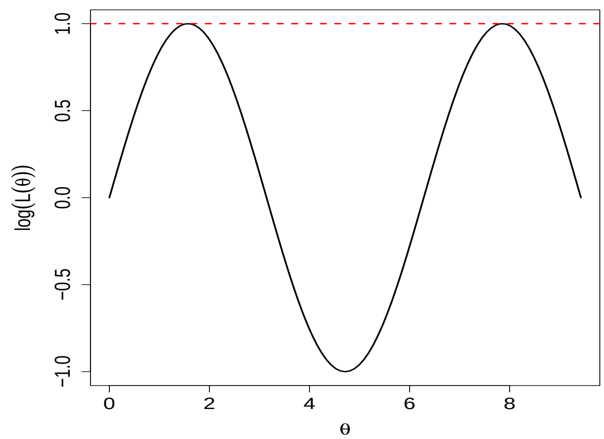
ICMC/USP – SME0818 – Inferência Estatística – 2022/1

1ª prova – Solução

1. (a) Apresente o gráfico de uma função log-verossimilhança $\ell(\theta)$ exemplificando que o estimador de máxima verossimilhança de θ não é único.

   Solução A figura abaixo mostra uma função log-verossimilhança que apresenta dois pontos de máximo global, de modo que o estimador de máxima verossimilhança de θ não é único.



   (b) $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ é uma estatística suficiente e completa para θ. $T_1 = T_1(X_1, \ldots, X_n)$ é um estimador não viesado de $g(\theta)$. Descreva como obter o ENVVUM de $g(\theta)$.

   Solução A estatística T é suficiente e completa para θ e T_1 é um estimador não viesado de $g(\theta)$. Aplicando os teoremas de Rao-Blackwell e Lehmann-Scheffé, temos que $\mathrm{E}(T_1 \,|\, T)$ é o ENVVUM de $g(\theta)$.

   (c) $T^* = T^*(X_1, \ldots, X_n)$ é o ENVVUM de θ.

   Pode ser afirmado que T^* é o estimador de máxima verossimilhança de θ?

   Solução Não. No caso da distribuição $\mathsf{normal}(\mu, \sigma^2)$, o esimador de máxima verossimilhança de $\theta = \sigma^2$ é viesado e, portanto, não pode ser um ENVVUM.

   Pode ser afirmado que T^* é um estimador eficiente de θ?

   Solução Não. Existe ENVVUM cuja variância é maior do que a cota inferior de Cramér-Rao (portanto, não é eficiente). Se o ENVVUM de $g(\theta) = 1/\theta$ for eficiente, um ENVVUM de θ, se existir, não é eficiente.

2. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com função densidade

$$f(x;\theta) = \frac{\log(\theta)}{\theta - 1}\, \theta^x \, \mathrm{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta > 1.$$

(a) Apresente uma estatística suficiente e completa para θ, se existir.

Solução Escrevemos

$$f(x;\theta) = \frac{\log(\theta)}{\theta - 1} \exp\big(x\log(\theta)\big)\, \mathrm{I}_{(0,1)}(x) = a(\theta)b(x)\exp\big(c(\theta)d(x)\big)\, \mathrm{I}_A(x),$$

em que $a(\theta) = \log(\theta)/(\theta-1)$, $b(x) = 1$, $c(\theta) = \log(\theta)$, $d(x) = x$ e $A = (0,1)$ (não depende de θ). Notamos que a distribuição de X é da família exponencial. E como o espaço paramétrico $\Theta = (1, +\infty)$ é um intervalo, $\sum_{i=1}^n d(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i$ é uma estatística suficiente e completa para θ.

(b) Se existir, encontre a função de θ, dada por $g(\theta)$, e seu estimador não viesado $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ cuja variância coincide com a cota inferior de Cramér-Rao.

Solução Para $x \in (0,1)$, calculamos

$$\log\big(f(x;\theta)\big) = \log\left(\frac{\log(\theta)}{\theta - 1}\right) + x\log(\theta)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\big(f(x;\theta)\big) &= \frac{(\theta-1)}{\log(\theta)} \frac{\frac{1}{\theta}(\theta-1) - \log(\theta)}{(\theta-1)^2} + \frac{x}{\theta} \\ &= \frac{1}{\theta}\left\{x - \left(\frac{\theta}{\theta-1} - \frac{1}{\log(\theta)}\right)\right\} \text{ (complete as passagens omitidas).}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\theta}\log\big(f(x_i;\theta)\big) = \frac{n}{\theta}\left\{\overline{x} - \left(\frac{\theta}{\theta-1} - \frac{1}{\log(\theta)}\right)\right\} = K(n,\theta)\{t - g(\theta)\},$$

em que $K(n,\theta) = n/\theta$, $t = \overline{x}$ e $g(\theta) = \theta/(\theta-1) - 1/\log(\theta)$. Concluímos que $\overline{X}$ é um estimador não viesado de $\theta/(\theta-1) - 1/\log(\theta)$ e sua variância coincide com a cota inferior de Cramér-Rao (estimador eficiente).

Observação Calcule $\mathrm{Var}(\overline{X})$.

3. Uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ é obtida de uma população tal que $X \sim \mathsf{normal}(\mu, \sigma^2)$. Pode ser provado que a distribuição aproximada da mediana amostral é normal com média μ e variância $\dfrac{\pi\sigma^2}{2n}$. Pretendemos estimar o parâmetro μ. Você utilizaria a média amostral ou a mediana amostral?

Solução A média amostral $\overline{X}$ e a mediana amostral X^M são estimadores de μ e devem ser comparados. Usando a distribuição aproximada de X^M, vemos que $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(X^M) = \mu$, ou seja, os dois estimadores são não viesados (e, portanto, a variância é igual ao erro quadrático médio). Vimos que $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$, de modo que $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n} < \dfrac{\pi\sigma^2}{2n} = \mathrm{Var}(X^M)$, pois $\pi/2 > 1$. A média amostral é preferível porque é um estimador mais preciso.

4. A variável aleatória X tem distribuição $\mathsf{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$. Em um experimento é possível coletar uma amostra aleatória $Y_1, \ldots, Y_n$, em que $Y_i = 0$, se $X_i = 0$ e $Y_i = 1$, se $X_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

   (a) Apresente um estimador para θ.
   Solução As variáveis $Y_1, \ldots, Y_n$ são uma amostra aleatória da distribuição $\mathsf{Bernoulli}(\mu)$, em que $\mu = \mathrm{E}(Y_1) = P(Y_1 > 0; \theta) = 1 - P(Y_1 = 0; \theta) = 1 - P(X_1 = 0; \theta) = 1 - e^{-\theta}$. Utilizando o primeiro momento de Y_1, obtemos o estimador de momentos $\widetilde{\mu} = \overline{Y}$, que também é o estimador de máxima verossimilhança de μ. Resolvendo em relação a θ obtemos $\widetilde{\theta} = -\log(1 - \widetilde{\mu})$.

   (b) Com base no estimador do item 4a e nas observações `0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0`, apresente uma estimativa para θ.
   Solução O tamanho da amostra é $n = 13$ e o número de "sucessos" é $\sum_{i=1}^{13} y_i = 9$, de modo que $\overline{y} = 9/13$. Portanto, $\widetilde{\theta} = -\log(1 - 9/13) = 1,179$.

5. Uma variável aleatória X tem distribuição com $\mathrm{E}(X) = \theta + g_0\beta$ e $\mathrm{Var}(X) = \pi^2\beta^2/6$, em que $g_0 \cong 0,5772$, β e θ são os parâmetros, $\beta > 0$ e $\theta > 0$. A partir de uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$, $n > 1$, apresente estimadores para β e θ.
   Solução A média e a variância da distribuição foram dadas. Aplicamos o método dos momentos. Temos que $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \pi^2\beta^2/6 + (\theta + g_0\beta)^2$. Formamos o sistema de equações

$$\begin{aligned} \theta + g_0\beta &= \overline{X}, \\ \frac{\pi^2\beta^2}{6} + (\theta + g_0\beta)^2 &= M_2', \end{aligned}$$

   em que $M_2' = \sum_{i=1}^n X_i^2/n$, cuja solução é $\widetilde{\beta} = \sqrt{6}\sqrt{M_2' - \overline{X}^2}/\pi = \sqrt{6}\sqrt{M_2}/\pi$ e $\widetilde{\theta} = \overline{X} - g_0\sqrt{6}\sqrt{M_2' - \overline{X}^2}/\pi = \overline{X} - g_0\sqrt{6}\sqrt{M_2}/\pi$, sendo que $M_2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/n$.
   Observação Utilizando a média amostral $\overline{X}$ e a variância amostral $\mathcal{S}^2$, formamos o sistema de equações

$$\begin{aligned} \theta + g_0\beta &= \overline{X}, \\ \frac{\pi^2\beta^2}{6} &= \mathcal{S}^2, \end{aligned}$$

   cuja solução é $\widetilde{\beta} = \sqrt{6}\,\mathcal{S}/\pi$ e $\widetilde{\theta} = \overline{X} - g_0\,\mathcal{S}/\pi$. Estes estimadores podem ser chamados de estimadores de momentos?