PIPGEs ICMC – USP/UFSCar
EST5102 – Inferência Estatística – 2024/1
5ª lista de exercícios

1. Sejam $X \sim \mathsf{normal}(\theta, 1)$ e $\widehat{\theta}_{a,b}(X) = aX + b$ um estimador de θ, com θ, a e $b \in \mathbb{R}$, a e b conhecidas.

   (a) Calcule o erro quadrático médio (EQM) de $\widehat{\theta}_{a,b}(X)$.

   (b) Represente graficamente o EQM de $\widehat{\theta}_{1/2,0}(X)$ e $\widehat{\theta}_{1,0}(X)$ em função de θ. Pode ser afirmado que um estimador é uniformemente melhor do que o outro em termos de EQM?

2. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{uniforme}([\theta_1, \theta_2])$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, com $\theta_1 < \theta_2$.

   (a) Prove que $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})^\top$ é uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta}$, em que $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ e $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

   (b) Pode ser provado que $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ é completa. Apresente o estimador não viesado de variância uniformemente mínima (ENVVUM) de $\tau(\boldsymbol{\theta}) = (\theta_1 + \theta_2)/2$.

3. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Poisson}(\theta)$. Apresente o ENVVUM de $\tau(\theta) = P_\theta(X_1 = 1)$.

4. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Bernoulli}(\theta)$, $0 < \theta < 1$. Para $n > 4$, tome $j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_4$ pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Prove que $X_{j_1} X_{j_2} X_{j_3} X_{j_4}$ é um estimador não viesado de θ^4. Este estimador é um ENVVUM de θ^4? Se não for, obtenha um ENVVUM de θ^4. Sua solução é única?

5. A variável aleatória X tem distribuição binomial truncada em 0 com função massa de probabilidade
$$f(x; \theta) = \frac{\binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}}{1 - (1-\theta)^n} \, I_{\{1,2,\ldots,n\}}(x).$$

   (a) Prove que X é uma estatística suficiente e completa para θ.

   (b) Apresente a função $\tau(\theta)$ para a qual X/n é o ENVVUM.

6. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}(\mu, \sigma^2)$, $n \geq 2$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $0 < \sigma^2 < \infty$. Prove que $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$, embora seja uma estatística suficiente para $(\mu, \sigma^2)^\top$, não é completa.

7. Para cada uma das distribuições abaixo, seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória. Existe uma função $\tau(\theta)$ para a qual existe um estimador não viesado cuja variância é igual à cota inferior de Cramér-Rao? Se existir, apresente $\tau(\theta)$; se não existir, justifique.

   (a)
$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta - 1} \, I_{(0,1)}(x), \ \theta > 0.$$

(b)

$$f(x;\theta) = \frac{\log(\theta)}{\theta - 1}\theta^x \, I_{(0,1)}(x), \;\; \theta > 1.$$

8. Seja $X \sim \textsf{binomial}(n, \theta)$, $0 < \theta < 1$, $n > 1$.

   (a) Prove que $X(n-X)/\{n(n-1)\}$ é o ENVVUM de $\tau(\theta) = \theta(1-\theta)$.

   (b) O que representa $\tau(\theta)$?

9. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \textsf{gama}(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, α e β desconhecidos. Apresente o ENVVUM de α/β.

10. Prove que em uma família exponencial uniparamétrica na forma canônica com função densidade $f(x;\eta) = \exp\{\eta\, T(x) + d_0(\eta) + S(x)\}\, I_A(x)$, a informação de Fisher de η é dada por $\mathcal{I}(\eta) = -\, d_0^{''}(\eta)$.