Algoritmos e Estruturas de Dados II

Grafos II:

Estruturas de Dados

Ricardo J. G. B. Campello

Parte deste material é baseado em adaptações e extensões de slides disponíveis em http://ww3.datastructures.net (Goodrich & Tamassia).

Organização

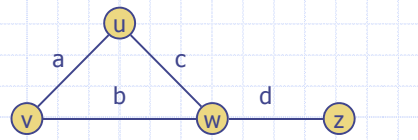
- TAD Grafo
- Estruturas de Dados para Grafos
  - Lista de Arestas
  - Lista de Adjacências
  - Matriz de Adjacências
- Análise Assintótica Comparativa
  - Desempenhos das Principais Operações do TAD
- Exemplo de Implementação Simples
  - Código C de uma ED Alternativa

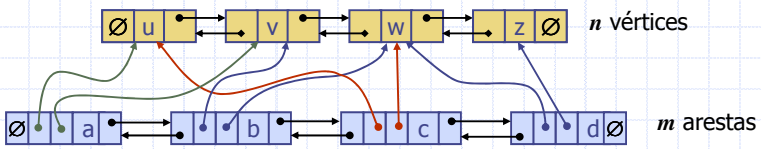
TAD Grafo

- **Dados:** vértices e arestas
  - relações de incidência
  - elementos armazenados
- **Operações** (Gerais):
  - endVertices(G, e): retorna os dois vértices finais da aresta **e** (e.g. arranjo c/ 2 elementos).
  - opposite(G, v, e): retorna o vértice oposto a **v** na aresta **e**.
  - areAdjacent(G, v, w): verdadeiro se e somente se os vértices **v** e **w** forem adjacentes.
  - replaceVertex(G, v, x): substitui o elemento do vértice **v** por **x**.
  - replaceEdge(G, e, x): substitui o elemento da aresta **e** por **x**.
- **Operações** (de Atualização):
  - insertVertex(G, o): insere um novo vértice isolado, armazenando nele o elemento **o**, e retorna uma referência.
  - insertEdge(G, v, w, o): insere uma aresta (**v**,**w**), armazenando nela o elemento **o**, e retorna uma referência.
  - removeVertex(G, v): remove o vértice **v** (e suas arestas incidentes) e retorna o elemento armazenado nele.
  - removeEdge(G, e): remove aresta **e**, retornando o elemento armazenado.
- **Operações** (para Iteradores):
  - incidentEdges(G, v): retorna iterador das arestas incidentes em **v**.
  - vertices(G): retorna iterador dos vértices do grafo G.
  - edges(G): retorna iterador das arestas do grafo G.

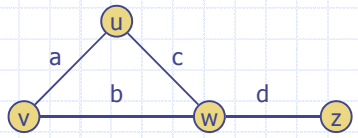
Nota: Métodos Específicos podem ser Adicionados para Grafos Direcionados

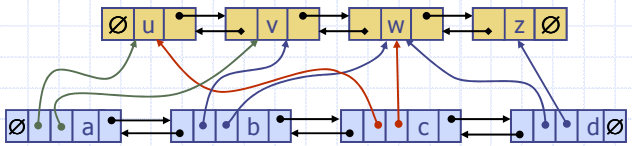
Estrutura de Dados – Lista de Arestas





Lista de Arestas

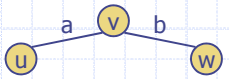


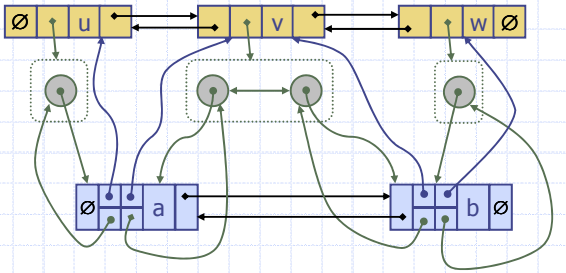


- Principais Desvantagens:
  - Verificar as arestas incidentes em um dado vértice v demanda percorrer toda a lista de arestas
    - Operação incidentEdges(G, v) do TAD é $O(m)$
  - O mesmo vale para checar se dois vértices v e w são adjacentes, bem como para remover um dado vértice v
    - Operação areAdjacent(G, v, w) do TAD é $O(m)$
    - Operação removeVertex(G, v) do TAD é $O(m)$

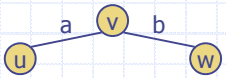
Estrutura de Dados - Lista de Adjacências

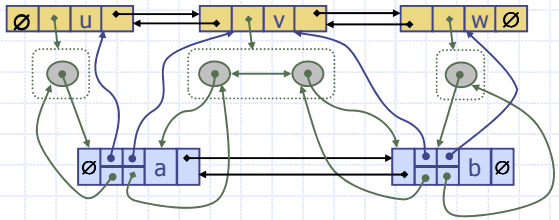
- A cada elemento da lista de vértices é adicionado um ponteiro para uma lista de incidências:
  - lista de ponteiros para suas arestas incidentes.
- A cada elemento da lista de arestas são adicionados ponteiros para as posições correspondentes nas listas de incidência dos seus vértices.





Lista de Adjacências

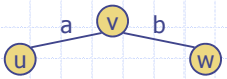


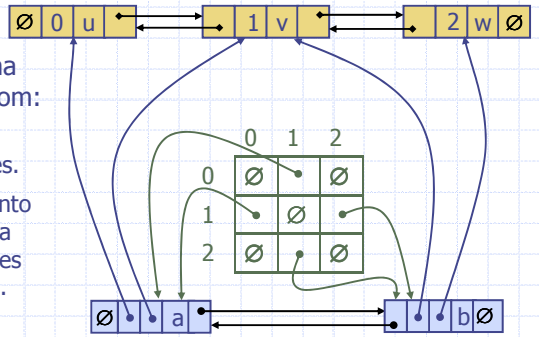


- A partir de um vértice v, podemos acessar suas arestas incidentes em tempo proporcional ao seu número:
  - incidentEdges(G, v) do TAD é $O(\deg(v))$
  - removeVertex(G, v) do TAD é $O(\deg(v))$
- Podemos verificar se dois vértices v e w são adjacentes percorrendo a menor dentre as respectivas listas auxiliares de incidência:
  - areAdjacent(G, v, w) do TAD é $O(\min(\deg(v), \deg(w)))$

Estrutura de Dados – Matriz de Adjacências

- A cada elemento da lista de vértices é adicionada:
  - Uma chave (índice) associada ao vértice.
- Acrescenta-se ainda uma matriz de adjacências com:
  - Nulo nas posições de vértices não adjacentes.
  - Ponteiro para o elemento correspondente da lista de arestas, nas posições de vértices adjacentes.



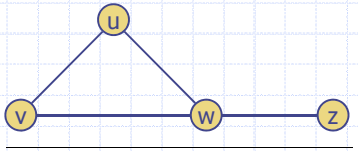


Desempenho Assintótico das Principais Operações do TAD

◆ Grafo **simples** com n vértices e m arestas ◆ Notação *Big O*	Lista de Arestas	Lista de Adjacências	Matriz de Adjacências
Espaço (memória)	$n + m^*$	$n + m^*$	$n^2 + m$
incidentEdges(G, v)	m	deg(v)	n
areAdjacent(G, v, w)	m	min(deg(v), deg(w))	1
insertVertex(G, o)	1	1	n^{2*}
insertEdge(G, v, w, o)	1	1	1
removeVertex(G, v)	m	deg(v)	n^{2*}
removeEdge(G, e)	1	1	1

Implementação Simples: Estrutura Alternativa (Skiena & Revilla, 2003)

- Vértices rotulados:
  - Chaves (índices) são associadas aos vértices
- Arestas sem elementos.
- Grafos estáticos, ou:
  - Inserções e remoções sem redimensionamento das matrizes e vetores
  - Matrizes e vetores super-dimensionados para:
    - No. de vértices (MAXV)
    - Grau (MAXDEGREE)



	v	u	w	z
	0	1	2	3	4

vertices

edges

0			
1	3	2	
2	1	3	
3	1	2	4
4	3		
	0	1	2

MAXDEGREE

degree

0	
1	2
2	2
3	3
4	1

MAXV

Estrutura Alternativa (Skiena & Revilla, 2003)

```
/*  graph.h */

#define MAXV          100      /* maximum number of vertices */
#define MAXDEGREE     50       /* maximum outdegree of a vertex */

typedef struct {
    int edges[MAXV+1][MAXDEGREE]; /* adjacency info */
    int degree[MAXV+1];
    int nvertices;
    int nedges;
} graph;
```

```
#include "graph.h"
initialize_graph(graph *g) {
    int i,j;  /* counters */

    g -> nvertices = 0;
    g -> nedges = 0;

    for (i=1; i<=MAXV; i++) {
        g->degree[i] = 0;
        for (j=0; j < MAXDEGREE; j++)
            g->edges[i][j] = 0;
    }
}
```

Nota: Como as arestas não são representadas explicitamente, essa estrutura não permite a implementação das operações endVertices, opposite e replaceEdge do TAD Grafo.

Estrutura Alternativa (Skiena & Revilla, 2003)

```
#include "bool.h"
#include "graph.h"

read_graph(graph *g, bool directed) {
    int i;          /* counter */
    int x, y;       /* vertices in edge (x,y) */

    initialize_graph(g);

    scanf("%d %d",&(g->nvertices),&(g->nedges));

    for (i=1; i<=g->nedges; i++) {
        scanf("%d %d",&x,&y);
        insert_edge(g,x,y,directed);
    }
}
```

```
/*  bool.h */

#define TRUE     1
#define FALSE    0

typedef int bool;
```

Estrutura Alternativa (Skiena & Revilla, 2003)

```
insert_edge(graph *g, int x, int y, bool directed) {
    if (g->degree[x] > MAXDEGREE)
        printf("Warning: insertion(%d,%d) exceeds max degree\n",x,y);

    g->edges[x][g->degree[x]] = y;
    g->degree[x] ++;

    if (directed == FALSE) insert_edge(g,y,x,TRUE);
    else g->nedges ++;
}
```

Duas arestas direcionadas, (x,y) e (y,x), representando uma aresta não-direcionada

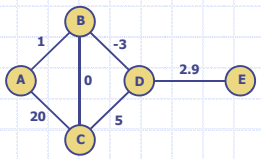
```
delete_edge(graph *g, int x, int y, bool directed) {
    int i;                  /* counter */
    for (i=0; i<g->degree[x]; i++)
        if (g->edges[x][i] == y) {
            g->degree[x] --;
            g->edges[x][i] = g->edges[x][g->degree[x]];
            if (directed == FALSE)
                delete_edge(g,y,x,TRUE);
            return;
        }
    printf("Warning: deletion(%d,%d) not found in g.\n",x,y);
}
```


Exercícios

1. Na implementação simples de grafo em C discutida em aula, não se incluiu na estrutura principal (`struct graph`) um vetor `vertices` para armazenar os elementos dos vértices. Modifique essa estrutura de tal forma que esse vetor seja contemplado. Nota: Considere que os elementos nos vértices são strings com no máx. 30 caracteres e que vértices inexistentes armazenam nulo (\0).
2. Na implementação simples de grafo em C discutida em aula, foram apresentadas as rotinas correspondentes às operações insertEdge e removeEdge do TAD Grafo (rotinas `insert_edge` e `delete_edge`). Já considerando a modificação no código realizada no Exercício 1, implemente as rotinas correspondentes às seguintes operações:
   - areAdjacent, replaceVertex, removeVertex, insertVertex
   - Nota: Após remover um vértice, é preciso remover todas as suas arestas incidentes (em ambos os sentidos, para arestas não direcionadas), o que implica reestruturar a matriz `edges` de forma apropriada. Pode-se aproveitar essa reestruturação para preencher o espaço deixado pelo vértice removido e permitir que inserções sejam feitas sempre ao final.

Exercícios

3. Represente graficamente o grafo abaixo em cada uma das três diferentes estruturas de dados clássicas discutidas em aula:
   - lista de arestas, lista de adjacências e matriz de adjacências



4. Ignore os pesos das arestas e repita o exemplo anterior para a estrutura alternativa também discutida. Nesse caso, represente o conteúdo da matriz `edges` e dos vetores `degree` e `vertices`.
5. Elabore alguns diferentes grafos e repita os Exercícios 3 e 4.
6. Explique a razão de cada uma das complexidades computacionais da tabela do slide 9, além daquelas que foram discutidas.

Referências

- M. T. Goodrich and R. Tamassia, *Data Structures and Algorithms in C++/Java*, John Wiley & Sons, 2002/2005.
- N. Ziviani, Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.
- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2nd Edition, 2001.
- S. Skiena e M. Revilla, *Programming Challenges: The Programming Contest Training Manual*, Springer-Verlag, 2003.