-lados num triângulo equivalente ao mesmo e finalmente a um quadrado equivalente ao polígono de n-lados dado inicialmente.

3.2 Partições do Plano

A seguir exibiremos alguns exemplos que tratarão do problema de dividir uma região do plano em partes satisfazendo certas condições.

Definição 3.2.1 *Diremos que as figuras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são* **semelhantes** *com* **razão de semelhança** $\alpha > 0$ *se existe uma aplicação $\sigma : F \to F'$ bijetora que tem a seguinte propriedade:*
Se $X, Y \in F$ e $X' \doteq \sigma(F), Y' \doteq \sigma(Y) \in F'$ então devermos ter

$$X'Y' = \alpha\, XY.$$

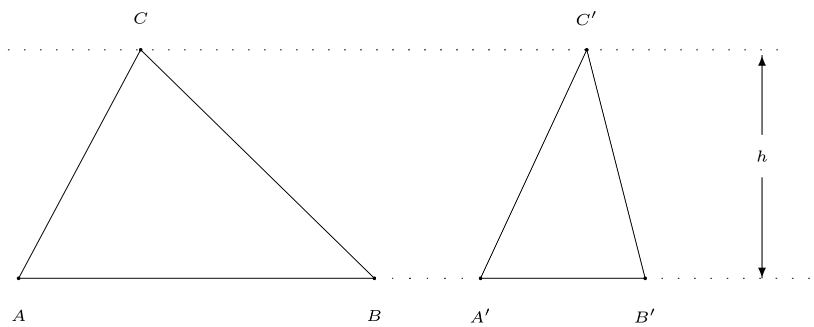
Neste caso diremos que aplicação σ é uma **semelhança de razão α entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$** *e os pontos X e X' serão ditos* **homólogos**.

Em várias situações que trataremos a seguir usaremos os seguintes propriedades da Geometria:

P1. Se dos triângulos têm mesma altura então a razão entre suas áreas é igual a razão entre suas respectivas bases, isto é,

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = \frac{AB}{A'B'},$$

onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ são as áreas dos triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$, respectivamente (figura abaixo).



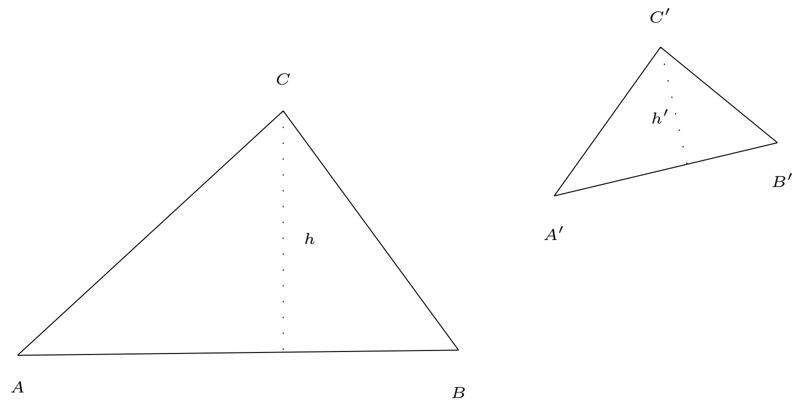
De fato,

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = \frac{\dfrac{AB.h}{2}}{\dfrac{A'B'.h}{2}} = \frac{AB}{A'B'}.$$

P2. A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre os mesmos.

2.1 Para o caso de triângulos temos que afirmação acima é válida.
De fato, sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ triângulos semelhantesl (ou seja, têm três ângulos iguais).
Então sabemos que correspondentes elementos dos triângulos guardam uma mesma proporção, por exemplo (figura abaixo):

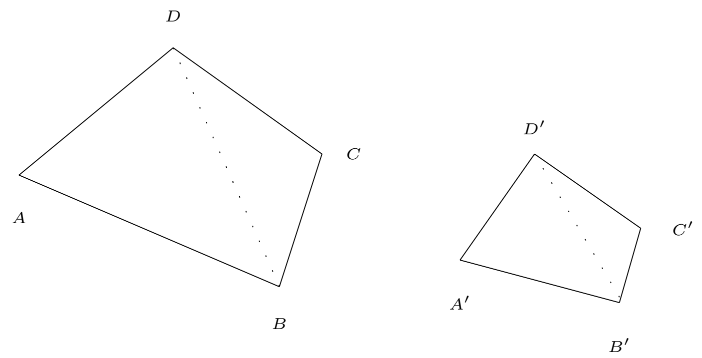
$$\alpha \doteq \frac{AB}{A'B'} = \frac{h}{h'}. \tag{3.1}$$



Logo se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ são as áreas dos respectivos triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ temos

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = \frac{\dfrac{AB.h}{2}}{\dfrac{A'B'.h'}{2}} = \frac{AB}{A'B'}.\frac{h}{h'} \overset{(3.1)}{=} \alpha^2.$$

2.2 Para o caso de polígonos a afirmação acima também é válida.
De fato, podemos decompô-los em triângulos que serão dois a dois semelhantes e aplicar o processo acima em cada um dos pares de triângulos semelhantes.
Se a razão de semelhança entre os dois polígonos é α então a razão de semelhança entre os correspondentes triângulos da decomposição acima também será α.
Logo, do item anterior, a razão entre as áreas dos correspondentes triângulos semelhantes na decomposição acima será α^2.
Depois somamos as áreas dos triângulos, que nos fornecerá a área dos respectivos polígonos, e assim obtemos a razão α^2 de semelhança entre as áreas dos polígonos dados incialmente.



Na situação acima temos

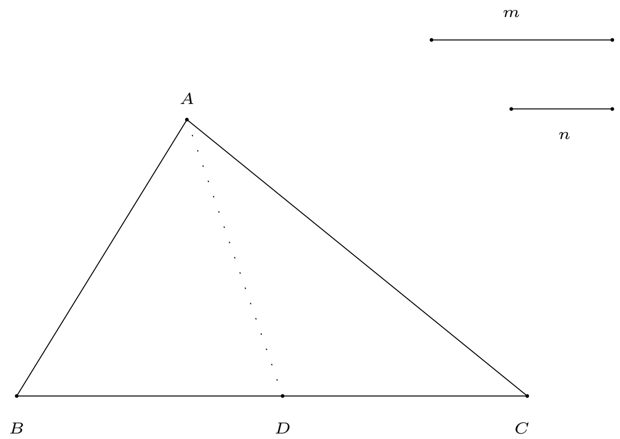
$$\begin{aligned}\frac{\text{Área}(ABCD)}{\text{Área}(A'B'C'D')} &= \frac{\text{Área}(\Delta ABD) + \text{Área}(\Delta BCD)}{\Delta A'B'D') + \text{Área}(\Delta B'C'D')} \\ &= \frac{\alpha^2\text{Área}(\Delta A'B'D') + \alpha^2\text{Área}(\Delta B'C'D')}{\Delta A'B'D') + \text{Área}(\Delta B'C'D')} = \alpha^2.\end{aligned}$$

2.3 Para círculos a situação é análoga e será deixada como exercício para o leitor. $\boxed{\textbf{Valor: +0.5}}$

2.4 Situação mais geral pode ser encontrada em *Medida e Forma em Geometria* - Elon Lages Lima, IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1991, página 48. e será deixada como exercício para o leitor. $\boxed{\textbf{Valor: +0.5}}$

Exemplo 11.

Dado o triângulo ΔABC encontrar o ponto D sobre o lado $\overline{BC}$ tal que a reta $\overleftrightarrow{AD}$ divida o triângulo em dois outros, ΔADB e ΔACD, cujas áreas sejam proporcionais a $\underline{m}$ e $\underline{n}$, dados.



Resolução:

Como os triângulos ΔADB e ΔADC têm mesma altura (que será igual a altura do ΔABC) da Propriedade P1. acima, segue que se a razão entre as áreas dos triângulos ΔADB e ΔADC será

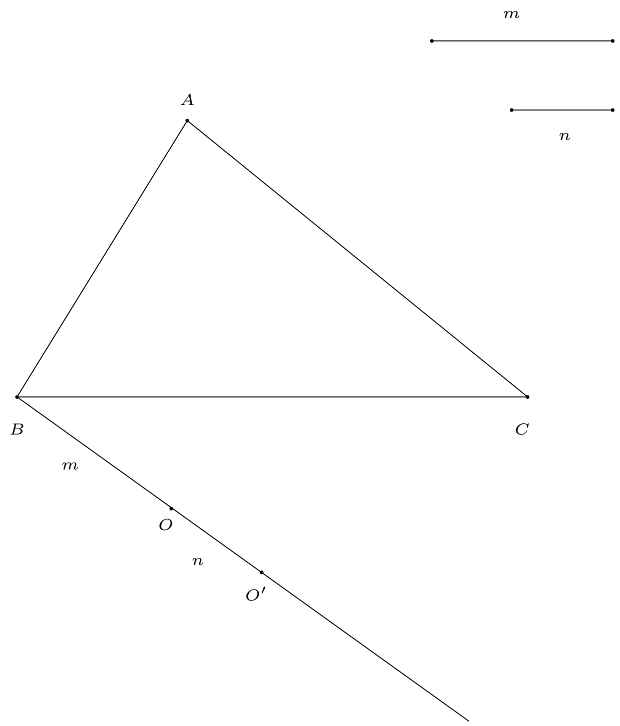
$$\frac{m}{n}$$

então a razão entre os respectivas bases deverá ser a mesma, em particular,

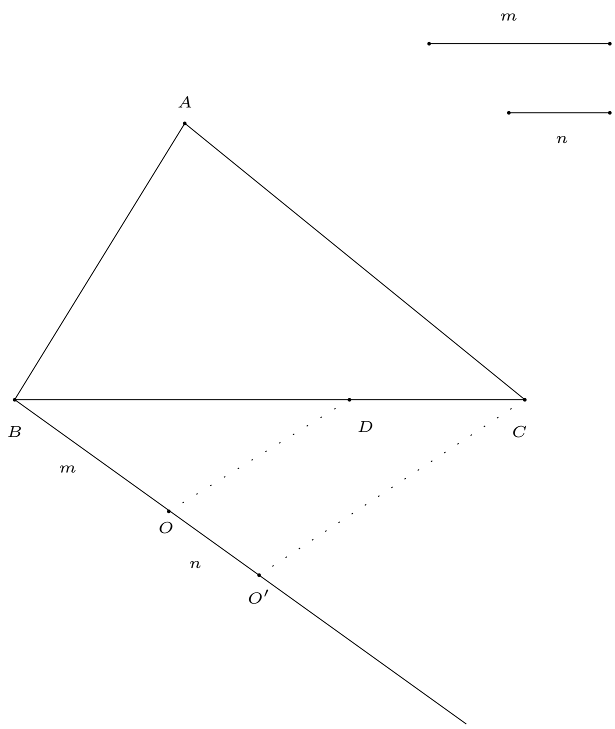
$$\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}.$$

Com isto podemos obter o ponto D sobre o lado $\overline{BC}$ com a seguinte construção:

1. Consideremos uma semi-reta com extremos no ponto B e sobre esta encontremos os pontos O e O' tais que $AO = m$ e $OO' = n$ (figura abaixo);

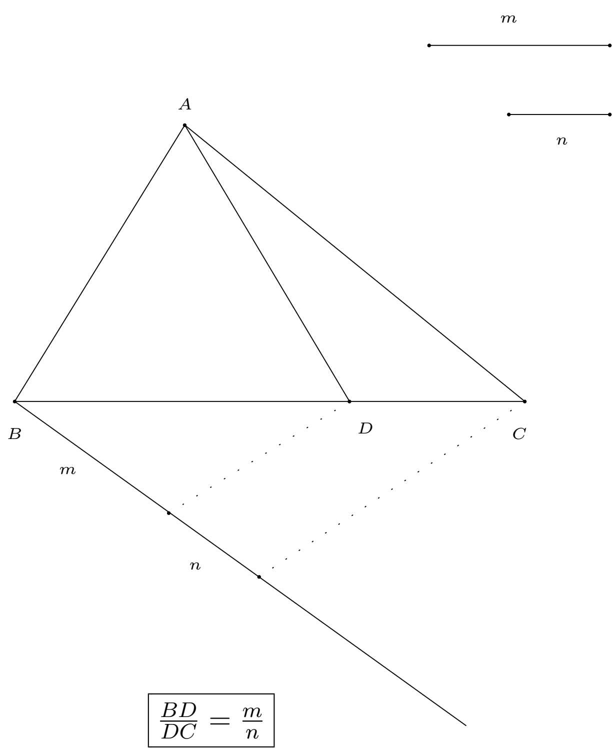


2. Tracemos a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{O'C}$ pelo ponto O que encontrará a semi-reta $\overrightarrow{BC}$ no ponto D (figura abaixo);



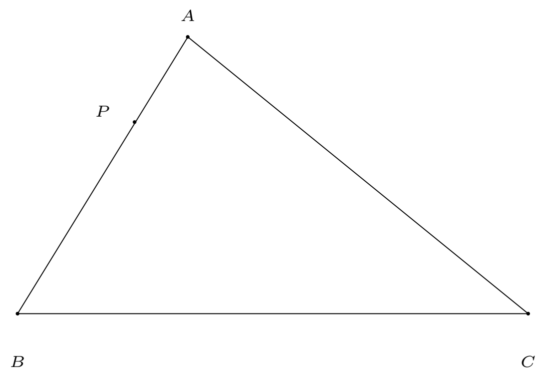
3. Como os triângulos ΔOBD e $\Delta O'BC$ são semelhantes (caso AAA) segue que
$$\frac{BD}{DC} = \frac{BO}{OO'} = \frac{m}{n}.$$

4. Pela Propriedade P1, os triângulos ΔABD e ΔACD resolvem o problema (figura abaixo).



Exemplo 12.

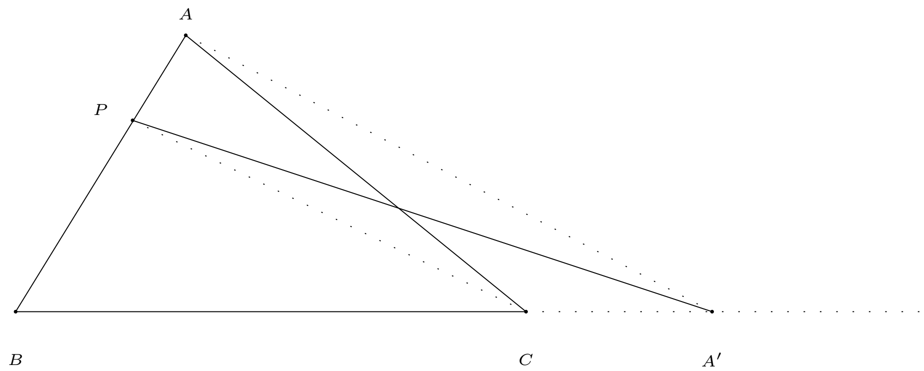
Dado um ponto P sobre o lado $\overline{AB}$ do triângulo ΔABC traçar por esse ponto uma reta que divida o triângulo em duas partes equivalentes (ou seja, dois polígonos que têm mesma área).



Resolução:

Temos a seguinte construção:

1. Tracemos pelo ponto A uma reta paralela a reta $\overleftrightarrow{PC}$ que encontrará a semi-reta lado $\overrightarrow{BC}$ no ponto A' (figura abaixo);

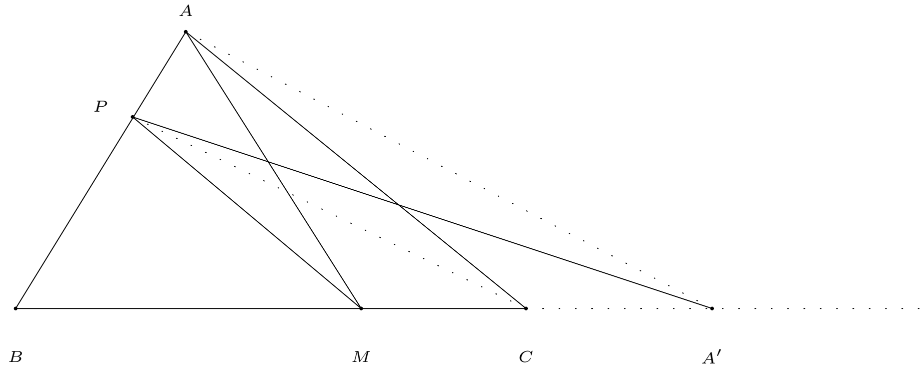


   Com isto os triângulos ΔACB e $\Delta PAB'$ são equivalentes (os triângulos $\Delta PA'C$ e ΔPAC são equiavalentes pois têm mesma base $\overline{PC}$ e mesma altura).

2. Seja M o ponto médio do segmento $\overline{BA'}$.

   A mediana $\overline{PM}$ do triângulo $\Delta PBA'$ divide o mesmo em duas partes equivalentes.

   De fato, pois os triângulos ΔPMB e $\Delta PA'M$ têm mesma altura e bases de mesmo comprimento (pois M é ponto médio de BA' - figura abaixo);



Logo o segmento $\overline{PM}$ também divide o triângulo ΔABC em duas partes equivalentes pois:

$$\text{área } (\Delta ACB) = \text{ área } (\Delta PMB) + \text{ área } (PACM). \tag{3.2}$$

Mas:

$$\text{área } (\Delta ACB) = \text{ área } (\Delta PA'B) = \text{ área } (\Delta PMB) + \text{ área } (\Delta PA'M). \tag{3.3}$$

Logo, de (3.2) e (3.3), segue que

$$\text{área } (PACM) = \text{ área } (\Delta PA'M).$$

Portanto

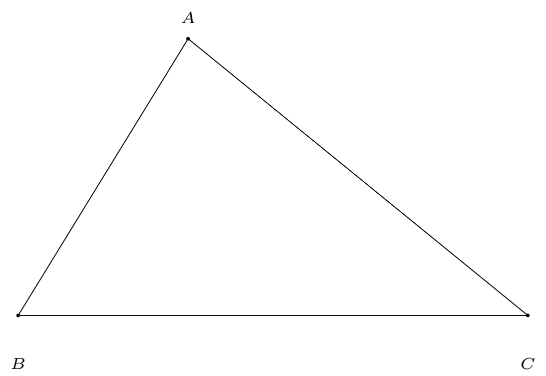
$$\text{área } (\Delta ACB) = \text{ área } (\Delta PMB) + \text{ área } (PCM)$$

e

$$\text{área } (\Delta PMB) = \text{ área } (PACM).$$

Exemplo 13.

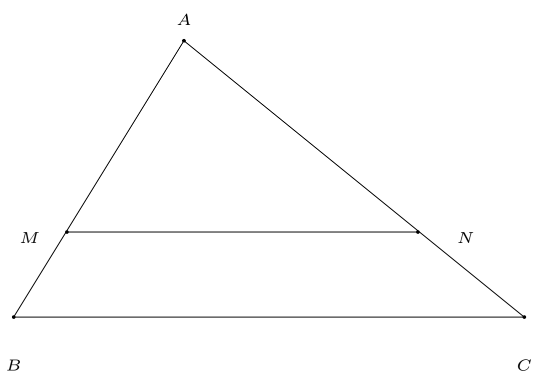
Dado o triângulo ΔABC traçar uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ que divida o mesmo em duas partes equivalentes (ou seja, dois polígonos que têm mesma área).



Resolução:

Suponhamos que a construção esteja pronta (figura abaixo).

1. Sejam M e N pontos sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que os polígonos ΔANM e $MNCB$ sejam equivalentes (ou seja, a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é a reta procurada - figura abaixo).



2. Como os triângulo ΔACB e ΔANM são semelhantes (pois a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é paralela a reta $\overleftrightarrow{BC}$) segue, da Propriedade P2. acima, que

$$\frac{\text{área }(\Delta ANM)}{\text{área }(\Delta ACB)} = \frac{1}{2} \overset{(P2.)}{=} \left(\frac{AM}{AB}\right)^2.$$

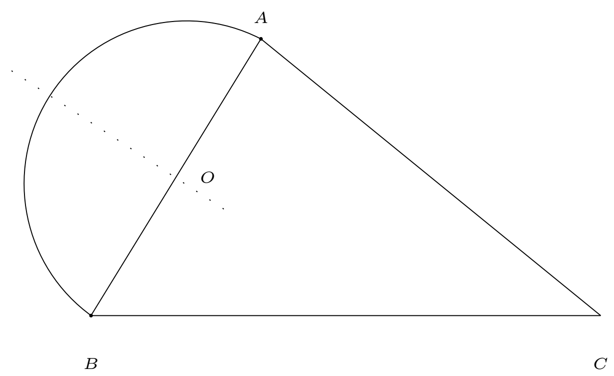
Logo

$$AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AB. \tag{3.4}$$

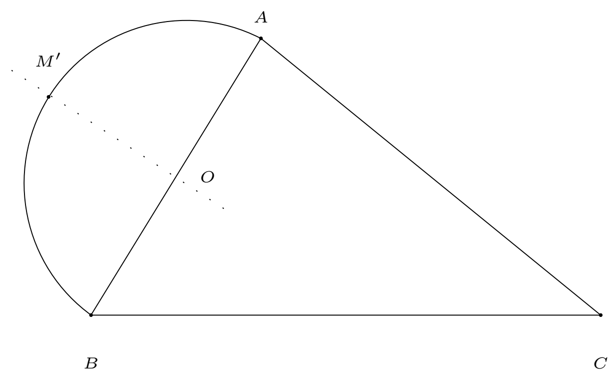
Portanto basta encontrarmos, geometricamente, o ponto M sobre o segmento $\overline{AB}$ com a propriedade (3.4).

Para isto temos a seguinte construção:

1. Traçemos uma semi-circunferência de diâmetro $\overline{AB}$, ou seja, seu centro será no ponto O, ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e raio $\dfrac{AB}{2}$ (figura abaixo);



2. Pelo ponto O traçamos uma perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que interceptará a semi-circunferência acima no ponto M' (figura abaixo).



Como $\Delta AOM'$ é um triângulo retângulo segue que

$$(AM')^2 = (OM')^2 + (OA)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{(AB)^2}{2},$$

ou seja,

$$AM' = \frac{AB}{\sqrt{2}},$$

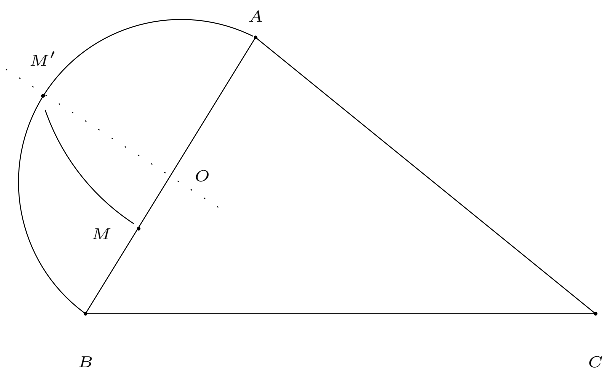
ou ainda,

$$AM' = \frac{AB}{2}.\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}AB.$$

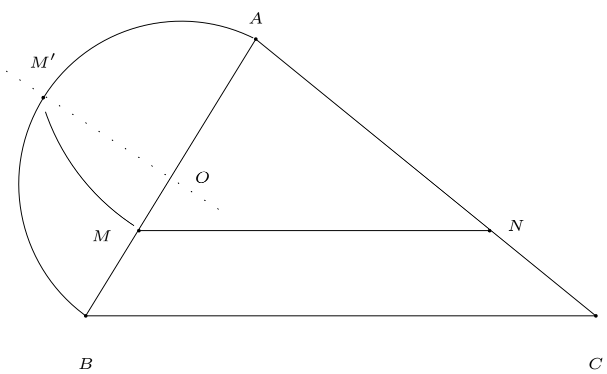
3. Assim encontramos o ponto M sobre o segmento $\overline{AB}$ de tal modo que

$$AM = AM' = \frac{\sqrt{2}}{2}AB.$$

Para isto basta traçarmos a circunferência de centro no ponto A e raio $AM' = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$ que encontrará o segmento $\overline{AB}$ no ponto M (figura abaixo);

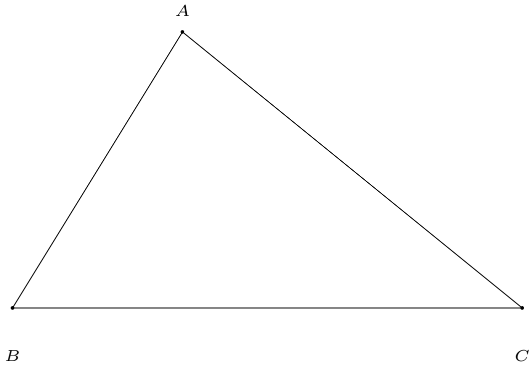


4. A reta procurara é a reta paralela a reta $\overleftrightarrow{BC}$ pelo ponto M.



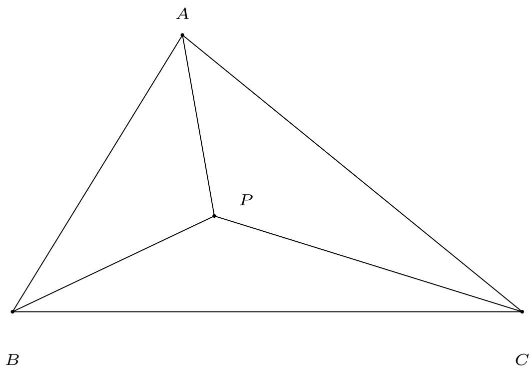
Exemplo 14.

Dado o triângulo ΔABC determinar um ponto P no seu interior de tal modo que as áreas dos triângulos ΔPAB, ΔPBC e ΔPAC sejam, respectivamente, proporcionais aos segmentos de comprimentos $\underline{m}$, $\underline{n}$ e $\underline{p}$, dados.



Resolução:

A situação geométrica é dada pela figura abaixo:

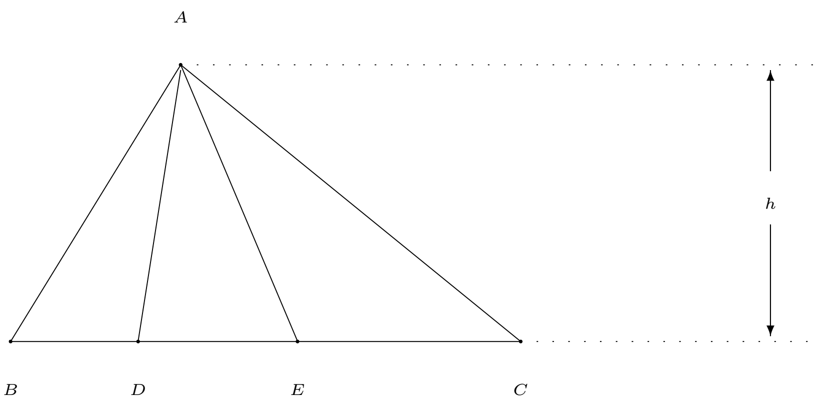


Queremos encontrar o ponto P no interior do triângulo ΔABC de tal modo que

$$\frac{\text{área }(\Delta PAB)}{\text{área }(\Delta PBC)} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\text{área }(\Delta PAB)}{\text{área }(\Delta PCA)} = \frac{m}{p}, \quad \frac{\text{área }(\Delta PBC)}{\text{área }(\Delta PCA)} = \frac{n}{p}.$$

1. Primeiramente consideraremos o problema de encontrar os pontos D e E sobre o lado $\overline{BC}$ de forma que os triângulos ΔADB, ΔAED e ΔACE tenham áreas respectivamente proporcionais a m, n e p, isto é, (figura abaixo)

$$\frac{\text{área}(\Delta ADB)}{\text{área}(\Delta AED)} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\text{área}(\Delta ADB)}{\text{área}(\Delta ACE)} = \frac{m}{p}, \quad \frac{\text{área}(\Delta AED)}{\text{área}(\Delta ACE)} = \frac{n}{p}.$$



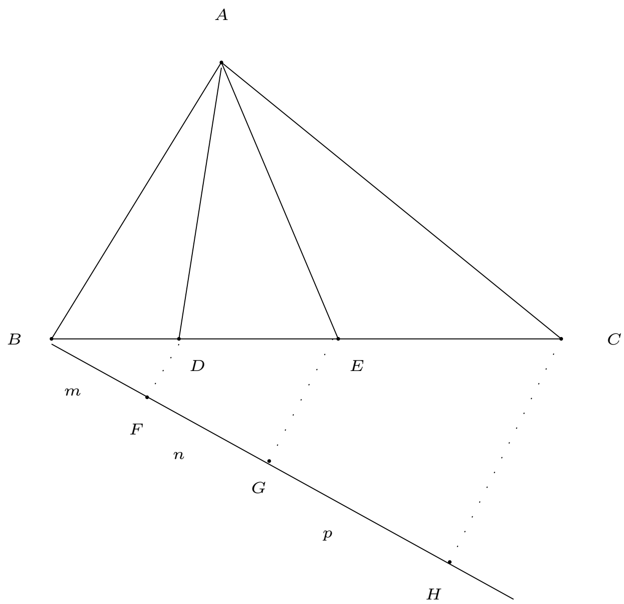
Da Propriedade P1. acima, como os triângulos ΔADB, ΔAED e ΔACE têm mesma altura $\underline{h}$, segue, das relações acima que:

$$\frac{\frac{BD}{2}h}{\frac{DE}{2}h} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\frac{BD}{2}h}{\frac{EC}{2}h} = \frac{m}{p}, \quad \frac{\frac{DE}{2}h}{\frac{EC}{2}h} = \frac{n}{p} \Leftrightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{m}{n}, \quad \frac{BD}{EC} = \frac{m}{p}, \quad \frac{DE}{EC} = \frac{n}{p}$$

ou ainda,

$$\frac{BD}{m} = \frac{DE}{n} = \frac{EC}{p} \tag{3.5}$$

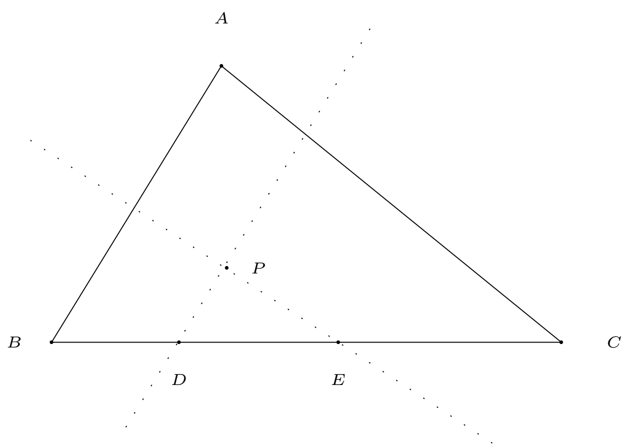
Logo podemos obter os pontos D e E com na figura abaixo:



$$\boxed{BF = m,\ FG = n,\ GH = p}$$

As retas $\overleftrightarrow{FD}$, $\overleftrightarrow{GE}$ são paralelas a reta $\overleftrightarrow{HC}$.

2. Para finalizar, tracemos pelos pontos D e E retas paralelas as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente. Seja P o ponto de interseção das retas acima (figura abaixo).



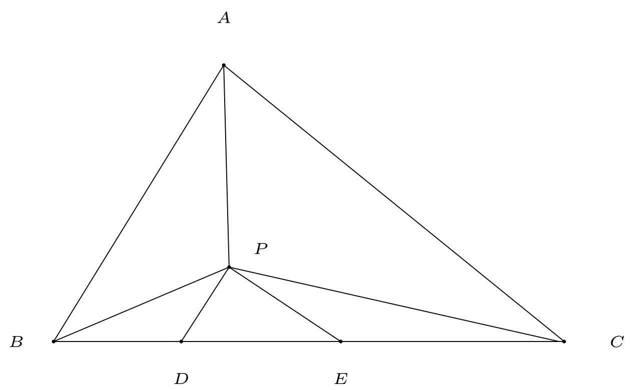
3. Afirmamos que os triângulos ΔPAB, ΔPCB e ΔPAC têm as propriedades pedidas.

De fato, os triângulos ΔADB e ΔAPB têm mesma área, pois têm mesma base $\overline{AB}$ e mesma altura (pois os pontos D e P estão sobre uma mesma paralela a reta $\overleftrightarrow{AB}$), ou seja,

$$\text{área }(\Delta ADB) = \text{ área }(\Delta APB). \tag{3.6}$$

Os triângulos ΔACE e ΔACP também têm mesma área, pois têm mesma base $\overline{AC}$ e mesma altura (pois os pontos E e P estão sobre uma mesma paralela a reta $\overleftrightarrow{AC}$), ou seja,

$$\text{área }(\Delta ACE) = \text{ área }(\Delta ACP). \tag{3.7}$$



Mas,

$$\text{área }(\Delta ACB) = \text{ área }(\Delta ADB) + \text{ área }(\Delta AED) + \text{ área }(\Delta ACE). \tag{3.8}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\text{área }(\Delta ACB) &= \text{ área }(\Delta APB) + \text{ área }(\Delta PCB) + \text{ área }(\Delta ACP)\\ &\overset{[(3.6)\text{ e }(3.7)]}{=} \text{ área }(\Delta ADB) + \text{ área }(\Delta PCB) + \text{ área }(\Delta ACE).\end{aligned}$$

Comparando a identidade acima com (3.8) obteremos:

$$\text{área }(\Delta PCB) = \text{ área }(\Delta AED).$$

Finalmente,

$$\frac{\text{área}(\Delta PBA)}{\text{área }(\Delta PCB)} = \frac{\text{área }(\Delta PBA)}{\text{área }(\Delta AED)} = \frac{\frac{BD}{2}h}{\frac{DE}{2}h} \overset{(3.5)}{=} \frac{m}{n}.$$

Por outro lado:

$$\frac{\text{área }(\Delta PCB)}{\text{área }(\Delta PAC)} = \frac{\text{área }(\Delta AED)}{\text{área }(\Delta PAC)} = \frac{\frac{DE}{2}h}{\frac{EC}{2}h} \overset{(3.5)}{=} \frac{n}{p}.$$

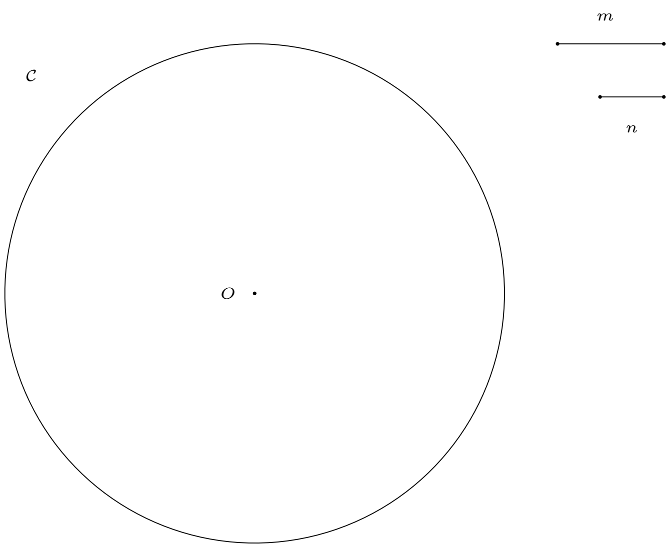
Portanto

$$\frac{\text{área }(\Delta PBA)}{\text{área }(\Delta PCB)} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\text{área }(\Delta PBA)}{\text{área }(\Delta PAC)} = \frac{m}{p}, \quad \frac{\text{área }(\Delta PCB)}{\text{área}(\Delta PAC)} = \frac{n}{p}$$

como queríamos.

Exemplo 15.

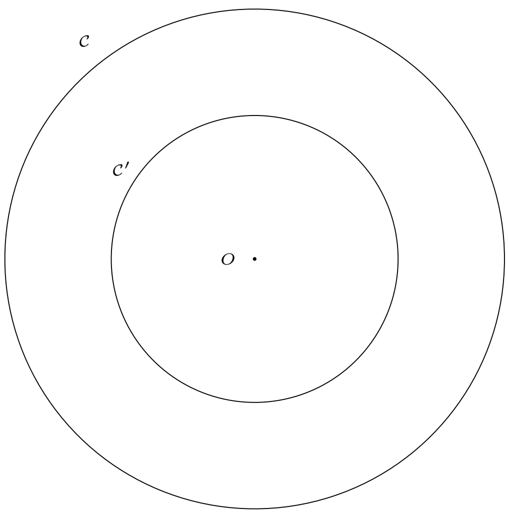
Dado uma circunferência $\mathcal{C}$, traçar uma outra circunferência concêntrica a mesma de modo que as áreas do círculo menor e da coroa determinada pelas circunferências sejam proporcionais ao $\underline{m}$ e $\underline{n}$ dados.



Resolução:

Sejam $r > 0$ e O o raio e o centro da circunferência $\mathcal{C}$, respectivamente.

Queremos construir uma circunferência $\mathcal{C}'$ de centro no ponto O e raio $\underline{r'}$ de modo que a área do círculo determinado por $\mathcal{C}'$ e a área compreendida entre as circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sejam proporcionais a $\underline{m}$ e $\underline{n}$, respectivamente (figura abaixo).



Observemos que queremos:

$$\text{área } (\mathcal{C}) = \text{ área } (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}') + \text{ área } (\mathcal{C}').$$

Se conseguirmos encontrar $\underline{r'}$ tal que que

$$\frac{\text{área } (\mathcal{C}')}{\text{área } (\mathcal{C})} = \frac{m}{m+n}$$

então teremos

$$\frac{\text{área } (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}')}{\text{área } (\mathcal{C}')} = \frac{\text{área } (\mathcal{C}) - \text{ área } (\mathcal{C}')}{\text{área } (\mathcal{C}')} = \frac{\text{área } (\mathcal{C})}{\text{área } (\mathcal{C}')} - 1 = \frac{m+n}{m} - 1 = \frac{n}{m},$$

cujo inverso é o que queremos, ou seja, termos:

$$\frac{\text{área } (\mathcal{C}')}{\text{área } (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}')} = \frac{m}{n}.$$

Lembremos da Propriedade P2. acima que

$$\frac{\text{área } (\mathcal{C}')}{\text{área } (\mathcal{C})} = (\frac{r'}{r})^2,$$

ou seja, precisamos encontrar $r' > 0$ tal que

$$\frac{m}{m+n} = \frac{\text{área } (\mathcal{C}')}{\text{área } (\mathcal{C})} = (\frac{r'}{r})^2,$$

ou seja, r' deverá satisafazer a seguinte relação:

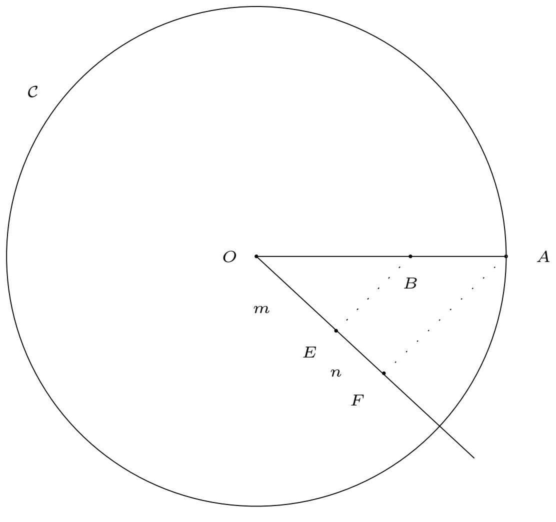
$$\frac{r'^2}{r^2} = \frac{m}{m+n}. \tag{3.9}$$

Para isto agimos da seguinte forma:

1. Consideremos o segmento $\overline{OA}$ onde $A \in \mathcal{C}$ e um ponto B sobre o segmento $\overline{OA}$ de tal modo que

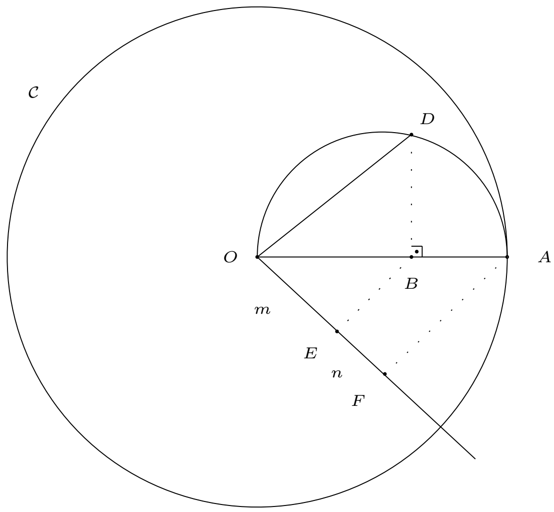
$$\frac{OB}{BA} = \frac{m}{n}.$$

O segmento $\overline{EB}$ é paralelo ao segmento $\overline{AF}$ (figura abaixo).



$\boxed{OE = m,\ EF = n}$

2. Traçando a semi-circunferência de diâmetro $\overline{OA}$ (de centro no seu ponto médio) e a perpendicular ao segmento $\overline{OA}$ pelo ponto B encontramos o ponto D na intersecção das mesmas (figura abaixo);



$$\boxed{OE = m,\ EF = n}$$

3. Observemos que o triângulo ΔODA é retângulo no vértice D, logo

$$OD^2 = OB.OA.$$

Mas, $OA = r$ e

$$\frac{OB}{OA} = \frac{m}{m+n},$$

isto é,

$$OB = \frac{m}{m+n}.r.$$

Assim

$$OD^2 = \frac{m}{m+n}.r^2,$$

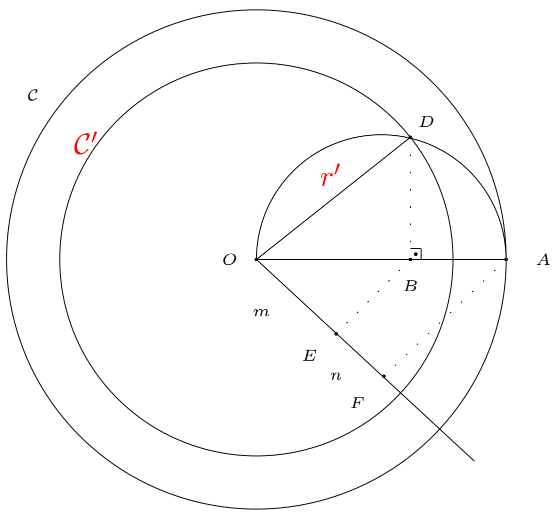
ou ainda,

$$\frac{OD^2}{r^2} = \frac{m}{m+n}.$$

Portanto

$$r' \doteq OD$$

satisfaz a relação (*) e assim será o raio da circunferência $\mathcal{C}'$ procurada (figura abaixo).

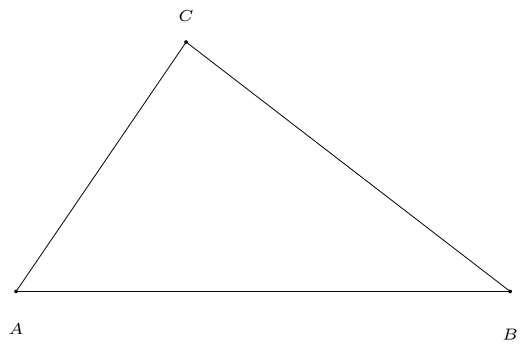


$$\boxed{OE = m,\ EF = n}$$

3.3 Exercícios

Exercício 3.3.1 *Dado um triângulo ΔABC, construir um triângulo $\Delta A'B'C'$ equivalente ao triângulo ΔABC tal que*

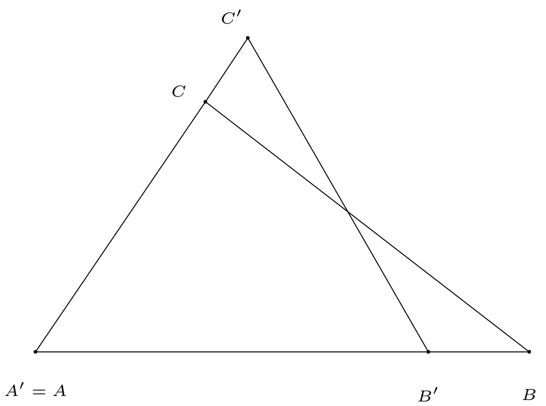
$$\widehat{A'} = \widehat{A} \quad e \quad A'B' = A'C'.$$



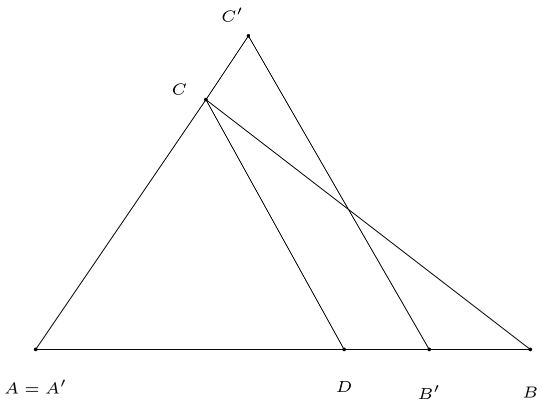
Resolução:

Suponhamos que o triângulo $\Delta A'B'C'$ está construído.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $A' = A$ (figura abaixo).



Consideremos D um ponto sobre o segmento $\overline{AB}$ tal que $AD = AC$ (figura abaixo).



Observemos que os triângulo $\Delta AB'C'$ e ΔACD são semelhantes (pois temos um ângulo comum e $AC = AD$ e $AC' = AB'$, ou seja, os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{C'B'}$ são paralelos).

Logo, da Propriedade P2. acima segue-se que

$$\frac{\text{área } (\Delta ADC)}{\text{área } (\Delta AB'C')} = \left(\frac{AC}{AC'}\right)^2.$$

Por outro lado temos que

$$\frac{\text{área } (\Delta ADC)}{\text{área } (\Delta ABC)} = \frac{\frac{AD}{2}h}{\frac{AB}{2}h} \overset{[AD=AC]}{=} \frac{AC}{AB}.$$

Logo se

$$\left(\frac{AC}{AC'}\right)^2 = \frac{AC}{AB},$$

ou seja, se

$$(AC')^2 = AB.AC$$

segue que os triângulos $\Delta AB'C'$ e ΔABC terão mesma área, pois neste caso teremos

$$\frac{\text{área } (\Delta ADC)}{\text{área } (\Delta AB'C')} = \left(\frac{AC}{AC'}\right)^2 = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{área } (\Delta ADC)}{\text{área } (\Delta ABC)},$$

isto é,

$$\text{área } (\Delta AB'C') = \text{ área } (\Delta ABC).$$

Logo basta obter C' sobre a semi-reta $\overset{\mapsto}{AC}$ de tal modo que

$$(AC')^2 = AB.AC.$$

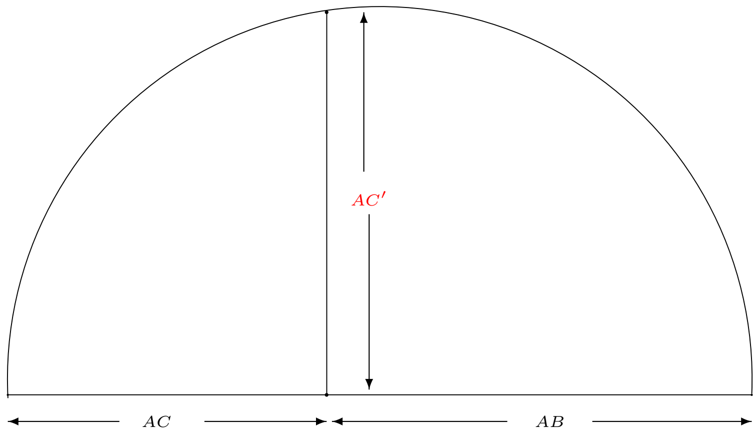
Para isto lembremos que num triângulo retângulo temos

$$h^2 = m.n,$$

ou seja, construimos um triângulo retângulo de tal modo que a base oposta ao ângulo reto tenha comprimento

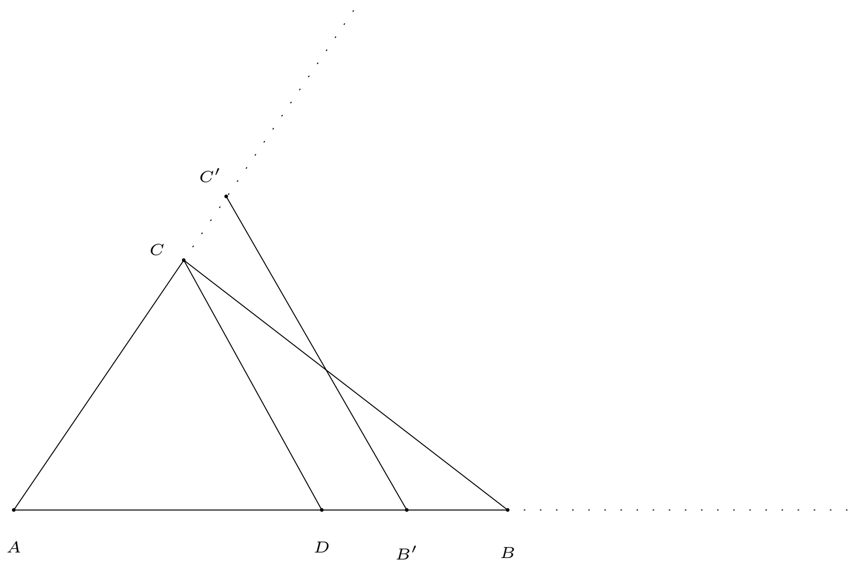
$$AB + AC.$$

Com isso sua altura terá comprimento AC'.

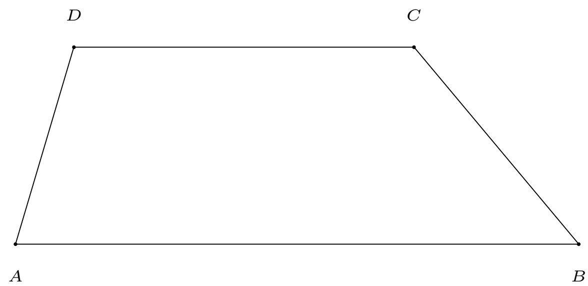


Logo teremos como construir o triângulo $\Delta AB'C'$ com as propriedades pedidas no exercício bastanto transportarmos o comprimento AC' para o lado $\overset{\mapsto}{AC}$ do ângulo $\widehat{A}$.

O ponto B' será obtido da interseção da circunferência de centro em A e raio AC' com a semi-reta $\overset{\mapsto}{AB}$ (figura abaixo).

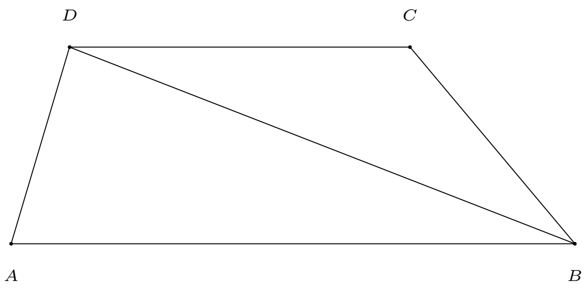


Exercício 3.3.2 *Construir um quadrado equivalente a um trapézio $ABCD$ dado.*

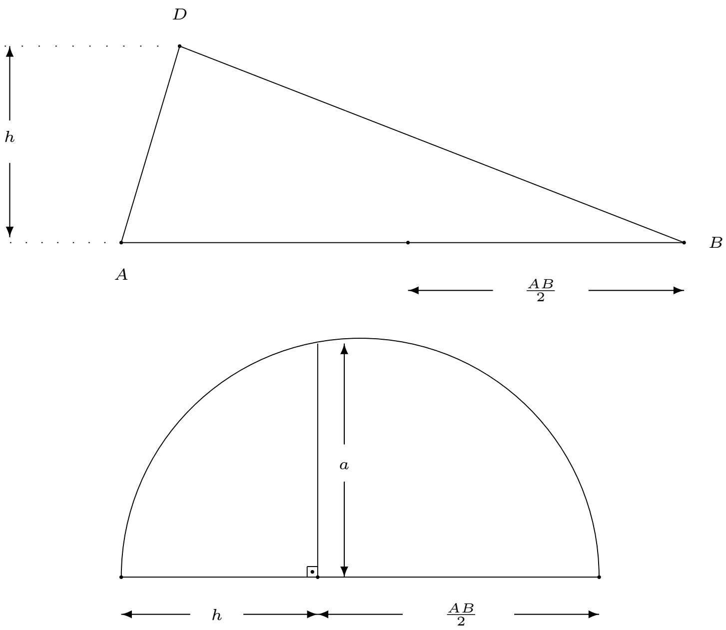


<u>**Resolução:**</u>

Consideremos os triângulo ΔADB e ΔBDC como na figura abaixo.



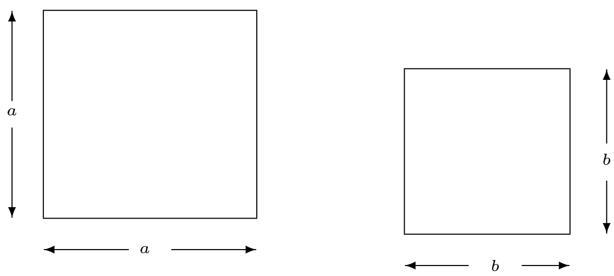
1. Podemos transformar cada um desses triângulos em quadrados equivalentes, para isto temos a figura abaixo:



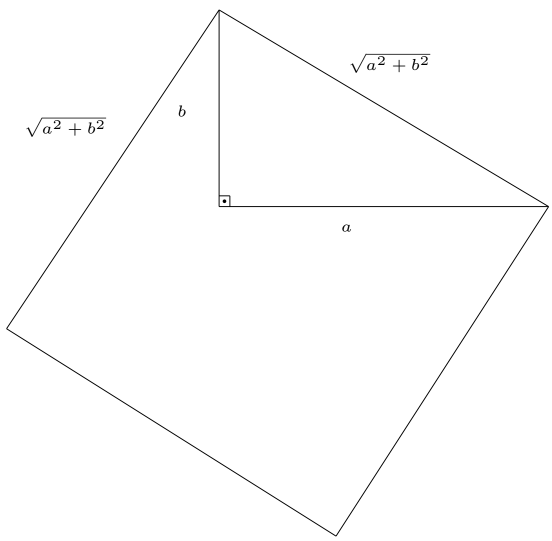
Com o segmento de comprimento $\underline{a}$ podemos construir um quadrado que é equivalente ao triângulo ΔADB (lembremos que $a^2 = \dfrac{AB}{2}.h$).

Agindo do mesmo modo com o triângulo ΔBDC obtemos o segmento de comprimento $\underline{b}$ com o qual podemos construir um quadrado que é equivalente ao triângulo ΔBDC.

2. Logo o trapézio $ABCD$ é equivalente aos dois quadrados de lados $\underline{a}$ e $\underline{b}$ obtidos acima, isto é, a área do trapézio $ACBD$ será $a^2 + b^2$.

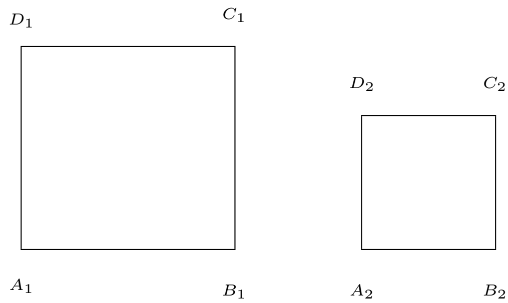


3. Podemos agora construir um quadrado de lado $\sqrt{a^2 + b^2}$ (figura abaixo);



4. Assim o quadrado de lado $\sqrt{a^2+b^2}$ será equivalente ao trapézio $ABCD$, pois sua área é a^2+b^2, como queríamos.

Exercício 3.3.3 *Construir um quadrado cuja área seja a soma das áreas de dois outros quadrados dados.*



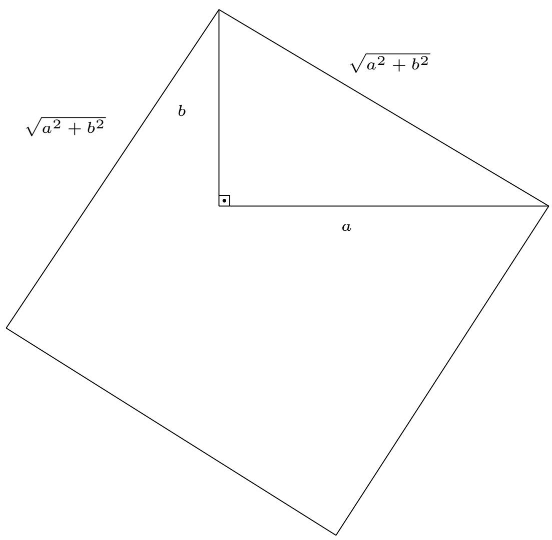
Resolução:

Podemos repetir as idéias usadas no exercício anterior.

Mas claramente: se

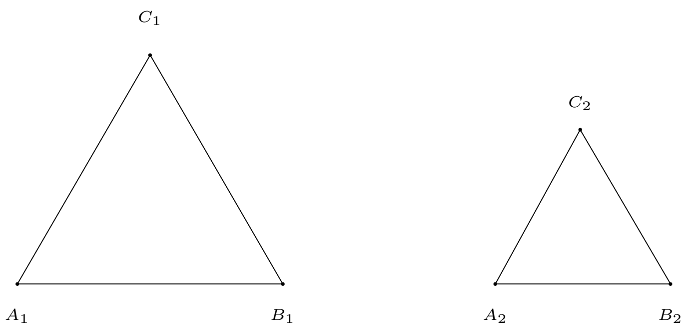
$$A_1B_1 = a \quad \text{e} \quad A_2B_2 = b$$

então podemos fazer a seguinte contrução:



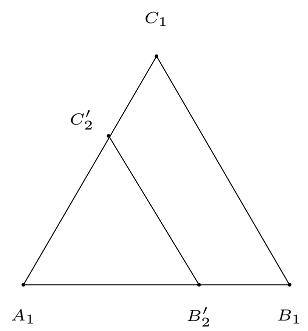
O quadrado construído acima (que tem lados de comprimentos $\sqrt{a^2+b^2}$) terá área igual a a^2+b^2 que é a soma das áreas dos dois quadrados dados, com o queríamos.

Exercício 3.3.4 *Construir um triângulo cuja área seja a diferença das áreas de dois triângulos equiláteros dados.*

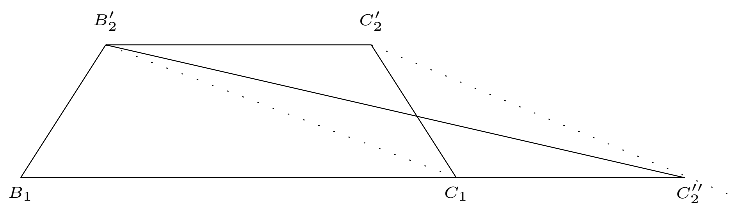


Resolução:

Como os triângulos $\Delta A_1B_1C_1$ e $\Delta A_2B_2C_2$ são equiláteros podemos obter pontos B_2' e C_2' sobre os segmentos $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_1C_1}$, respectivamente, de modo que os triângulos $\Delta A_1B_2'C_2'$ e $\Delta A_2B_2C_2$ sejam equivalentes (figura abaixo).



Com isto a diferença das áreas dos dois triângulos será igual a área do trapézio $B_2'B_1C_1C_2'$.
Podemos então transformar o trapézio acima num triângulo equivalente ao mesmo.
Para isto basta considerar a reta paralela a reta $\overleftrightarrow{B_2'C_1}$ que passa pelo ponto C_2'.
Esta reta interceptará a reta $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ no ponto C_2'' (figura abaixo).



O triângulo $\Delta B_1C_2''B_2'$ é equivalente ao trapézio $B_1C_1C_2'B_2'$ e portanto sua área é igual a diferença das areas dos triângulos $\Delta A_1B_1C_1$ e $\Delta A_2B_2C_2$, como queríamos mostrar.

Exercício 3.3.5 (Marilia Pelinson Tridapalli) *Construir um triângulo equilátero equivalente a um triângulo dado.*

Resolução:

Exercício 3.3.6 (Hugo Cesar Faggian) *Dado o triângulo ΔABC, construir um triângulo $\Delta A'B'C'$ equivalente ao dado conhecendo-se dois lados do triângulo $\Delta A'B'C'$.*

Resolução:

Exercício 3.3.7 (Marina Ferrucci Bega) *Dados uma quadrado e os comprimentos $\underline{m}$ e $\underline{n}$ de dois segmentos, traçar por um dos vértices do quadrado uamreta que divida a sua área em partes proporcionais $\underline{m}$ e $\underline{n}$.*

Resolução:

Exercício 3.3.8 (Lucas Vioto dos Santos Ribeiro) *Inscrever em uma circunferência dada um retângulo equivalente a um quadrado dado.*

Resolução:

Exercício 3.3.9 (Sérgio Luiz Daltoso Junior) *Dado um triângulo ΔABC traçar o segmento $\overline{DE}$ paralelo ao segmento $\overline{BC}$ de modo que a área do triângulo ΔADE seja $\dfrac{2}{3}$ da área do triângulo ΔABC.*

Resolução:

Exercício 3.3.10 (Hugo Cesar Faggian) *Determinar o ponto P no interior do triângulo ΔABC de modo que as áreas dos triângulos ΔPAB, ΔPBC e ΔPCA sejam iguais.*

Resolução:

Exercício 3.3.11 (Hugo Cesar Faggian) *Seja P um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ do triângulo ΔABC. Traçar pelo ponto P duas retas de modo que divida o triângulo ΔABC em três partes que tenham áreas iguais.*

Resolução:

Exercício 3.3.12 (Wagner Lisbôa Mota) *Seja P um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ de um quadrilátero convexo $\Delta ABCD$. Traçar pelo ponto P uma reta que divida o quadrilátero em duas partes equivalentes.*

Resolução:

Exercício 3.3.13 (Diego da Silva Oliveira) *Sejam $\underline{r}$ e $\underline{s}$ duas retas concorrentes do ponto A e M um ponto que não pertence a nenhuma dessas retas. Encontrar um ponto B sobre a reta $\underline{r}$ e um ponto C sobre a reta $\underline{s}$ de modo que o segmento $\overline{BC}$ passe pelo ponto M e a área do triângulo ΔABC seja a menor possível.*

Resolução:

F I M do Desenho Geométrico