

Exercício 1. Exercícios sugeridos de Johnson and Wichern (2007):

- Exercícios 1.2, 1.4 e 1.5, pág 38 (ver “marginal dot diagrams” na pág 11).
- Exercícios 1.22, 1.23, pág 45.
- Exercícios 2.3, 2.4, 2.8, 2.9, 2.14, 2.15, 2.16, 2.19, 2.22, 2.23, 2.27, 2.28, 2.30, pág 103-107.

Exercício 2. Mostre que se uma matriz A admite inversa, então ela é única.

Exercício 3. Considere a transformação $\underline{y}_i = A\underline{x}_i + \underline{b}$, para $i = 1, \dots, n$. Denotando o vetor de médias amostrais de \underline{x} , $\bar{\underline{x}}$, e a matriz de variâncias e covariâncias amostrais de \underline{x} , S_x , mostre que

- (a) $\bar{\underline{y}} = A\bar{\underline{x}} + \underline{b}$
(b) $S_y = AS_xA'$.

Exercício 4. Determine o posto das matrizes A e B a seguir

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercício 5. Determine a matriz A associada à forma quadrática

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 - 3x_3^2.$$

Exercício 6. Sejam duas variáveis aleatórias $Y_1 = X$ e $Y_2 = 1 - X$ onde $E(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Obtenha a matriz de variâncias e covariâncias de $(Y_1, Y_2)'$ e verifique que é positiva semi-definida.

Exercício 7. Seja A uma matriz $p \times n$ qualquer. Prove que $A'A$ é simétrica.

Exercício 8. Seja $\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_n$ uma amostra aleatória de vetores p -dimensionais com matriz de variâncias e covariâncias Σ . Sejam \underline{a} e \underline{b} vetores reais. Prove que $\text{Cov}(\sum_{i=1}^n a_i \underline{Y}_i, \sum_{i=1}^n b_i \underline{Y}_i) = 0$ se e somente se \underline{a} e \underline{b} forem ortogonais.

Exercício 9. Sejam A uma matriz $p \times p$ e \underline{Y} um vetor aleatório com média $\underline{\mu}$ e matriz de variâncias e covariâncias Σ . Prove que $E(\underline{Y}'A\underline{Y}) = \text{tr}(A\Sigma) + \underline{\mu}'A\underline{\mu}$.

Referência bibliográfica

- Johnson, R. A. and Wichern, D. W. (2007) Applied Multivariate Statistical Analysis. 5th edition. Prentice-Hall.