2ª PROVA - 2024

1. $f(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot(x-\mu)^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0$.

$$L(\mu) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right).$$

$$\ell(\mu) = -\frac{n}{2}\cdot\log(2\pi) - \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$= -\frac{n}{2}\cdot\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + n\mu\bar{x} - \frac{n}{2}\cdot\mu^2.$$

Se $\bar{x} > 0$, obtemos $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ (estimador geral).
em $\Omega = \mathbb{R}$

$$\bar{x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \ell(\mu)}{\partial \mu} = -n\mu < 0. \quad (a)$$

$$\bar{x} < 0 \Rightarrow \frac{\partial \ell(\mu)}{\partial \mu} = n\bar{x} - n\mu < 0. \quad (b)$$

Logo, em (a) e (b), dado $\mu = \mu_1 \in (0,\infty)$, existe $\hat{\mu}_2 \in (0,\mu_1)$ tal que $\ell(\mu_2) > \ell(\mu_1)$. Concluímos que o EMV de μ não existe, pois $\Omega = (0,\infty)$.

EST5802 Inferência Avançada 2024

2ª prova

2. Pode ser consultada a solução do item #7.13, pag. 313 no livro de soluções de *Mathematical Statistics*, 2nd ed., Shao (2003), disponível na página web https://link.springer.com/book/10.1007/0-387-28276-9.

No item 2(c), denotando a função distribuição por $F(x; \beta, \theta)$, temos que $F(X_i; \beta, \theta) \sim$ uniforme(0, 1) independentes, para $i = 1,\dots,n$. Logo, $\Pi_{i=1,\dots,n} F(X_i; \beta, \theta)$ é uma quantidade pivotal para $(\beta, \theta)^\top$.

3. $$f(x) = \frac{\beta\theta^{\beta}}{x^{\beta+1}} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x)$$

(a) $\theta = \theta_0$ conhecido.

$$f(x) = \exp\left(\log(\beta) + \beta \cdot \log(\theta_0) - \beta\log(x) - \log(x)\right) \cdot I_{(\theta_0,\infty)}(x)$$

$$= \exp\left(-\beta \cdot \log(x) + \log(\beta) + \beta\log(\theta_0) - \log(x)\right) I_{(\theta_0,\infty)}(x)$$

$$= \exp\left(-\beta \cdot \log(x) - \{-\log(\beta) - \beta\log(\theta_0)\}\right) \cdot \frac{1}{x} \cdot I_{(\theta_0,\infty)}(x)$$

Família exponencial com $\eta(\beta) = -\beta$ e $T(x) = \log(x)$.

$H_0: \beta \leq \beta_0$ contra $H_1: \beta > \beta_0$.

$\eta(\beta)$ é estritamente decrescente.

Rejeitar H_0 se $\sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \leq c$, ou seja, $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq c^*$,

sendo que $P_{\beta_0}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i \leq c^*\right) = \alpha$.

(b) $\beta = \beta_0$ é conhecido.

$H_0: \theta = \theta_0$ contra $H_1: \theta = \theta_1$, $\theta_1 > \theta_0$

$$f(\underline{x}) = \frac{\beta_0^{n} \cdot \theta^{n\beta_0}}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_0+1}} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})$$

$$L(\theta) = \frac{\beta_0^{n} \cdot \theta^{n\beta_0}}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_0+1}} \times I_{(0,x_{(1)})}(\theta)$$

$$\frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{n\beta_0} \cdot \frac{I_{(0,x_{(1)})}(\theta_1)}{I_{(0,x_{(1)})}(\theta_0)}$$

$$\frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)} \geq K \iff X_{(1)} \geq K^*$$

Obs. vide pag. 3.

$$\frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)} = \begin{cases} \cancel{\frac{0}{0}}, & \text{se } x_{(1)} \leq \theta_0 \\ \frac{0}{1} = 0, & \text{se } \theta_0 < x_{(1)} \leq \theta_1 \\ \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{n\beta_0}, & \text{se } x_{(1)} > \theta_1 \end{cases}$$

3

(c) Considere $H_0: \beta = \beta_0$ contra $H_1: \beta > \beta_0$.
O teste é o mesmo do item 3(a).
A região de aceitação é
$RC^c = \{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) > c\}$.
$A(X) = \{\beta_0 : X \in RC^c\}$ é um conjunto de confiança de $1-\alpha$ para β.

4

$\boxed{4.}$ $\theta = \theta_0$ é conhecido.

$$f(x) = \frac{\beta \theta_0^{\beta}}{x^{\beta+1}} \cdot I_{(\theta_0, \infty)}(x)$$

$$\log(f(x)) = \log(\beta) + \beta \log(\theta_0) - \beta \cdot \log(x) - \log(x), \text{ se } x > \theta_0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} \log(f(x)) = \frac{1}{\beta} + \log(\theta_0) - \log(x) \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log(f(x)) = -\frac{1}{\beta^2}, \text{ que é } < 0.$$

(a) $U(\beta) = \frac{n}{\beta} + n\log(\theta_0) - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$

$U(\beta) = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_n = \frac{1}{\overline{\log(X)} - \log(\theta_0)}$ (EMV de β).

Temos $\mathcal{I}(\beta) = \frac{1}{\beta^2}$. Logo,

$$\sqrt{n} \cdot (\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{D} N(0, \beta^2).$$

(b) $H_0: \beta = \beta_0$ contra $H_1: \beta \neq \beta_0$

Wald: $n(\hat{\beta}_n - \beta_0) \cdot \mathcal{I}(\beta)(\hat{\beta}_n - \beta_0) = \frac{n(\hat{\beta}_n - \beta_0)^2}{\hat{\beta}_n^2}$

Rao: $n\, a_n(\beta_0) \cdot I(\beta_0)^{-1} \cdot a_n(\beta_0)$

$$= n \cdot \left\{\frac{1}{\beta_0} + \log(\theta_0) - \overline{\log(X)}\right\}^2 \cdot \beta_0^2.$$

Ambos têm distribuição assintótica χ_1^2.