

USP – ICMC – SME0806 - Estatística Computacional
6º trabalho – 1º/2016

Muitas análises de dados contínuos são baseadas na distribuição normal. É conhecido que os resultados de inferências obtidos com a distribuição normal são sensíveis à presença de observações atípicas nos dados. Nesta situação, a distribuição t de Student é uma alternativa à distribuição normal.

Uma variável aleatória Y tem distribuição t de Student com vetor de parâmetros $\theta = (\mu, \sigma^2, \nu)$ se sua função densidade de probabilidade é

$$f(y; \theta) = \frac{c(\nu)}{\sigma} \left\{ 1 + \frac{(y - \mu)^2}{(\nu - 2)\sigma^2} \right\}^{-(\nu+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

em que $\nu > 2$, $\mu = E(Y)$, $\sigma^2 = \text{var}(Y)$,

$$c(\nu) = \frac{1}{\{(\nu - 2)\pi\}^{1/2}} \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\Gamma(\nu/2)}$$

e $\Gamma(\cdot)$ denota a função gama. O parâmetro ν é chamado de graus de liberdade.

Pode ser provado que vale a representação hierárquica

$$Y|Z = z \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2/z) \quad \text{e} \quad Z \sim \text{gama}(\nu/2, (\nu - 2)/2), \quad (2)$$

em que a distribuição $\text{gama}(a, b)$ tem média a/b . Se $Z = 1$, então a distribuição de Y é normal. Além disso,

$$Z|Y = y \sim \text{gama}\left(\frac{\nu + 1}{2}, \frac{\nu - 2 + (y - \mu)^2/\sigma^2}{2}\right). \quad (3)$$

1. A estimação de θ a partir da função verossimilhança obtida de (1) para uma amostra aleatória Y_1, \dots, Y_n não é tão simples. Para um valor de ν fixado, utilize os resultados em (2) e (3) para propor um processo de estimação de μ e σ^2 .
2. No item 1, interprete o papel de z_1, \dots, z_n .
3. A estimação de θ pelo método de máxima verossimilhança pode ser efetuada repetindo o esquema do item 1 fazendo ν variar no conjunto $\{3, 4, \dots, \nu_{\max}\}$. Apresente os detalhes.
4. Os dados abaixo representam a razão entre vendas e ativos de 26 empresas no ano de 1992. Utilizando um gráfico adequado, o que pode ser afirmado sobre o ajuste com a distribuição normal?

0,17 0,15 0,08 0,08 1,52 0,09 0,08 0,28 0,08 0,09 1,82 0,09 0,08
0,26 0,09 0,09 0,07 0,10 0,08 0,14 0,08 0,16 0,12 0,17 0,23 0,10

5. Ajuste a distribuição t de Student aos dados do item 4 e apresente as estimativas dos parâmetros.
6. Utilize a interpretação do item 2 para discutir os resultados do ajuste.