

**Exercício 1** (Walpole et al. 9.2 e 9.3 p. 180). Se  $X$  é uma variável aleatória binomial, mostre que

- (a)  $\hat{p}_1 = X/n$  é um estimador não viciado de  $p$ .
- (b)  $\hat{p}_2 = \frac{X + \sqrt{n}/2}{n + \sqrt{n}}$  é um estimador viciado de  $p$ .
- (c) Mostre que o estimador  $\hat{p}_2$  se torna não viciado quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercício 2.** Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma a. a. de uma população com distribuição Poisson( $\theta$ ). Verifique se o estimador  $\bar{X}$  do parâmetro  $\theta$  é não viciado.

**Exercício 3** (Bussab e Morettin 44 p. 329). Para estimar a média  $\mu$  desconhecida de uma população, foram propostos dois estimadores não viesados e independentes  $\hat{\mu}_1$  e  $\hat{\mu}_2$ , de tal forma que  $\text{Var}(\hat{\mu}_1) = \text{Var}(\hat{\mu}_2)/3$ , Considere os seguintes estimadores ponderados de  $\mu$ :

- (a)  $\hat{\mu}_3 = (\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)/2$ .
- (b)  $\hat{\mu}_4 = (4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)/5$ .
- (c)  $\hat{\mu}_5 = \hat{\mu}_1$ .
- (i) Quais dos estimadores  $\hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4$  e  $\hat{\mu}_5$  são não viesados?
- (ii) Disponha esses estimadores em ordem crescente de eficiência.

**Exercício 4.** Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma a. a. de uma população com função densidade de probabilidade

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq \theta < \infty.$$

Encontre o estimador pelo método dos momentos de  $\theta$ .

**Exercício 5** (Bussab e Morettin 12 p. 310). Suponha que  $X$  seja uma v. a. com distribuição normal, com média  $\mu$  e variância 1. Obtenha o EMV de  $\mu$ , para uma amostra de tamanho  $n, X_1, \dots, X_n$ .

**Exercício 6** (Bussab e Morettin 13 p. 310). Considere  $Y$  uma v. a. com distribuição de Poisson, com parâmetro  $\lambda > 0$ . Obtenha o EMV de  $\lambda$ , baseado numa amostra de tamanho  $n$ .

**Exercício 7** (Walpole et al. 9.82 p. 199). Considere uma amostra de  $n$  observações de uma distribuição Weibull com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para  $\alpha, \beta > 0$ .

- (a) Escreva a função de verossimilhança
- (b) Escreva as equações que, quando resolvidas, fornecem os estimadores de máxima verossimilhança de  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Exercício 8** (Walpole et al. 9.85 p. 199). Considere um experimento hipotético no qual um homem com um fungo usa uma droga antifúngica e é curado. Considere isso, então, uma amostra de uma distribuição de Bernoulli com função de probabilidade

$$f(x) = p^x q^{1-x}, x = 0, 1,$$

em que  $p$  é a probabilidade de sucesso (cura) e  $q = 1 - p$ . É claro, a informação da amostra fornece  $x = 1$ . Escreva um desenvolvimento que mostra que  $\hat{p} = 1$  é o estimador de máxima verossimilhança da probabilidade de cura.

**Exercício 9** (Meyer 14.8 p.366). Suponha que  $X$  seja uniformemente distribuído sobre  $(-\alpha, \alpha)$ . determine a estimativa de MV de  $\alpha$ , baseada em uma amostra de tamanho  $n$ .

**Exercício 10** (Meyer 14.4 p.365). Uma variável aleatória  $X$  tem f. d. p.  $f(x) = (\beta + 1)x^\beta, 0 < x < 1$ .

- (a) Calcule o estimador de máxima de verossimilhança de  $\beta$  baseado numa amostra de tamanho  $n$ .
- (b) Calcule a estimativa de MV de  $\beta$  quando os valores amostrais forem: 0,3; 0,8; 0,27; 0,35; 0,62 e 0,55.

**Exercício 11** (Meyer 14.9 p.366). (a) Um procedimento é realizado até que um particular evento  $A$  ocorra pela primeira vez. Em cada repetição,  $P(A) = p$ . Suponha que sejam necessárias  $n_1$  repetições. Depois, esse experimento é repetido e, agora,  $n_2$  repetições são necessárias para produzir-se o evento  $A$ . Se isso foi feito  $k$  vezes, obteremos a amostra  $n_1, \dots, n_k$ . Baseando-se nessa amostra, determine o EMV de  $p$ .

(b) Admita que  $k$  seja bastante grande. Determine o valor aproximado de  $E(\hat{p})$  e  $\text{Var}(\hat{p})$ , em que  $\hat{p}$  é o estimador de MV obtido em (a).

**Exercício 12** (Meyer 14.15 p.367). Suponha que  $X$  tenha uma distribuição gama; isto é, sua f. d. p. seja dada por

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, x > 0.$$

Suponha que  $r$  seja conhecido e seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a. a. de  $X$ . Determine o EMV de  $\lambda$  baseado nesta amostra.

**Exercício 13** (Walpole et al. 9.4 p. 199). Suponha que  $X$  tenha uma distribuição uniforme no intervalo  $(0, \theta)$ , onde  $\theta$  é desconhecido. Uma amostra de  $n$  observações  $X_1, X_2, \dots, X_n$  é retirada. Sabemos que  $E(X) = E(X_i) = \theta/2$  e  $\text{Var}(X) = \text{Var}(X_i) = \theta^2/12$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Logo, se calcularmos a média amostral  $\bar{X}$ , essa deve estar próxima de  $\theta/2$  e podemos estimar  $\theta$  por  $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ .

- (a) Calcule  $E(\hat{\theta})$ .
- (b) Calcule  $EQM(\hat{\theta})$ .
- (c)  $\hat{\theta}$  é consistente? Por quê?

**Exercício 14** (Walpole et al. E.9.4 e 9.8 p. 180). Uma indústria elétrica fabrica lâmpadas com vida útil distribuída aproximadamente normal, com desvio-padrão de 40 horas.

- (a) Se uma amostra de 30 lâmpadas tem média de vida de 780 horas, determine um intervalo de confiança de 96% para a média populacional de todas as lâmpadas produzidas pela empresa.
- (b) Qual deve ser o tamanho da amostra se desejarmos estar 96% confiantes de que nossa média amostral estará dentro das dez horas da média verdadeira?

**Exercício 15** (Walpole et al. E.9.54 e 9.61 p.193). (a) Calcule o intervalo de confiança de 98% para a proporção de itens defeituosos em um processo quando se sabe que uma amostra de tamanho 100 gera oito itens defeituosos. (b) Qual é o tamanho da amostra necessário se desejarmos estar 98% confiantes de que a proporção amostral estará a 0,05 da proporção real de defeituosos?

**Exercício 16** (Walpole et al. E.9.55 p.193). Um novo sistema de lançamentos de foguetes está sendo considerado para a implementação de foguetes pequenos e de certo alcance. O sistema existente tem  $p = 0,8$  como probabilidade de um lançamento bem-sucedido. Uma amostra de 40 lançamentos experimentais como o novo sistema é realizada e 34 obtêm sucesso. Construa um intervalo de confiança de 95% para  $p$ . O sistema é melhor?

---

Algumas respostas: **5**  $\hat{\mu}_{MV} = \bar{x}$ . **6**  $\hat{\lambda}_{MV} = \bar{x}$ . **10**  $\hat{\beta}_{MV} = -1 - n / \sum_{i=1}^n \log x_i$ . **11** (a)  $k / \sum_{i=1}^k n_i$ . **13**  $r/\bar{x}$ . **14** (a) [765,795] (b) 68. **15** (a) [0.017, 0.143] (b) 160.