$3^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE ESTATÍSTICA I - SME 0320

Exercício 1 (*Magalhães e Lima E.5 p.134 adaptado*). A função de probabilidade conjunta entre as variáveis X e Y é apresentada abaixo (com algumas entradas faltando)

$X \diagdown Y$	-1	0	2	4	$P(X = x)$
-2		3/64	1/32		5/16
-1	1/16	1/16	0		
1	1/64	11/64		1/64	5/16
2	5/64		3/64	1/32	
$P(Y = y)$		5/16		1/4	1

(a) Complete a tabela.
(b) Obtenha as funções de probabilidade marginais de X e Y.
(c) Obtenha os valores esperados e as variâncias de X e Y, denotando-os por μ_X, μ_Y, σ_X^2 e σ_Y^2.
(d) Obtenha a função de probabilidade de XY e calcule a esperança de XY, μ_{XY}.
(e) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.
(f) X e Y são independentes? Justifique.

Exercício 2 (*Meyer E.6.2 p.134*). Suponha que a variável aleatória bidimensional (X, Y) tenha função densidade de probabilidades conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} kx(x-y), & \text{se } 0 < x < 2, \ -x < y < x, \\ 0, & \text{para outros valores.} \end{cases}$$

(a) Calcule a constante k.
(b) Ache a função densidade de probabilidades marginal de X.
(c) Ache a função densidade de probabilidades marginal de Y.
(d) X e Y são independentes? Justifique.

Exercício 3 (*Meyer E.6.3 p.134*). Suponha que a função densidade de probabilidades conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) seja dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, & \text{se } 0 < x < 1, \ 0 < y < 2, \\ 0, & \text{para outros valores.} \end{cases}$$

Calcule

(a) $P\left(X > \dfrac{1}{2}\right)$.
(b) $P(Y < X)$

Exercício 4 (*Walpole E.3.65 p.66*). Dois componentes eletrônicos do sistema de um míssil funcionam em harmonia para o sucesso total do sistema. Considere X e Y a vida, em horas, dos dois componentes. A densidade conjunta de X e Y é

$$f(x,y) = \begin{cases} ye^{-y(1+x)} & x, y \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Dê as funções de densidade marginais para as duas variáveis aleatórias.
(b) Qual é a probabilidade de que as vidas de ambos os componentes excedam duas horas?

Exercício 5 (*Walpole E.3.70 p.67*). Considere a seguinte função densidade de probabilidades conjunta para as variáveis aleatórias X e Y

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x-y}{9}, & 1 < x < 3, 1 < y < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine as funções de densidade marginais de X e Y.
(b) X e Y são independentes?
(c) Determine $P(X > 2)$.

Exercício 6 (*Walpole E.3.77 p.68*). Um sistema químico que resulta de uma reação química tem dois importantes componentes, entre outros, em sua mistura. A função densidade de probabilidades conjunta que descreve as proporções X_1 e X_2 desses dois componentes é dada por

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 2, & 0 < x_1 < x_2 < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Obtenha a distribuição marginal de X_1.
(b) Obtenha a distribuição marginal de X_2.
(c) Qual a probabilidade de que as proporções dos componentes produzam os resultados $X_1 < 0,2$ e $X_2 > 0,5$?

Exercício 7 (*Magalhães e Lima Ex. 17, p. 159*). Numa caixa existem 4 bolas numeradas 3, 5, 5 e 7. Uma bola é sorteada ao acaso, seu número anotado (X_1) e devolvida à caixa. Uma segunda bola é escolhida, também ao acaso, e seu número é denotado por X_2.

(a) Determine a distribuição conjunta de (X_1, X_2).
(b) Obtenha as distribuições marginais de X_1 e X_2. Elas são independentes?
(c) Encontre o valor esperado e a variância de $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$.

Exercício 8 (*Bussab e Morettin E.39 p. 233*). Se ρ_{XY} é o coeficiente de correlação entre X e Y, e se tivermos $Z = aX + b$ e $W = cY + d$, com $a > 0$ e $c > 0$, prove que $\rho_{XY} = \rho_{ZW}$.

Exercício 9 (*Bussab e Morettin E.41 p.233*). Sejam X e Y variáveis aleatórias com $\text{Var}(X) = 1$, $\text{Var}(Y) = 2$ e $\rho_{XY} = 1/2$. Determine $\text{Var}(X - 2Y)$.

Exercício 10 (*Bussab e Morettin E.42 p.233*). Sejam X e Y variáveis aleatórias com $E(X) = E(Y) = 0$, $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$. Prove que $Z = X + Y$ e $U = X - Y$ então $\rho_{ZU} = 0$.

Algumas respostas: **2** (a) $k = 1/8$
(b) $h(x) = x^3/4, \ 0 < x < 2$
(c) $g(y) = \begin{cases} 1/3 - y/4 + 5/48y^3, & -2 \leq y \leq 0 \text{ e} \\ 1/3 - y/4 + y^3/48, & 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$
3 (a) 5/6 (b) 7/24. **4** (b) $1/(3e^6)$. **5** (b) não (c) 2/3.
6 (a) $2(1 - x_1)$, $0 < x1 < 1$ (b) $2x_2$, $0 < x_2 < 1$ (c) 0,2.
7 (b) X e Y são independentes (c) $\text{E}(\overline{X}) = 5$ e $\text{Var}(\overline{X}) = 1$