Dantas (1997), Ex. 25, p. 154

Defina as v.a. X: nº de eventos que ocorrem e Y: nº de eventos contados.

Pelo enunciado, X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ e $Y|X=x$ tem distribuição binomial com parâmetros x e θ, sendo que $x \geq y$ e $y \in \{0,1,2,\dots\}$.

Calculamos

$$P(Y=y) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X=x, Y=y) = \sum_{x=y}^{\infty} P(X=x) \cdot P(Y=y|X=x)$$

$$= \sum_{x=y}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \cdot \binom{x}{y} \theta^y (1-\theta)^{x-y} = e^{-\lambda}\,\theta^y \sum_{x=y}^{\infty} \binom{x}{y} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot (1-\theta)^{x-y}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\theta^y}{(1-\theta)^y} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{\cancel{x!}}{y!(x-y)!} \cdot \frac{\lambda^x}{\cancel{x!}} \cdot (1-\theta)^x$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\theta^y}{(1-\theta)^y\, y!} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{\{\lambda(1-\theta)\}^x}{(x-y)!} \overset{u=x-y}{=} \frac{e^{-\lambda}\theta^y}{(1-\theta)^y\, y!} \cdot \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\{\lambda(1-\theta)\}^{u+y}}{u!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\theta^y}{\cancel{(1-\theta)^y}\, y!} \cdot \lambda^y \cancel{(1-\theta)^y} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\{\lambda(1-\theta)\}^u}{u!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}(\lambda\theta)^y}{y!} \cdot e^{\lambda(1-\theta)} = \frac{e^{-\lambda\theta} \cdot (\lambda\theta)^y}{y!}.$$

Logo, Y tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda\theta$.