Árvores binárias AVL

SCC-202 – Algoritmos e Estruturas de Dados I

Lucas Antiqueira

Árvores binárias de busca (ABB)

- Excelentes para busca
  - $O(\log_2 n)$
- Sabe-se que
  - Lista encadeada é
    - Eficiente para inserção e remoção dinâmica de elementos, mas ineficiente para busca
  - Lista sequencial (ordenada) é
    - Eficiente para busca, mas ineficiente para inserção e remoção de elementos

mas... ABBs: solução eficiente para inserção, remoção e busca

ABB

- Contra-exemplo
  - Inserção dos elementos na ordem em que aparecem
    - A, B, C, D, E, ..., Z
    - 1000, 999, 998, ..., 1

ABB

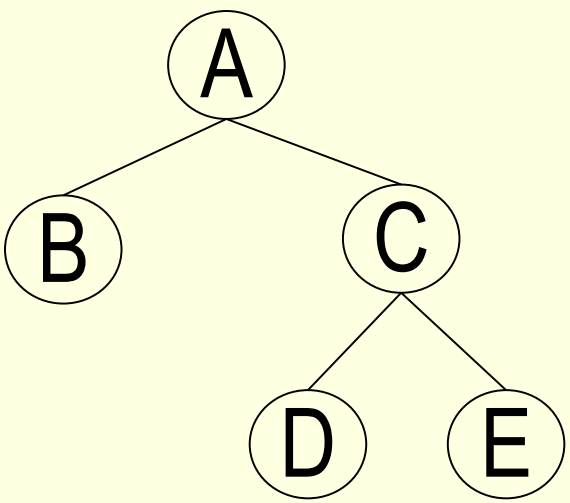
- O desbalanceamento da árvore pode tornar a busca tão ineficiente quanto a busca seqüencial (no pior caso)
  - O(*N*)

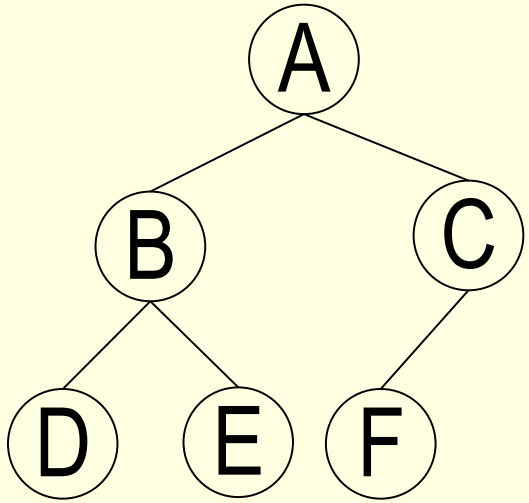
- Solução:

  Balanceamento da árvore

Árvores balanceadas

- Uma árvore binária é dita balanceada se, para cada nó, as alturas de suas duas subárvores diferem de, no máximo, 1

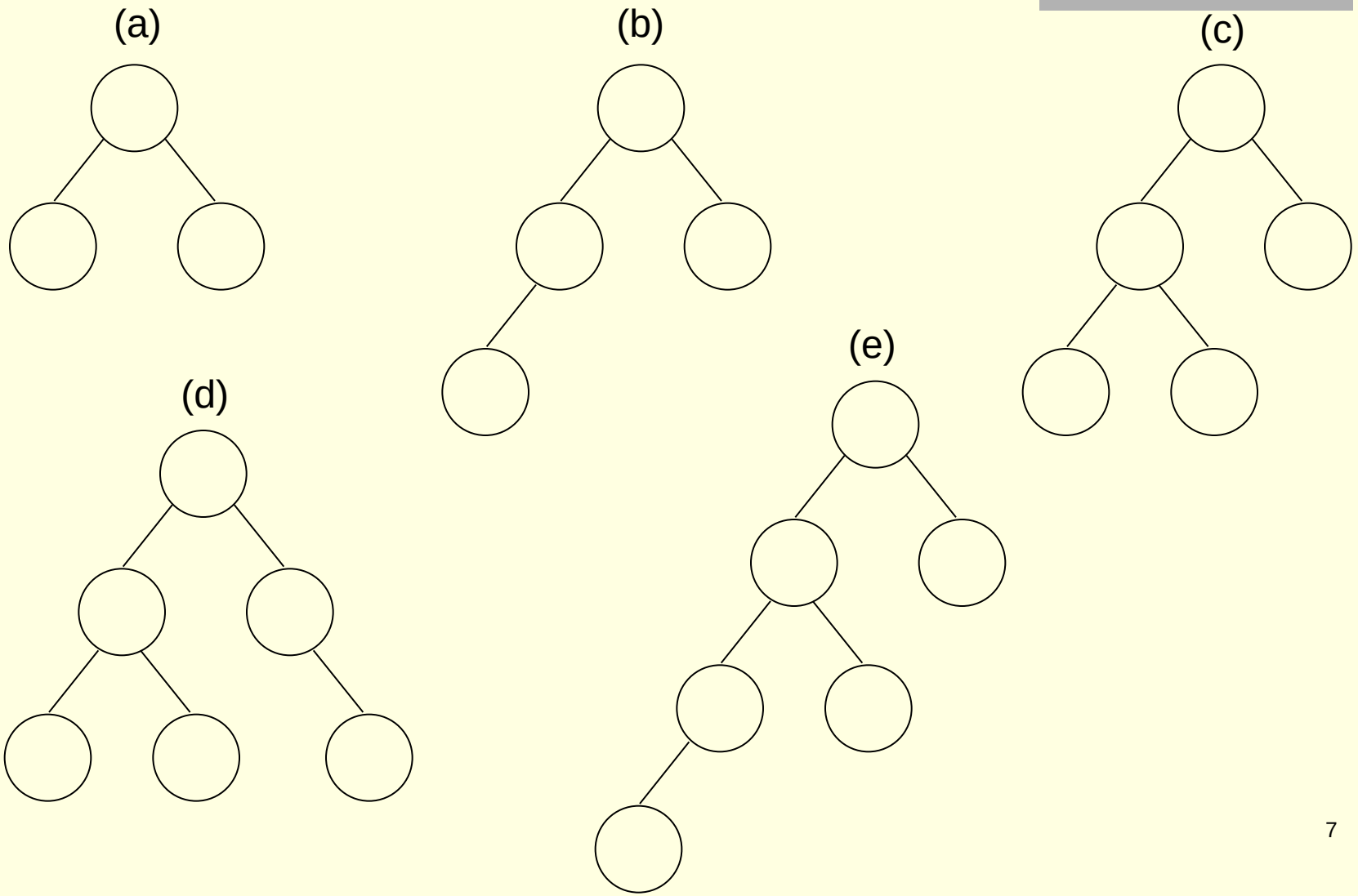




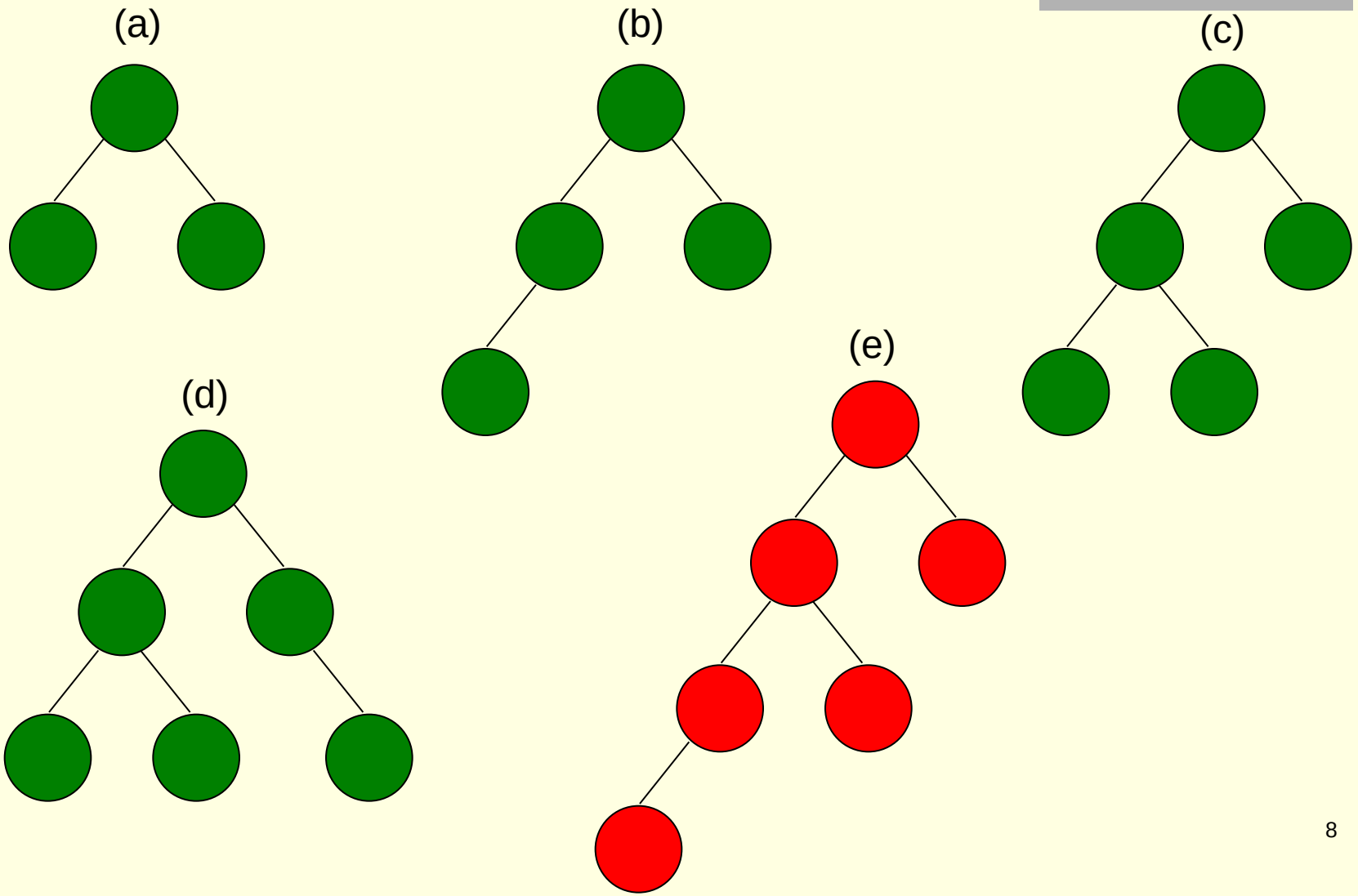
AVL

- Árvore binária de busca balanceada
  - Para cada nó, as alturas das subárvores diferem em 1, no máximo
  - Proposta em 1962 pelos matemáticos russos G.M. Adelson-Velskki e E.M. Landis
    - Métodos de inserção e remoção de elementos desenvolvidos de forma que a árvore não fique desbalanceada

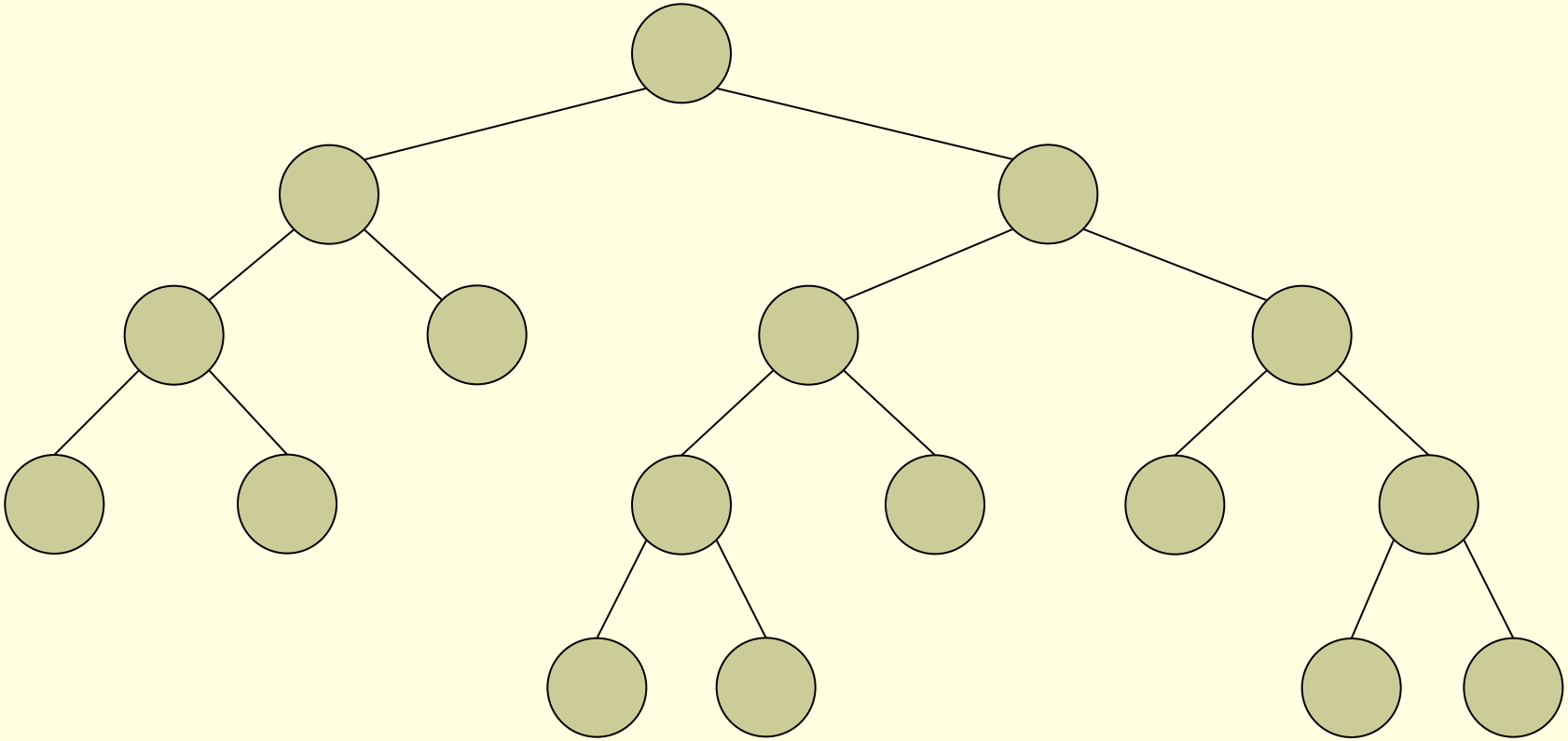
AVL: quem é e quem não é?



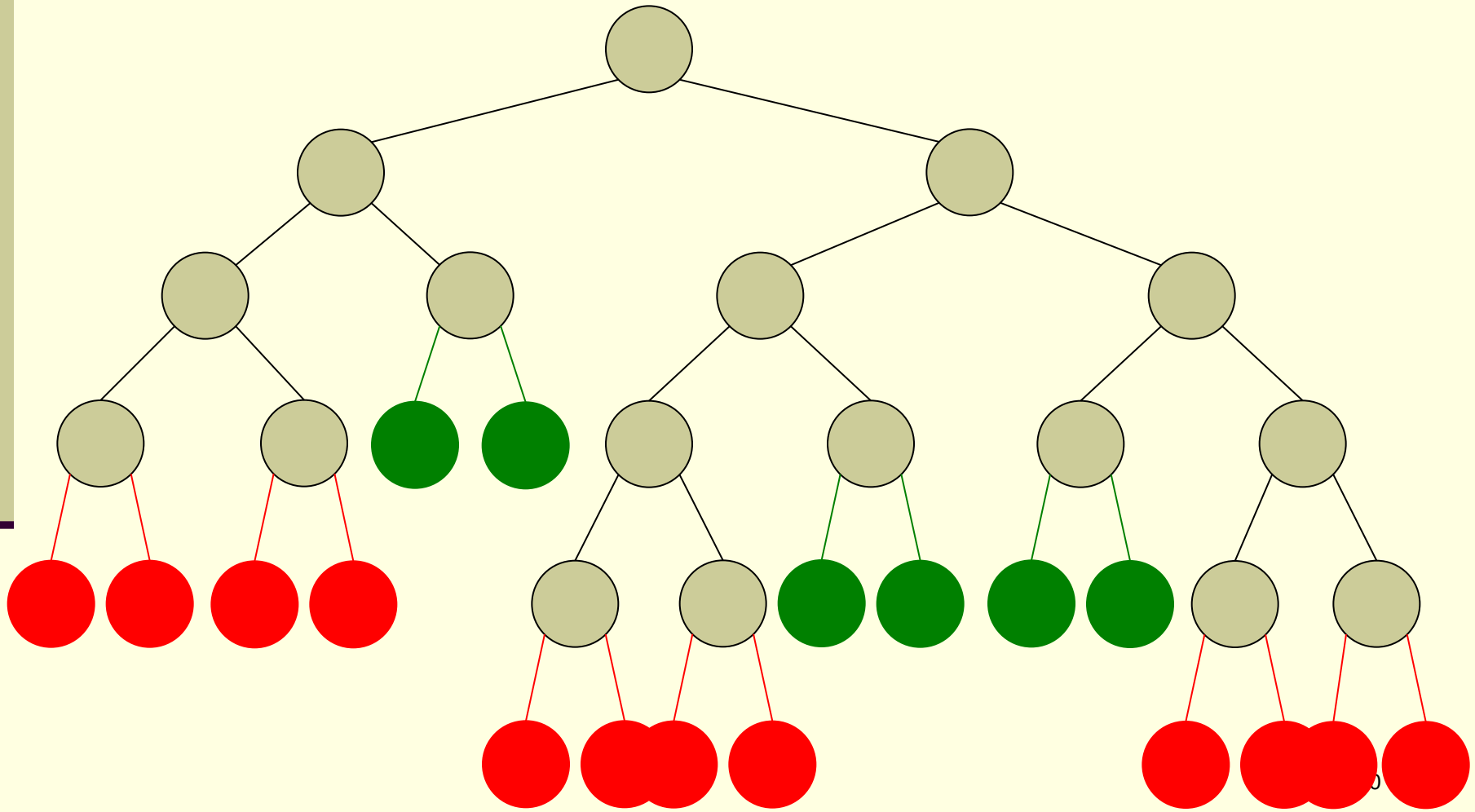
AVL: quem é e quem não é?



Pergunta: a árvore abaixo é AVL?



Exercício: onde se pode incluir um nó para a AVL continuar sendo AVL?



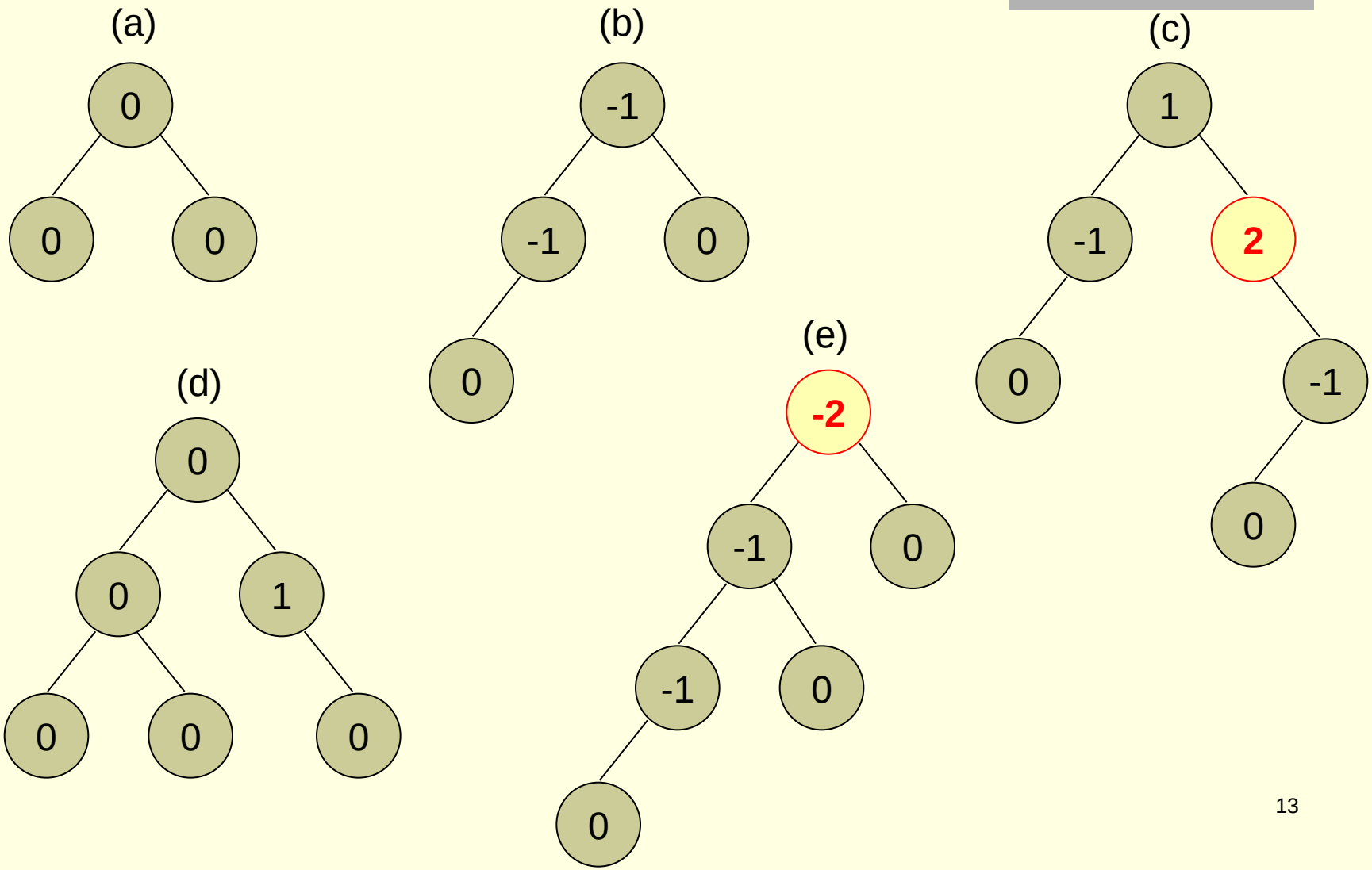
AVL

- Como é que se sabe quando é necessário balancear a árvore?
  - Se a diferença de altura das subárvores deve ser 1, no máximo, então temos que procurar diferenças de alturas maiores do que isso
  - *Possível solução*: cada nó pode manter a diferença de altura de suas subárvores
    - Convencionalmente chamada de fator de balanceamento (FB) do nó

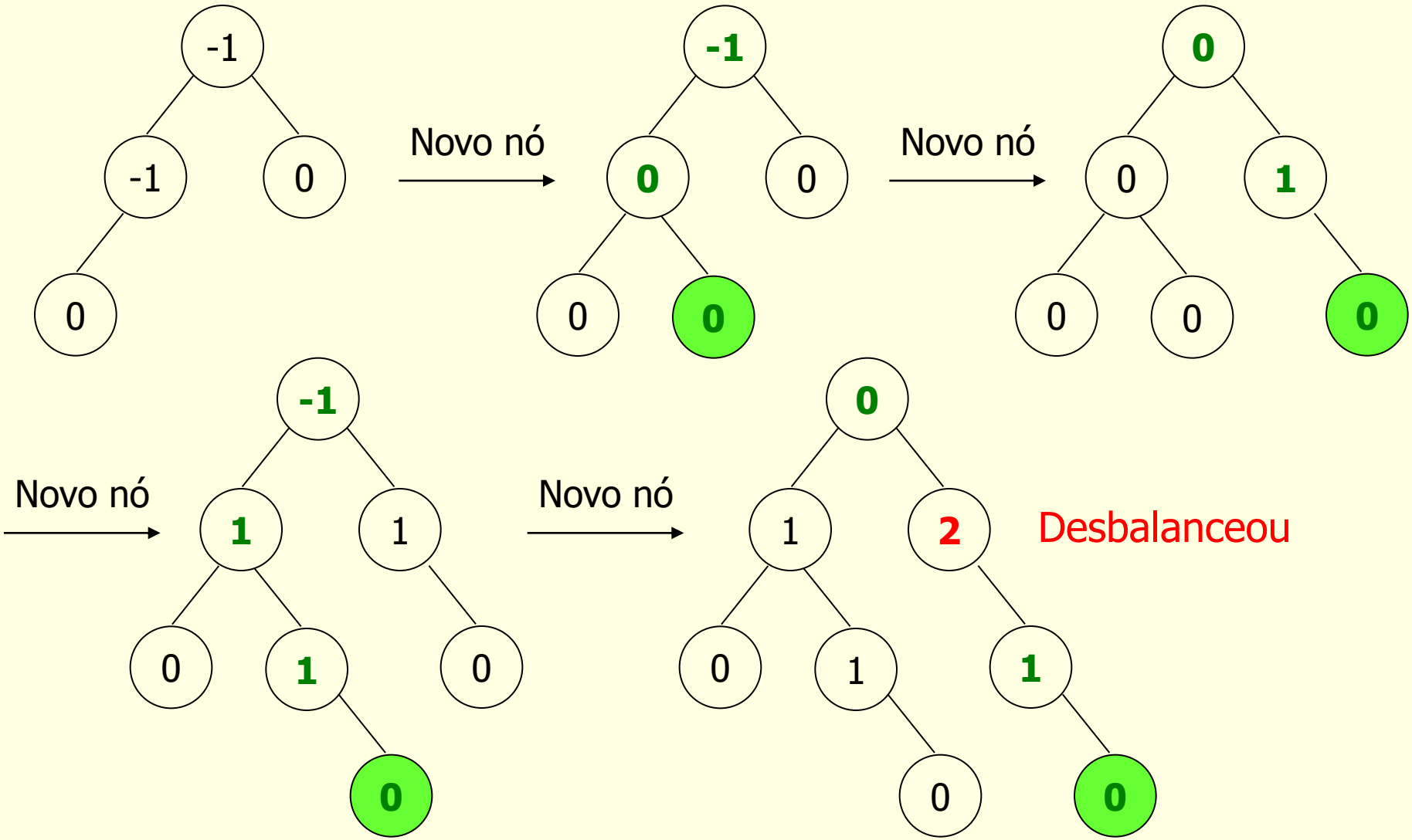
AVL

- Fatores de balanceamento (FB's) dos nós
  - Altura da subárvore direita menos altura da subárvore esquerda
    - H_d-H_e
  - Atualizados sempre que a árvore é alterada (elemento é inserido ou removido)
  - Quando um fator é 0, 1 ou -1, a árvore está balanceada
  - Quando um fator se torna 2 ou -2, a árvore está desbalanceada
    - Operações de balanceamento!

AVL: quem é e quem não é



AVL: exemplo de desbalanceamento



AVL

- Controle do balanceamento
  - Altera-se o algoritmo de inserção para balancear a árvore quando ela se tornar desbalanceada após uma inserção (nó com FB 2 ou -2)
    - Rotações
      - Se árvore pende para esquerda (FB negativo), rotaciona-se para a direita
      - Se árvore pende para direita (FB positivo), rotaciona-se para a esquerda
    - 2 casos podem acontecer

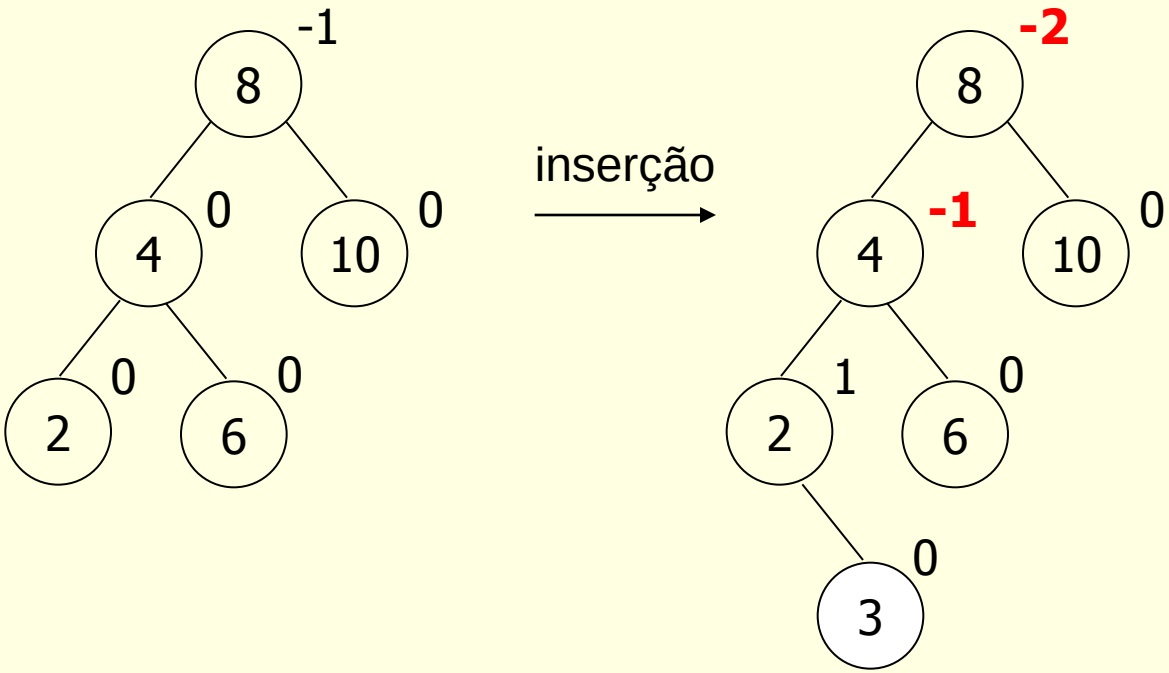
AVL: primeiro caso

- Raiz de uma subárvore com FB -2 e um nó filho com FB -1

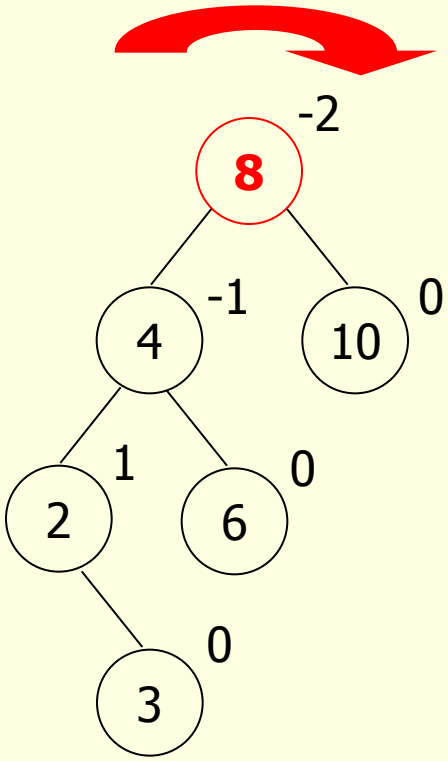
ou

- Raiz de uma subárvore com FB 2 e um nó filho com FB 1

Os fatores de balanceamento têm sinais iguais: subárvores do nó raiz e do filho pendem para o mesmo lado



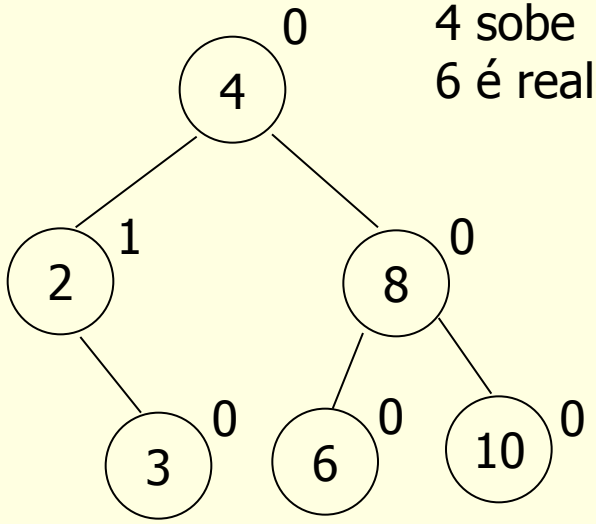
AVL: primeiro caso



Pendendo para
a esquerda

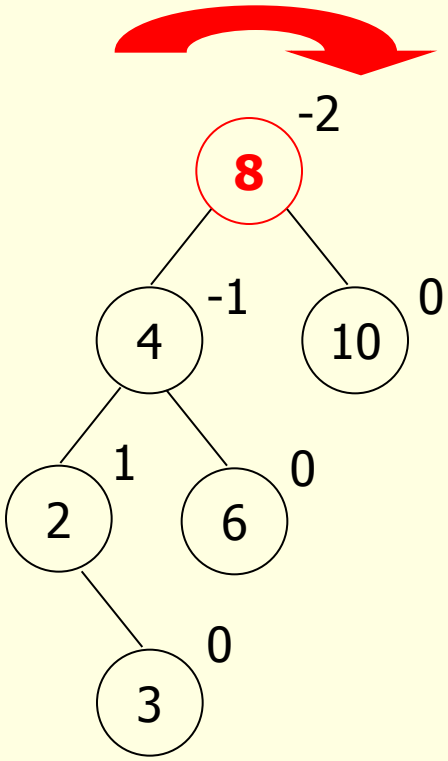
Rotação do nó pai
para a direita
(nó com FB=2)

8 desce
4 sobe
6 é realocado



Árvore balanceada

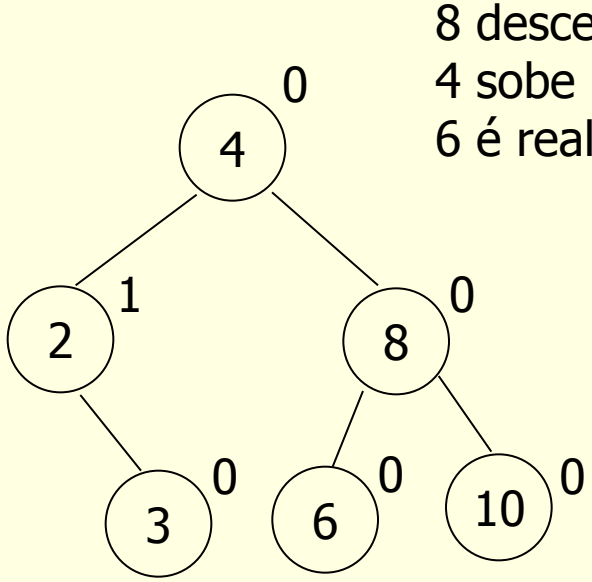
AVL: primeiro caso



Pendendo para
a esquerda

Rotação do nó pai
para a direita
(nó com FB=2)

Rotação simples DD
(Direita-Direita)



8 desce
4 sobe
6 é realocado

Árvore balanceada

AVL: primeiro caso

- Quando subárvores do pai e filho pendem para um mesmo lado
  - Rotação simples para o lado oposto
    - EE (Esquerda-Esquerda) ou DD (Direita-Direita)
  - Às vezes, é necessário realocar algum elemento, pois ele perde seu lugar na árvore

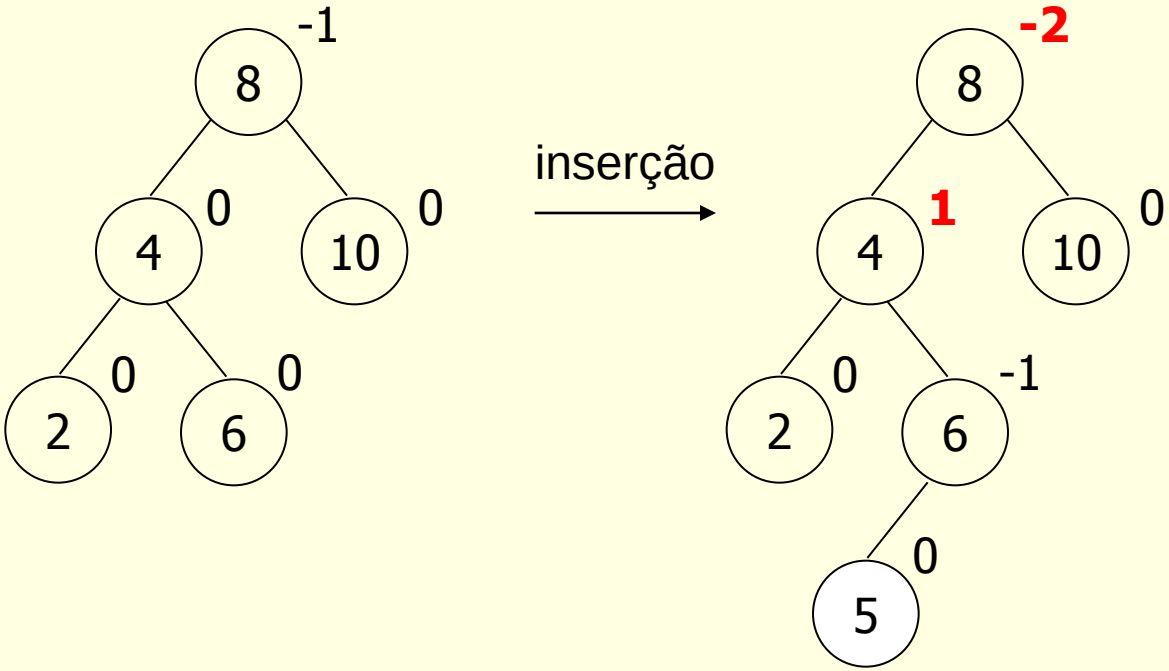
AVL: segundo caso

- Raiz de uma subárvore com FB -2 e um nó filho com FB 1

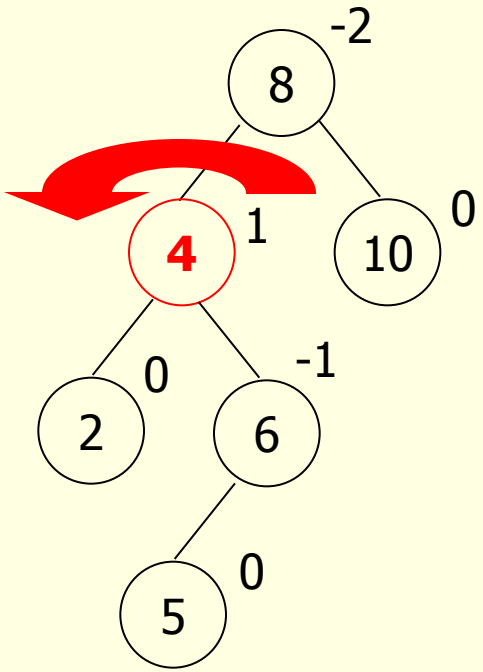
ou

- Raiz de uma subárvore com FB 2 e um nó filho com FB -1

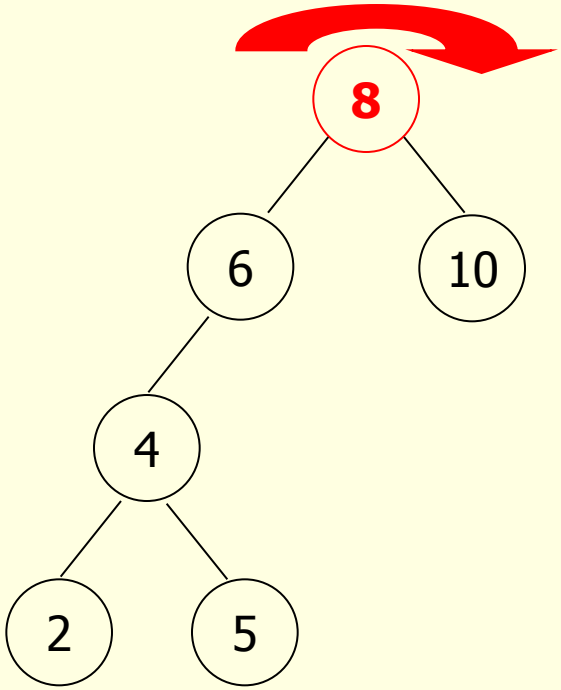
Os fatores de balanceamento têm sinais opostos: subárvore do nó raiz pende para um lado e subárvore do nó filho pende para o outro



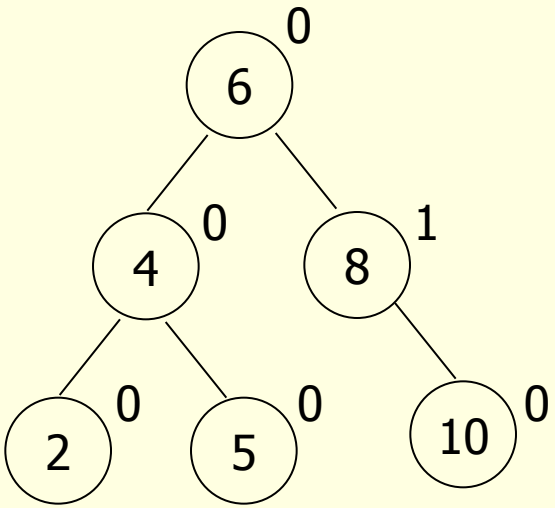
AVL: segundo caso



Rotação do nó filho
para a esquerda
(nó com FB=1)

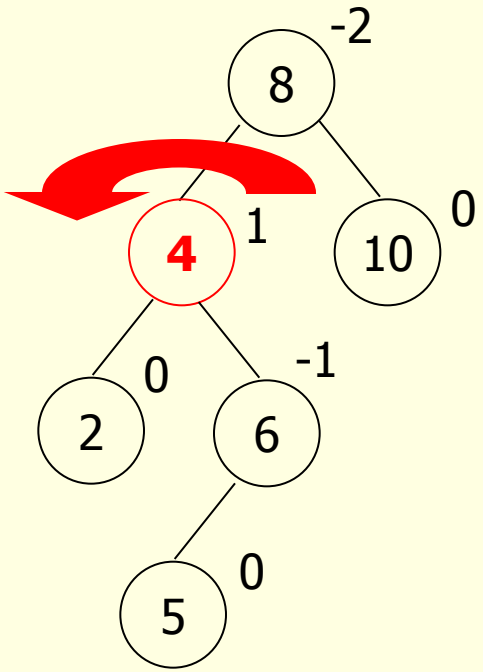


Rotação do nó pai
para a direita
(nó com FB=-2)



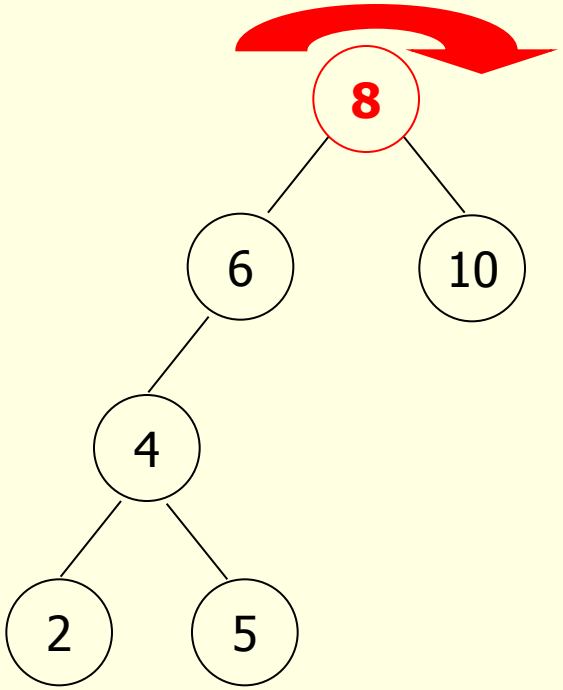
Árvore balanceada

AVL: segundo caso

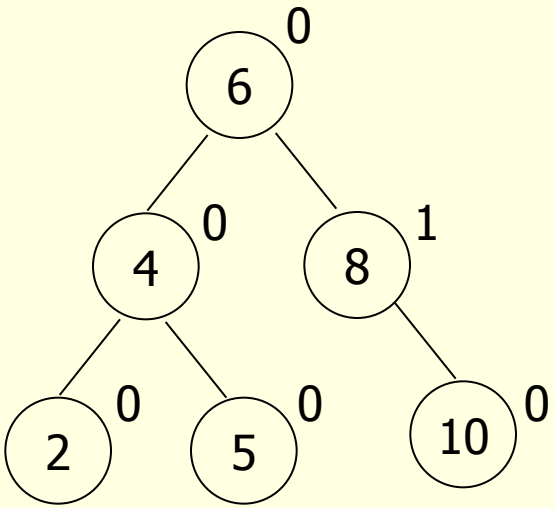


Rotação do nó filho
para a esquerda
(nó com FB=1)

Rotação dupla ED
(Esquerda-Direita)



Rotação do nó pai
para a direita
(nó com FB=-2)



Árvore balanceada

AVL: segundo caso

- Quando subárvores do pai e filho pendem para lados opostos
  - Rotação dupla
    - Primeiro, rotaciona-se o filho para o lado do desbalanceamento do pai
    - Em seguida, rotaciona-se o pai para o lado oposto do desbalanceamento
      - ED ou DE (com raciocínio inverso)
  - Às vezes, é necessário realocar algum elemento, pois ele perde seu lugar na árvore

AVL

- Assegura-se o rebalanceamento de todos os ancestrais de p e, portanto, o rebalanceamento da árvore toda

AVL

- Novo algoritmo de inserção
  - A cada inserção, verifica-se o balanceamento da árvore
    - Se necessário, fazem-se as rotações de acordo com o caso (sinais iguais ou não)
  - Armazena-se uma variável de balanceamento em cada nó para indicar o FB

AVL

- Declaração

```
typedef int elem;

typedef struct no {
  elem info;
  struct no *esq, *dir;
  int FB;
} no;

typedef struct {
  no *raiz;
} AVL;
```

AVL

- Exercício
  - Inserir os elementos 10, 3, 2, 5, 7 e 6 em uma árvore AVL e balancear quando necessário

AVL

- Exercício
  - Inserir os elementos 1, 2, 3, ..., 10 em uma árvore AVL e balancear quando necessário

AVL

- Os percursos em-ordem da árvore original e da balanceada permanecem iguais

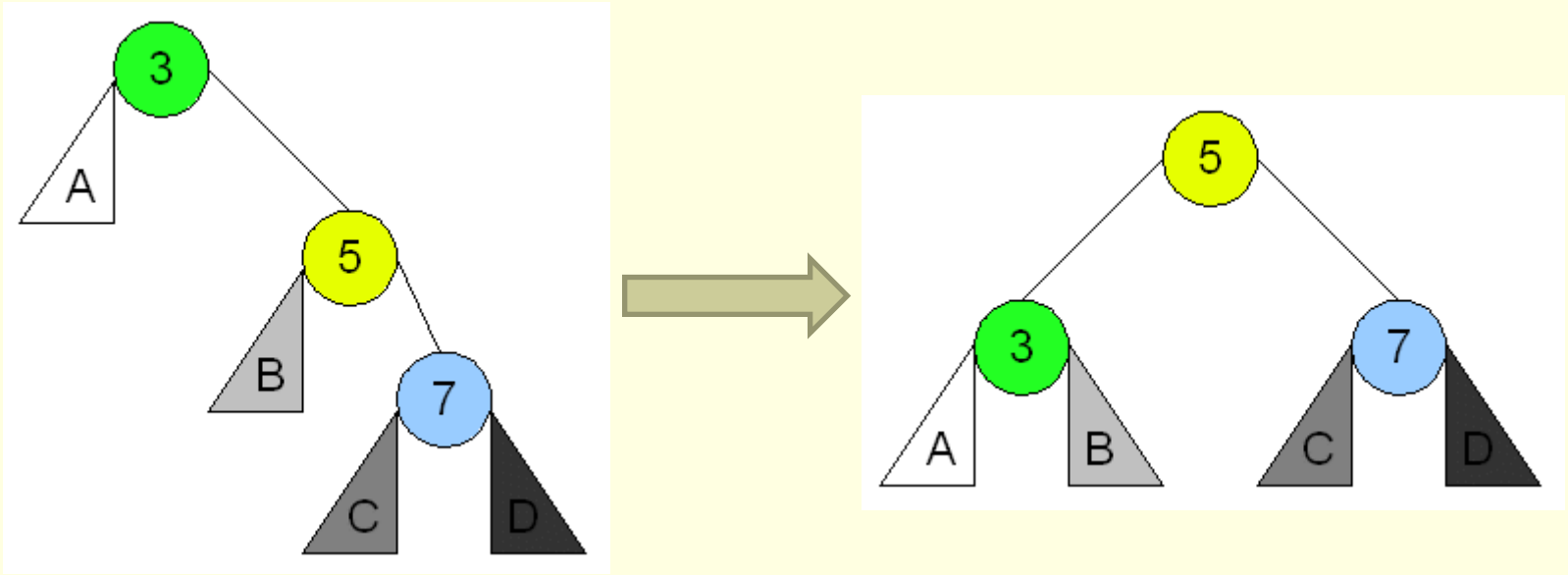
- Exercício: mostre para os exemplos anteriores

AVL

- Rotação simples à esquerda

```
void EE(no **r) {
   no *a = *r;
   no *b = a->dir;
   a->dir = b->esq;
   b->esq = a;
   a->fb = 0;
   b->fb = 0;
   *r = b;
}
```

Rotação simples à esquerda



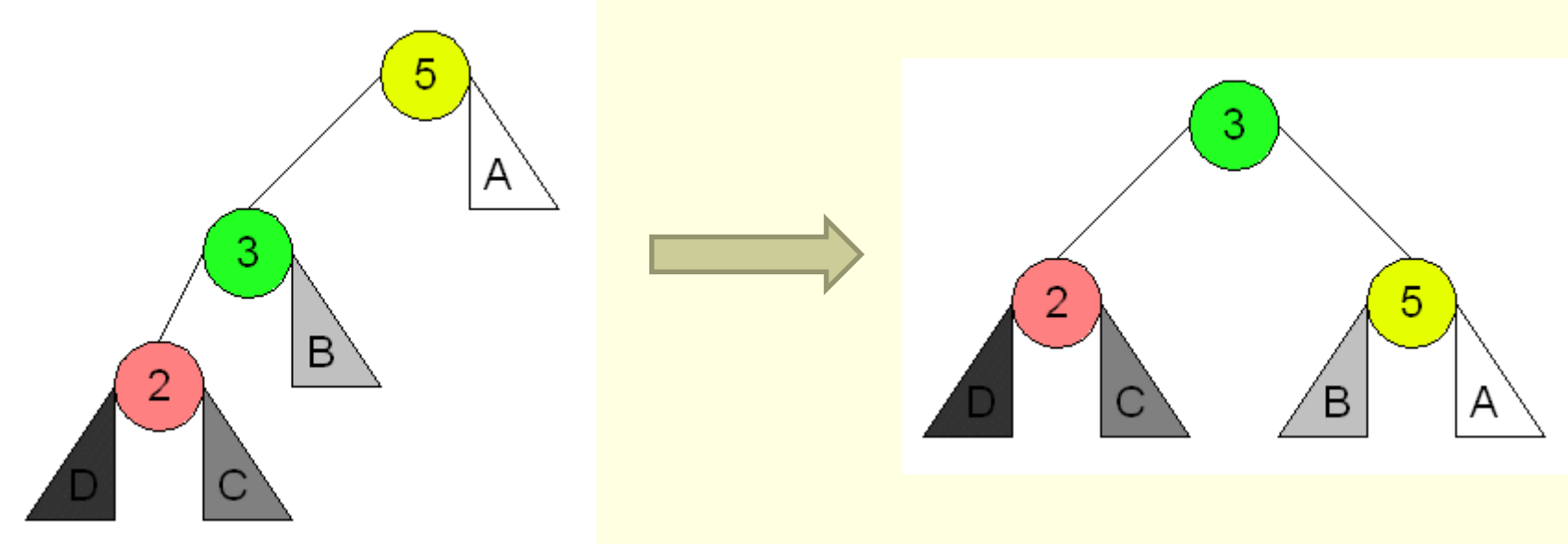
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Tree_Rebalancing.gif

AVL

- Rotação simples à direita

```
void DD(no **r) {
   no *b = *r;
   no *a = b->esq;
   b->esq = a->dir;
   a->dir = b;
   a->fb = 0;
   b->fb = 0;
   *r = a;
}
```

Rotação simples à direita



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Tree_Rebalancing.gif

AVL

- Rotação dupla esquerda-direita

```
void ED(no **r) {
   no *c = *r;
   no *a = c->esq;
   no *b = a->dir;
   c->esq = b->dir;
   a->dir = b->esq;
   b->esq = a;
   b->dir = c;
   switch (b->fb) {
        case -1:
                a->fb = 0;
                c->fb = 1;
                break;
```

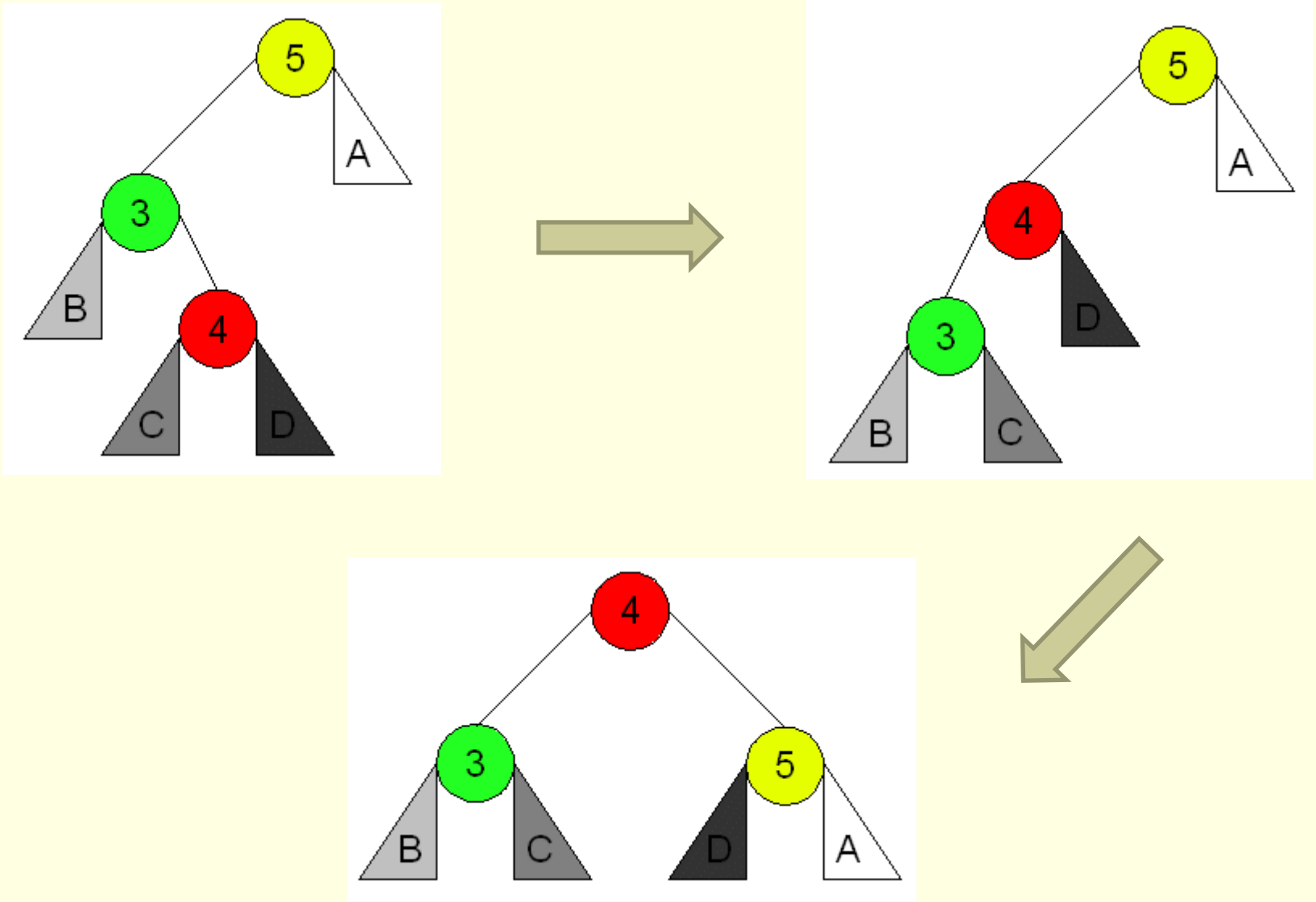
Continua →

AVL

- Rotação dupla esquerda-direita

```
        case 0:
                a->fb = 0;
                c->fb = 0;
                break;
        case 1:
                a->fb = -1;
                c->fb = 0;
                break;
    }
    b->fb = 0;
    *r = b;
}
```

Rotação dupla esquerda-direita



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Tree_Rebalancing.gif

AVL

- Rotação dupla direita-esquerda

```
void DE(no **r) {
   no *a = *r;
   no *c = a->dir;
   no *b = c->esq;
   c->esq = b->dir;
   a->dir = b->esq;
   b->esq = a;
   b->dir = c;
   switch (b->fb) {
        case -1:
                a->fb = 0;
                c->fb = 1;
                break;
```

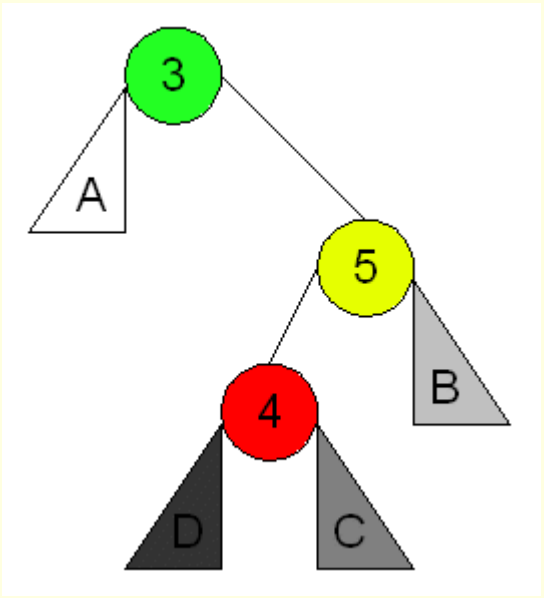
Continua →

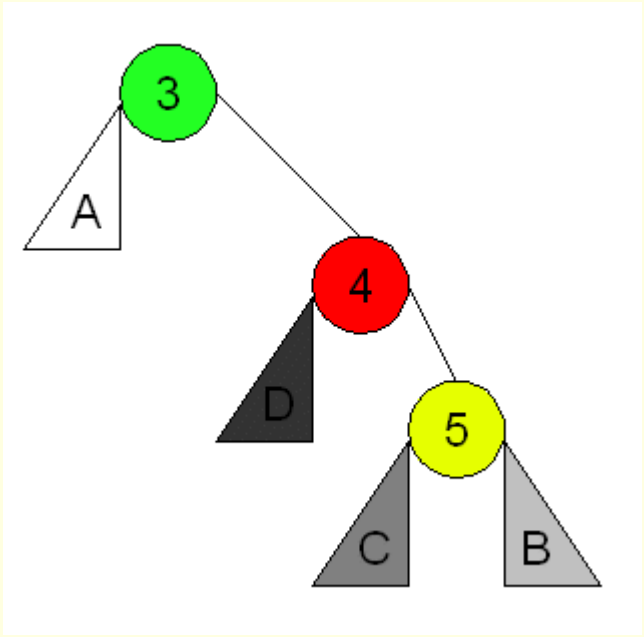
AVL

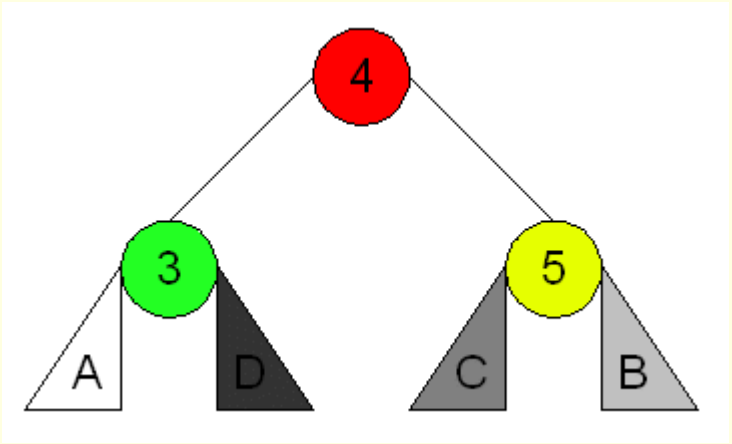
- Rotação dupla direita-esquerda

```
        case 0:
                a->fb = 0;
                c->fb = 0;
                break;
        case 1:
                a->fb = -1;
                c->fb = 0;
                break;
    }
    b->fb = 0;
    *r = b;
}
```

Rotação dupla direita-esquerda







http://en.wikipedia.org/wiki/File:Tree_Rebalancing.gif

AVL

- Inserção

```
int aux_insere(no** p, int x, int *cresceu) {
  if (*p == NULL) {
    *p = (no*) malloc(sizeof(no));
    (*p)->info = x;
    (*p)->fb = 0;
    (*p)->esq = NULL;
    (*p)->dir = NULL;
    *cresceu = 1;
    return 1;
  } else if (x == (*p)->info)
    return 0;
```

Continua →

AVL

- Inserção

```
else if (x < (*p)->info) {
  if (aux_insere(&(*p)->esq, x, cresceu)) {
    if (*cresceu) {
      switch ((*p)->fb) {
        case -1:
          if ((*p)->esq->fb == -1)
            DD(p);
          else
            ED(p);
          *cresceu = 0;
          break;
```

Continua →

AVL

- Inserção

```
        case 0:
          (*p)->fb = -1;
          *cresceu = 1;
          break;
        case 1:
          (*p)->fb = 0;
          *cresceu = 0;
          break;
      }
    }
    return 1;
  } else
    return 0;
```

Continua →

AVL

- Inserção

```
} else {
  if (aux_insere(&(*p)->dir, x, cresceu)) {
    if (*cresceu) {
      switch ((*p)->fb) {
        case -1:
          (*p)->fb = 0;
          *cresceu = 0;
          break;
        case 0:
          (*p)->fb = 1;
          *cresceu = 1;
          break;
```

Continua →

AVL

- Inserção

```
          case 1:
            if ((*p)->dir->fb == 1)
              EE(p);
            else
              DE(p);
            *cresceu = 0;
            break;
        }
      }
      return 1;
    } else
      return 0;
  }
}
```

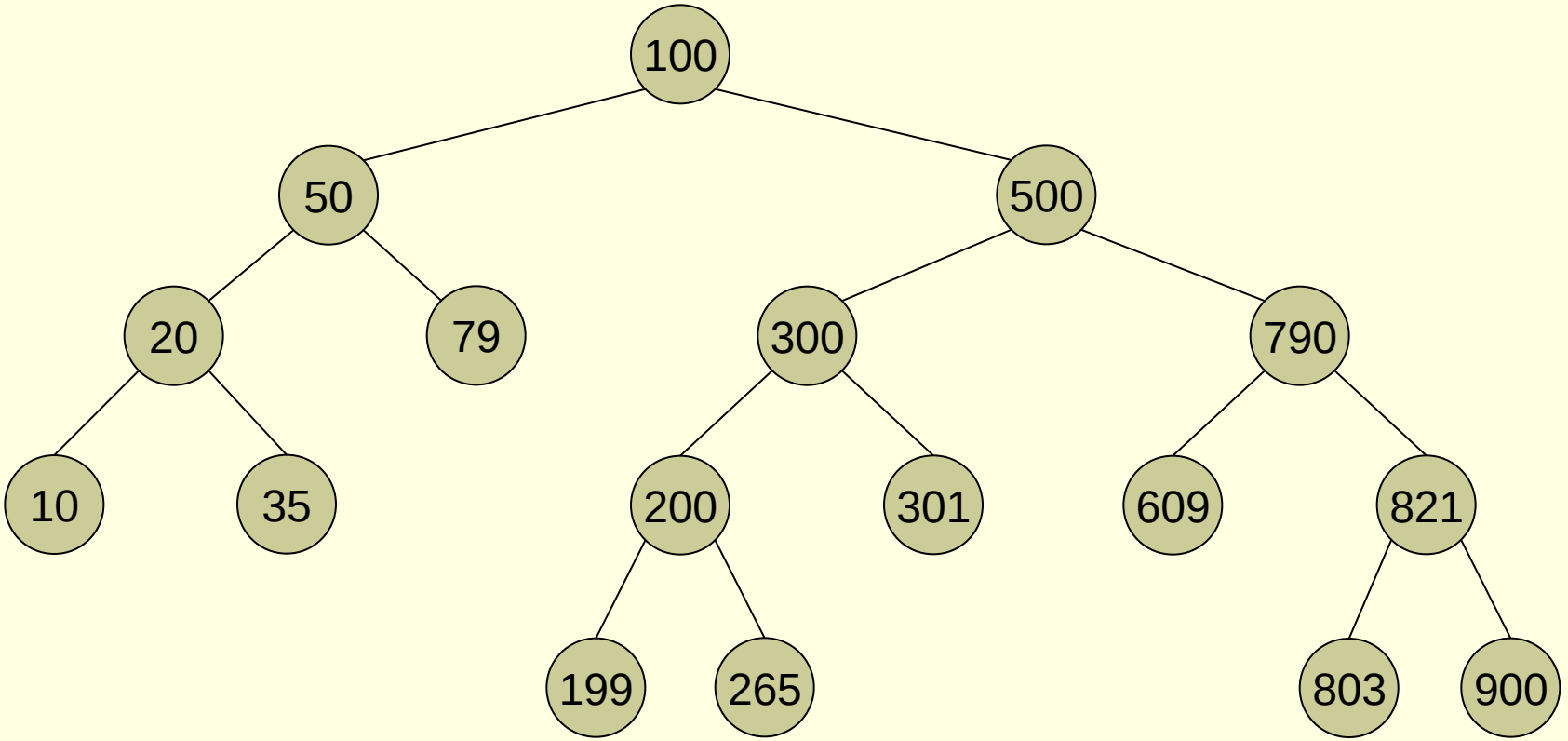
AVL

- Inserção

```
int inserir(no **p, int x) {
   int cresceu;
   return aux_insere(p, x, &cresceu);
}
```

AVL

- Exercício: teste a rotina de inserção inserindo alguns elementos na árvore abaixo



AVL

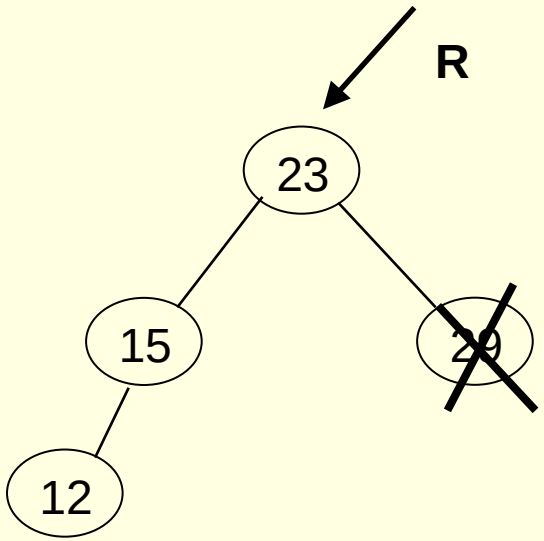
- Exercício
  - Pense no procedimento de remoção de um elemento da AVL e responda
    - Quais são os casos de desbalanceamento?
    - Esboce um método de remoção que balanceie a árvore se necessário

AVL

- Como fazer a remoção de elementos da AVL?

AVL: remoção

- Exemplos

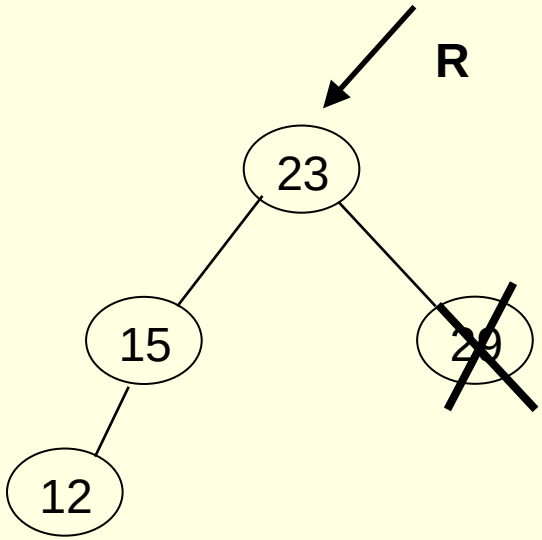


remoção de 29

Como balancear?

AVL: remoção

- Exemplos

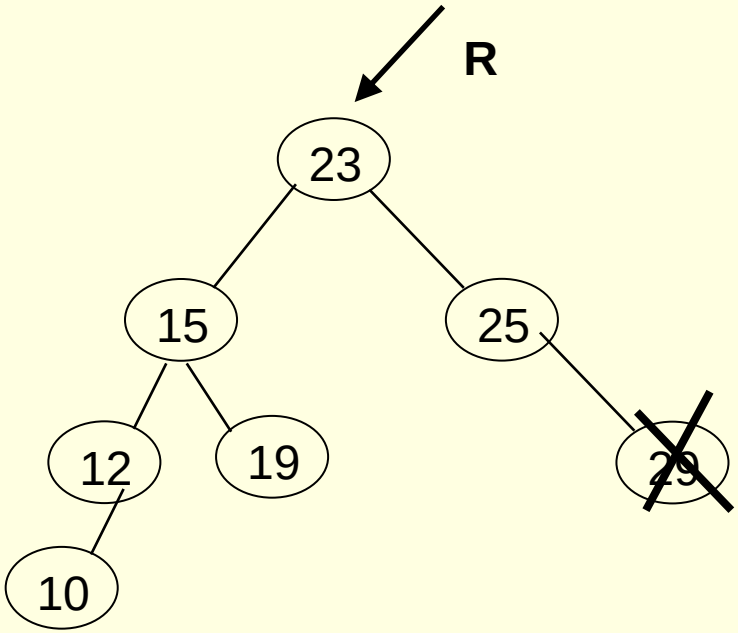


remoção de 29 = inserção de 12

Rotação simples DD

AVL: remoção

- Exemplos

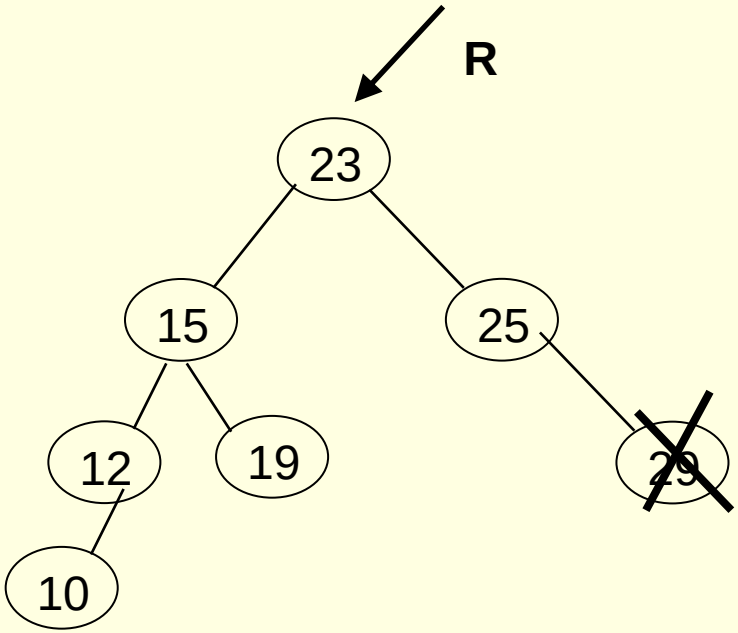


remoção de 29

Como balancear?

AVL: remoção

- Exemplos

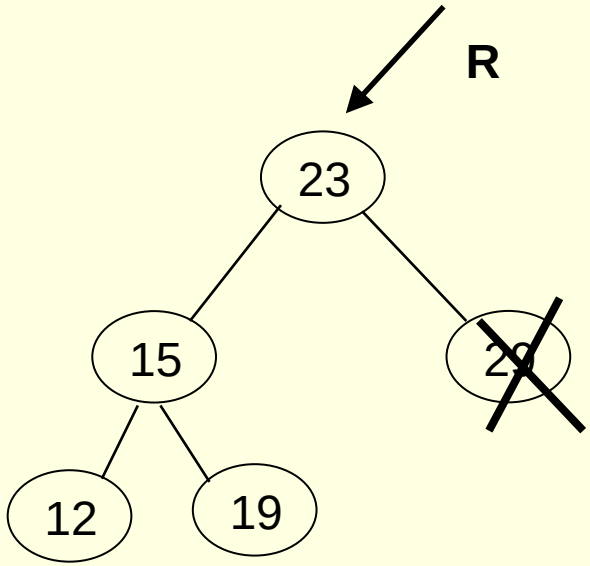


remoção de 29 = inserção de 10

Rotação simples DD

AVL: remoção

- Exemplos

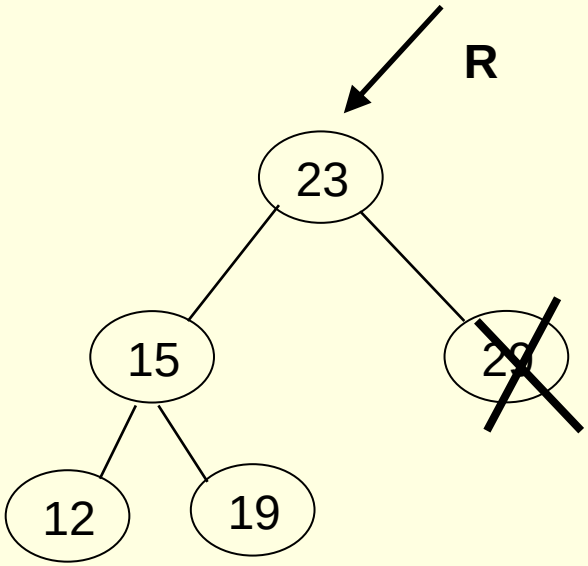


remoção de 29

Como balancear?

AVL: remoção

- Exemplos

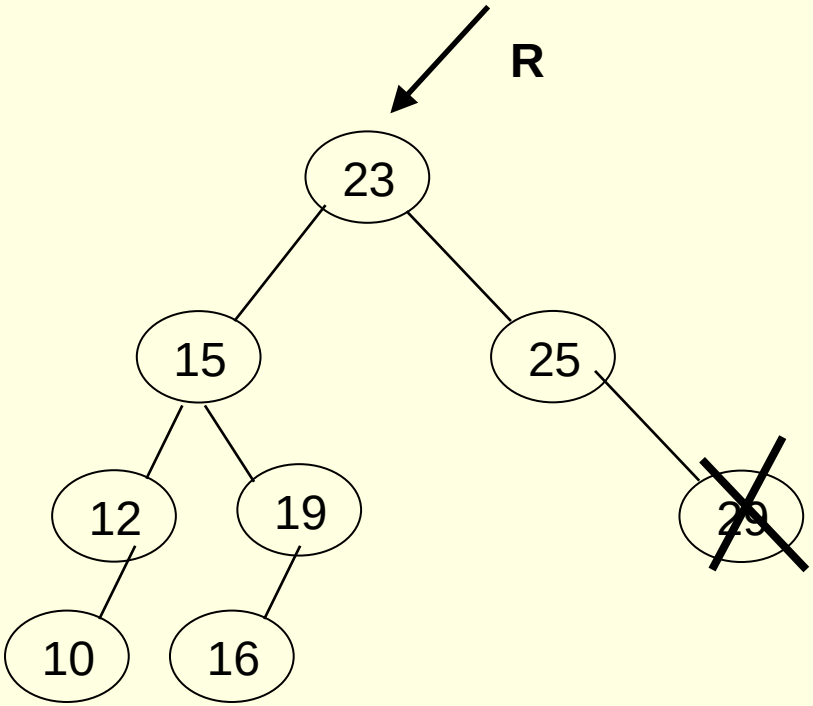


remoção de 29 = inserção de 12 ou19
(desbalanceamento que não aconteceria na inserção)

Rotação simples DD

AVL: remoção

- Exemplos

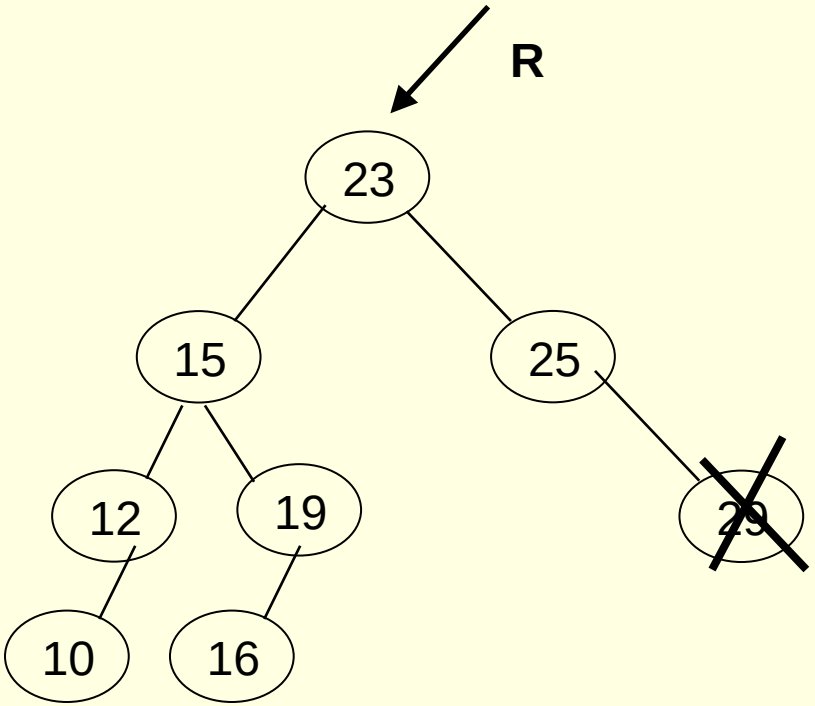


remoção de 29

Como balancear?

AVL: remoção

- Exemplos



remoção de 29 = inserção de 10 ou16
(não aconteceria na inserção)

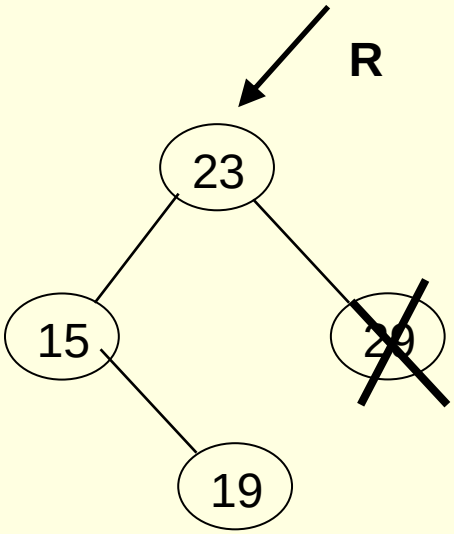
Rotação simples DD

AVL: remoção

- Primeiro caso
  - Rotação simples em R com filho com fator de balanceamento de mesmo sinal ou zero
    - Se FB negativo, rotaciona-se para a direita; caso contrário, para a esquerda

AVL: remoção

- Exemplos

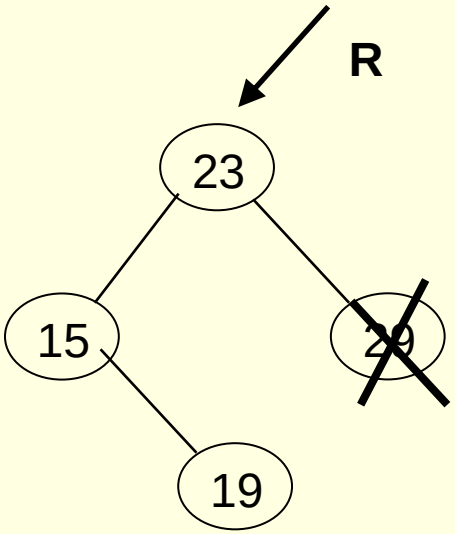


remoção de 29

Como balancear?

AVL: remoção

- Exemplos

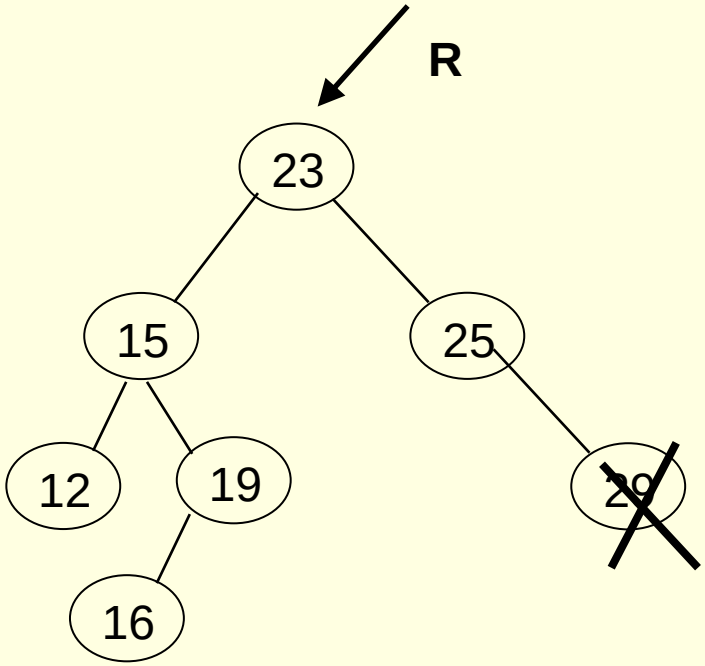


remoção de 29 = inserção de 19

Rotação dupla ED

AVL: remoção

- Exemplos

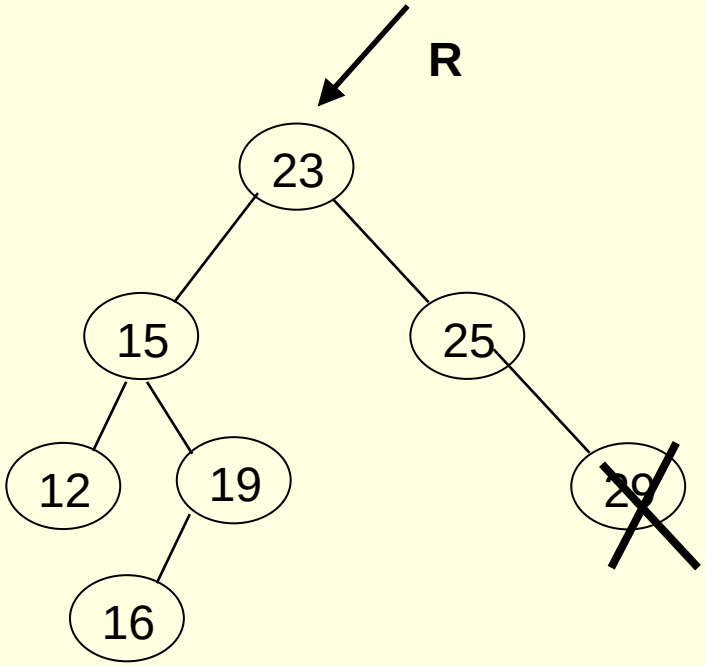


remoção de 29

Como balancear?

AVL: remoção

- Exemplos

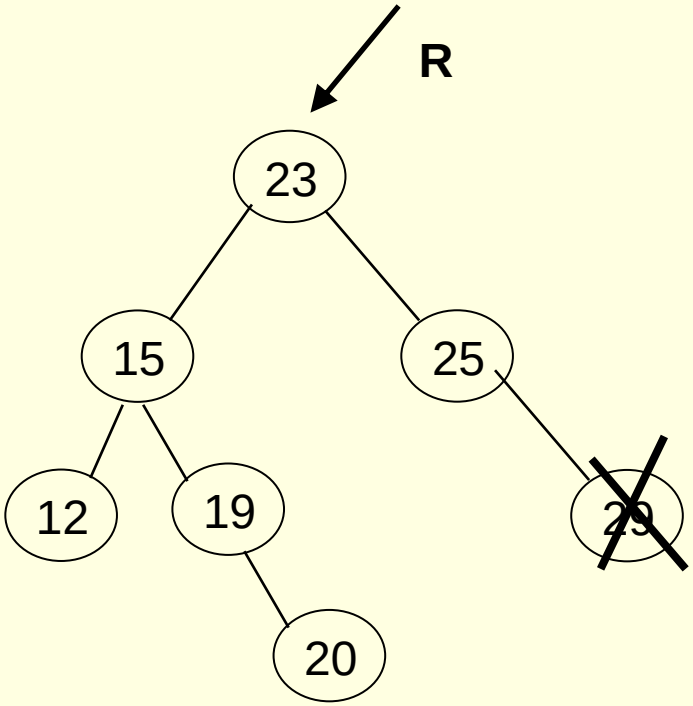


remoção de 29 = inserção de 16

Rotação dupla ED

AVL: remoção

- Exemplos

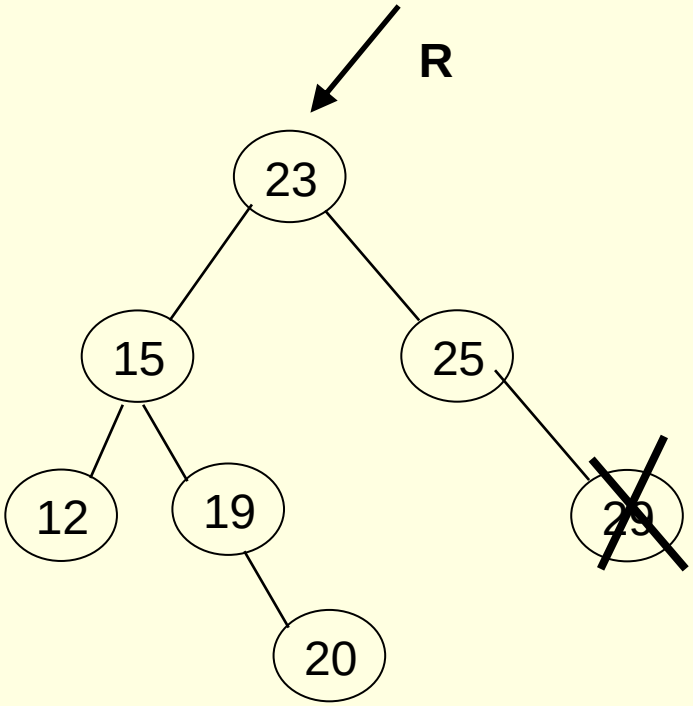


remoção de 29

Como balancear?

AVL: remoção

- Exemplos

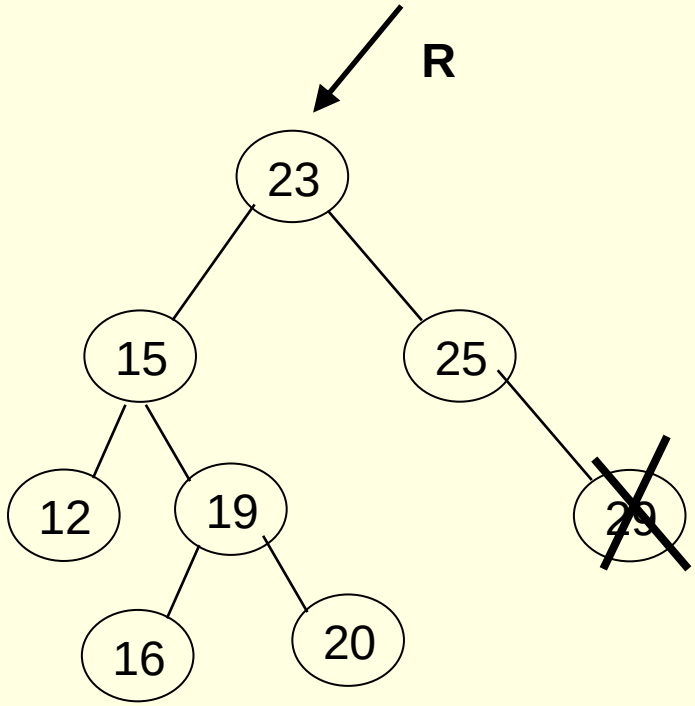


remoção de 29 = inserção de 20

Rotação dupla ED

AVL: remoção

- Exemplos

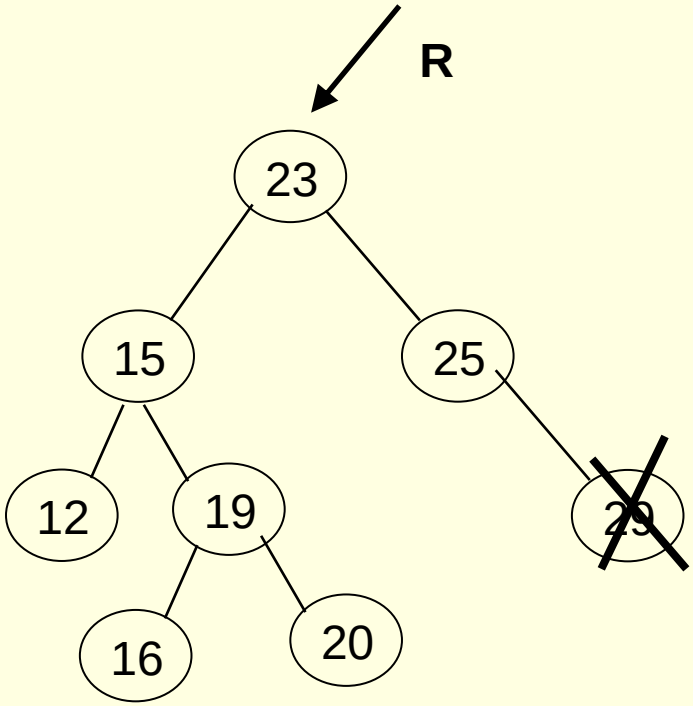


remoção de 29

Como balancear?

AVL: remoção

- Exemplos



remoção de 29 = inserção de 16 ou 20
(não aconteceria na inserção)

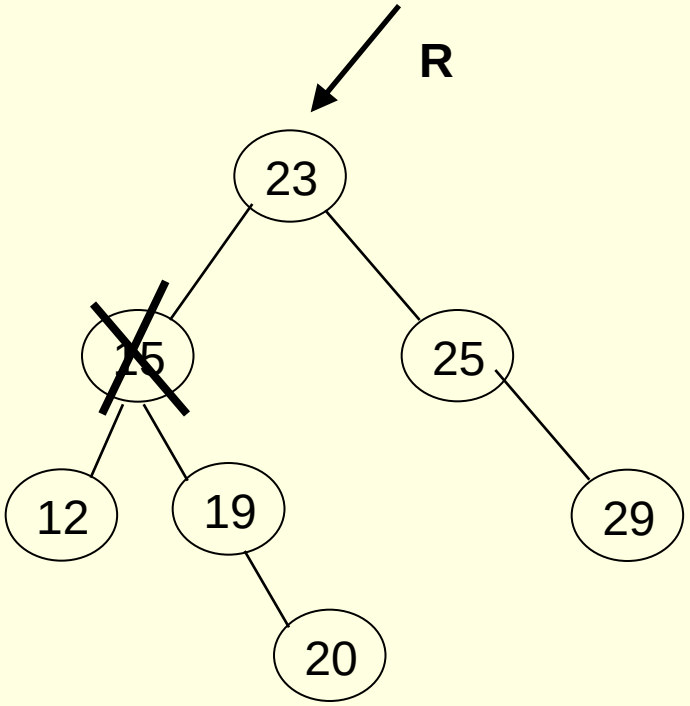
Rotação dupla ED

AVL: remoção

- Segundo caso
  - Rotação dupla quando R e seu filho têm fatores de balanceamento com sinais opostos
    - Rotaciona-se o filho para o lado do desbalanceamento do pai
    - Rotaciona-se R para o lado oposto do desbalanceamento

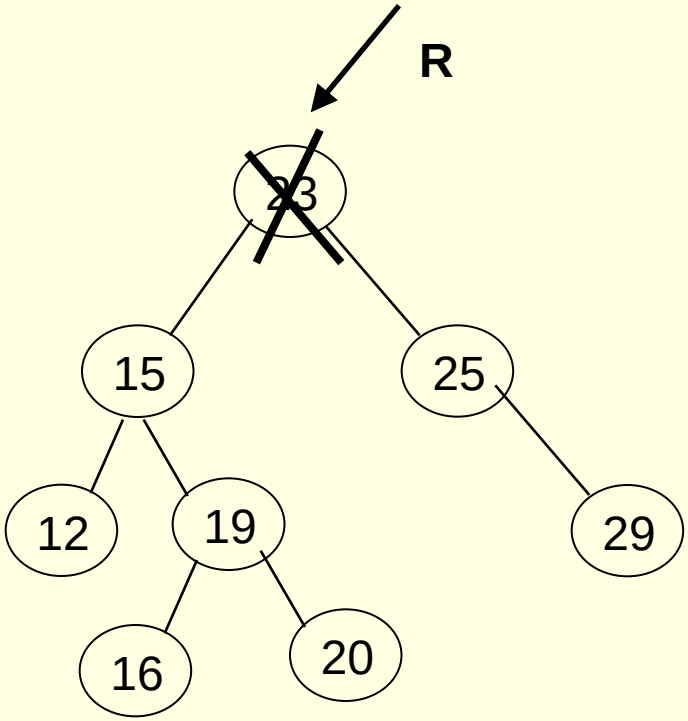
AVL: remoção

- Questão: como remover um nó intermediário em vez de um nó folha?
  - É necessário balancear?



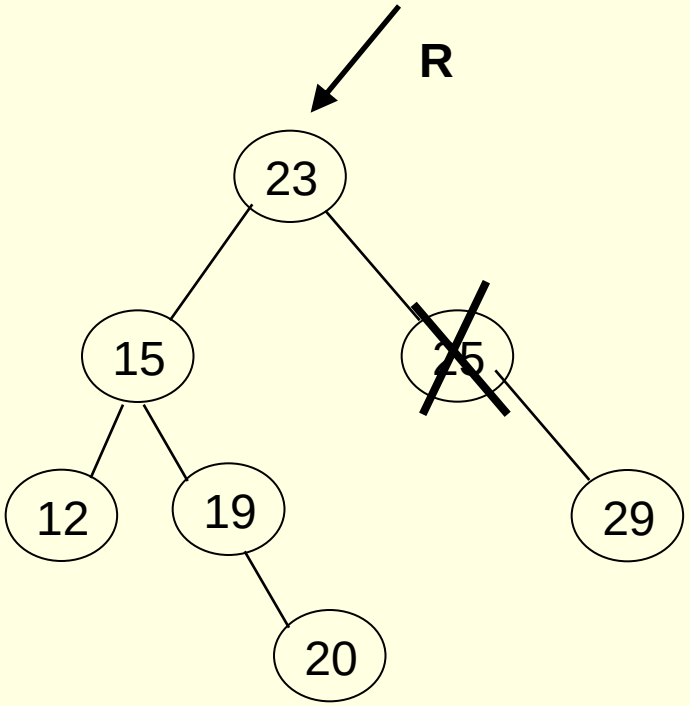
AVL: remoção

- Questão: como remover um nó intermediário em vez de um nó folha?
  - É necessário balancear?



AVL: remoção

- Questão: como remover um nó intermediário em vez de um nó folha?
  - É necessário balancear?



AVL: remoção

- Exercício
  - Esquematizar cada caso
    - Que ponteiros alterar, como atualizar os fatores de balanceamento?
  - Esboçar sub-rotina de remoção de elemento de uma AVL

Créditos

- *Material gentilmente cedido pelo Prof. Thiago A. S. Pardo*