PIPGEs ICMC – USP/UFSCar
EST5102 – Inferência Estatística – 2024/1
3ª lista de exercícios

1. Considere $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de cada uma das distribuições abaixo. Apresente os respectivos estimadores de máxima verossimilhança.

   (a) $\mathsf{gama}(\alpha, \beta)$, α conhecido,

   (b) $\mathsf{gama}(\alpha, \beta)$, β conhecido,

   (c) $\mathsf{gama}(\alpha, \beta)$ e

   (d) $\mathsf{beta}(\alpha, \beta)$.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{uniforme}([-\theta, \theta])$, $\theta > 0$.

   (a) Apresente um estimador de θ pelo método de máxima verossimilhança.

   (b) Apresente um estimador de θ pelo método dos momentos.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{uniforme}([\theta - 1/2, \theta + 1/2])$, $\theta \in \mathbb{R}$. Apresente um estimador de θ pelo método de máxima verossimilhança. Existe um único estimador?

4. Sendo $X_1 \sim \mathsf{normal}(\mu, \sigma^2)$, prove que não existem estimadores de máxima verossimilhança de μ e σ^2.

5. Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} f(\cdot; \theta)$, em que $f(x; \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$, $0 < \theta \leq 1/2$. Apresente (e comente) estimadores de θ utilizando os métodos dos momentos e de máxima verossimilhança.

6. Suponha que tempos de falha de um componente (X, em meses) seguem distribuição $\mathsf{exponencial}(\theta)$. Foi coletada uma amostra aleatória de $X_1, \ldots, X_n$.

   (a) Apresente dois estimadores de θ pelo método dos momentos.

   (b) Apresente o estimador de máxima verossimilhança de $P_\theta(X_1 \geq 1)$.

7. Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} f(\cdot; \boldsymbol{\theta})$, em que $f(x; \boldsymbol{\theta}) = \sigma^{-1} \exp\{-(x - \mu)/\sigma\}\, I_{[\mu, \infty)}(x)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)^\top$.

   (a) Encontre estimadores de máxima verossimilhança de μ e σ.

   (b) Proponha um estimador para $P_{\boldsymbol{\theta}}(X_1 \geq t)$, $t > \mu$.

8. Sejam $X_1, \ldots, X_m \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}(\mu_X, \sigma^2)$ e $Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}(\mu_Y, \sigma^2)$ amostras independentes. Encontre estimadores de máxima verossimilhança de μ_X, μ_Y e σ^2.

9. Considere $X_i \overset{\text{indep.}}{\sim} \mathsf{normal}(\mu, \sigma^2 + \kappa_i)$, $\kappa_i > 0$, κ_i conhecida, $i = 1, \ldots, n$.

   (a) Proponha estimadores de μ e σ^2 pelos métodos dos momentos e de máxima verossimilhança.

   (b) Aplique os resultados do item anterior aos dados da amostra

   $$\boldsymbol{x} = (4,2; 5,7; 5,3; 9,6; 14,0; 7,1; 14,9; 9,1; 4,6; 1,3; 8,4; 4,1; 6,1; 3,0; 9,9; \\ 4,1; 9,7; 12,4; 11,4; 4,9)^\top,$$

   sendo que

   $$\boldsymbol{\kappa} = (2,7; 1,5; 3,6; 2,9; 0,9; 3,1; 4,7; 3,8; 2,1; 2,1; 3,0; 4,2; 5,9; 3,6; 3,1; \\ 2,5; 3,2; 0,9; 4,3; 2,9)^\top.$$

10. Uma amostra aleatória é obtida de uma distribuição $\mathsf{Poisson}(\theta)$, mas os valores nulos não são registrados. Dizemos que a distribuição é truncada na origem ou em 0.

    (a) Apresente um estimador de θ por máxima verossimilhança.

    (b) Com base nas observações $\boldsymbol{x} = (5, 7, 2, 6, 3, 2, 4, 4, 1, 5)^\top$, apresente uma estimativa para θ.

11. Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}(\theta, |\theta|)$, $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

    (a) Apresente o estimador de máxima verossimilhança de θ.

    (b) Apresente estimadores de momentos para θ usando os dois primeiros momentos.

    (c) Selecione o verdadeiro valor de θ $(= \theta_0)$ e o tamanho da amostra, gere uma amostra aleatória, represente graficamente a função log-verossimilhança $\ell(\theta)$ e verifique a solução obtida no item 11a.