

Exercício 1. Resolver exercícios de Johnson and Wichern (2007), disponíveis na Coteia WIKI:

- 3.13, 3.16, 3.17, 3.20 pág 146-148
- 4.1, 4.3, 4.4, 4.8, 4.9, 4.17, 4.19, 4.22, 4.29, 4.39, 4.40, pág 200-208

Exercício 2. Seja $\underline{X} \sim N_p(0, \sigma^2 I)$, com $\sigma^2 > 0$ e I a matriz identidade de ordem p . Mostre que $A\underline{X}$ e $(I - A^-) \underline{X}$ são independentes e que cada uma tem distribuição normal. A matriz A^- é a **inversa generalizada** de A , que satisfaz $AA^-A = A$.

Exercício 3. Seja $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ e \underline{a} um vetor fixo qualquer de dimensão p . Mostre que

$$Z = \frac{\underline{a}'(\underline{X} - \underline{\mu})}{\sqrt{\underline{a}'\Sigma\underline{a}}} \sim N(0, 1).$$

Exercício 4. Se $\underline{X} \sim N_3(\underline{\mu}, \Sigma)$, com

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix},$$

determine o valor de a para que $\underline{b}'\underline{X}$ e $\underline{c}'\underline{X}$ sejam independentes, com $\underline{b}' = (1, 1, 1)$ e $\underline{c}' = (1, -1, -1)$.

Exercício 5. Seja $\underline{X} \sim N_3(\underline{\mu}, \Sigma)$ com

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & 0 \\ \rho^2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mostre que a distribuição condicional de (X_1, X_2) dado X_3 tem média $[\mu_1 + \rho^2(X_3 - \mu_3), \mu_2]'$ e matriz de variâncias e covariâncias

$$\begin{bmatrix} 1 - \rho^4 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6. Sejam \underline{X}_1 , \underline{X}_2 e \underline{X}_3 vetores aleatórios independentes com distribuição $N(\underline{\mu}, \Sigma)$ e considere $\underline{Y}_1 = \underline{X}_1 + \underline{X}_2$, $\underline{Y}_2 = \underline{X}_2 + \underline{X}_3$ e $\underline{Y}_3 = \underline{X}_1 + \underline{X}_3$. Obtenha a distribuição condicional de $\underline{Y}_1|\underline{Y}_2$ e de $\underline{Y}_1|\underline{Y}_2, \underline{Y}_3$.

Exercício 7. Seja $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ e considere a seguinte partição

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \right),$$

em que \underline{X}_1 e \underline{X}_2 são vetores aleatórios de dimensão $(q \times 1)$ e $(p - q \times 1)$, respectivamente. Mostre que $\Sigma_{12} = 0$ implica independência entre \underline{X}_1 e \underline{X}_2 , utilizando a função densidade de probabilidade da normal multivariada (Veja dica no exercício 4.14 de Johnson and Wichern, 2007, p.204).

Referências

- Johnson, R. A. and Wichern, D. W. (2007) Applied Multivariate Statistical Analysis. 5th edition. Prentice-Hall
- Coteia WIKI
<http://wiki.icmc.usp.br/index.php/SME0822>.