SMA0304 - Álgebra Linear - 14a. Lista - 17/11/2012

Exercícios envolvendo isometria e operadores auto-adjuntos

---

1. Faça os exercícios Ex.12.78, Ex. 12.79, Ex. 12.80 da página 194 das notas do Zani.

2. Para cada matriz A, encontre uma matriz ortogonal P tal que P^tAP é diagonal.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 13 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3. Falso ou Verdadeiro? justifique cada resposta.

   (a) Uma matriz $n \times n$ que é ortogonalmente diagonalizável deve ser simétrica.

   (b) Se $A^t = A$ e se os vetores u e v satisfazem $Au = 3u$ e $Av = 4v$, então u e v são ortogonais.

   (c) Uma matriz $n \times n$ simétrica tem n autovalores reais distintos.

   (d) Toda matriz simétrica é ortogonalmente diagonalizável.

   (e) Matrizes ortogonais são ortogonalmente diagonalizáveis.

   (f) A dimensão de um auto-espaço de uma matriz simétrica é igual a multiplicidade algébrica do correspondente autovalor.

4. Prove que se A é uma matriz $n \times n$ ortogonal e u e v são vetores em $\mathbb{R}^n$, então

$$\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle.$$

5. Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica. Prove que A é ortogonal se, e somente se, todos os autovalores de A ou sã 1 ou são -1. (Dica: para uma parte da prova use o exercício anterior. Para a outra parte, diagonalize ortogonalmente para calcular $A^2 = AA^t$.)

6. (Aplicação do teorema espectral para matrizes simétricas: formas quadráticas)

   Escreva a forma quadrática $q = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$ na forma matricial $q = X^tAX$ em que A é uma matriz simétrica.

   Use o fato que A é diagonalizável, para obter uma matriz ortogonal P tal que $P^tAP = D$, onde D é uma matriz diagonal.

   Agora defina uma nova variável $Y = P^tX$, equivalente a $X = PY$. Substitua na equação $q = X^tAX$ para obter a expressão de q nas novas variaáveis $Y = (y_1y_2y_3)^t$ uma expressão mais simples sem os termos cruzados x_1x_2, x_2x_3. Dizemos que a forma quadrática q foi diagonalizada. (Resposta: $q = y_2^2 + 3y_3^2$.)

   As colunas de P são chamadas os eixos principais da forma quadrátrica $q = X^tAX$.

7. Em cada caso, encontre uma mudança de variáveis que irá diagonalizar a forma quadrática e expresse-a função dessas novas variáveis.

   (a) $q = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$

   (b) $q = 5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$

8. Use o exercício 6 para resolver a seguinte questão: Considere a forma quadrática $q = ax_1^2 + bx_1^2 + cx_2^2$.

   (a) Existe uma rotação dos eixos coordenados em torno da origem (uma matriz ortogonal P) tal que q tem a forma $q = ry_1^2 + sy_2^2$ nas novas variáveis y_1 e y_2.

   (b) Use o item anterior e o fato que $detP^tAP = detD$, para mostrar que o gráfico de equação $ax_1^2 + bx_1^2 + cx_2^2 = 1$ é uma elipse se $b^2 - 4ac < 0$ e é uma hipérbole se $b^2 - 4ac > 0$.

9. Seja A uma matriz $n \times n$. Definimos que a forma quadrática $q = X^tAX$ é

   - positiva definida se $q = X^tAX > 0$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$,
   - negativa definida se $q = X^tAX < 0$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$,
   - indefinida se $q = X^tAX$ assume valores positivos e negativos.

   Mostre que se A uma matriz $n \times n$ simétrica, então $q = X^tAX$ é

   - positiva definida se e somente se os autovalores de A são todos positivos,
   - negativa definida se e somente se os autovalores de A são todos negativos,
   - indefinida se A tem autovalores positivos e negativos.

   Classifique as formas quadrátricas dos exercícios 6 e 7.