

ICMC – USP  
EST5510 – Tópicos de Teoria Assintótica – 2<sup>o</sup>/2018  
1<sup>a</sup> lista de exercícios

1. Seja  $(a_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de números reais tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2$ . Prove que  $L_1 = L_2$ .
2. Seja  $(a_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de números reais tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ . Prove que
  - (a)  $(a_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência limitada e
  - (b) toda subsequência  $(a_{n_j})_{j \geq 1}$  de  $(a_n)_{n \geq 1}$  converge para  $L$ .
3. Seja  $(a_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de números reais tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ . Prove que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$ .  
Vale a recíproca deste resultado?
4. Suponha que  $(a_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de números reais tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Considere a sequência  $(b_n)_{n \geq 1}$  definida por  $b_n = \min(|a_1|, \dots, |a_n|)$ ,  $n \geq 1$ . Prove que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .
5. Para cada  $n$ ,  $n \geq 1$ , considere  $a_n \in [0, 1]$ . Se  $(b_n)_{n \geq 1}$  e  $(c_n)_{n \geq 1}$  são sequências de números reais tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = b$ , prove que  $(a_n b_n + (1 - a_n) c_n)_{n \geq 1}$  converge para  $b$ .
6. Sejam  $(a_n)_{n \geq 1}$  e  $(b_n)_{n \geq 1}$  sequências de números reais tais e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Prove que
  - (a) se  $a \neq 0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a} = 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,
  - (b) se  $a \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = b$  com  $a_n \neq 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{b}{a}$  e
  - (c) se  $b \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = b$  com  $b_n \neq 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{a}{b}$ .
7. Sejam  $(a_n)_{n \geq 1}$  e  $(b_n)_{n \geq 1}$  sequências de números reais limitadas. Prove que
  - (a)  $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$ ,
  - (b)  $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$ ,
  - (c)  $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$ ,
  - (d)  $\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$ ,
  - (e) se  $c \geq 0$ , então  $\liminf(ca_n) = c \liminf a_n$  e  $\limsup(ca_n) = c \limsup a_n$  e
  - (f) se  $a_n \leq b_n$ , para todo  $n \geq 1$ , então  $\liminf a_n \leq \liminf b_n$  e  $\limsup a_n \leq \limsup b_n$ .
8. Seja  $(a_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de números reais não negativos tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $a > 0$ .  
Prove que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ .  
*Sugestão.* Utilize a relação entre  $\sqrt{a_n} - \sqrt{a}$  e  $a_n - a$ .
9. Suponha que  $(a_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de números reais limitada. Prove que
  - (a)  $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ ,
  - (b) se  $\liminf a_n = \limsup a_n$ , então existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$  e
  - (c) se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existe, então  $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .