1. Simulação Estocástica e Números Pseudoaleatórios

USP/ICMC

1º/2020

Simulação

Simulação estocástica é a arte de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Simulação

Simulação estocástica é a arte de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Arte? Necessitamos de muitas técnicas para atingir o(s) objetivo(s) (Teoria dos Números, Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Computação, Análise Numérica, ...)

Simulação

Simulação estocástica é a arte de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Arte? Necessitamos de muitas técnicas para atingir o(s) objetivo(s) (Teoria dos Números, Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Computação, Análise Numérica, . . .)

Variáveis aleatórias? Muitos problemas ou são de natureza não determinística ou porque é mais apropriado o tratamento estocástico.

Simulação

Simulação estocástica é a arte de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Arte? Necessitamos de muitas técnicas para atingir o(s) objetivo(s) (Teoria dos Números, Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Computação, Análise Numérica, . . .)

Variáveis aleatórias? Muitos problemas ou são de natureza não determinística ou porque é mais apropriado o tratamento estocástico.

Ambiente computacional? A complexidade e/ou o volume de dados impedem a busca de uma solução manual.

Simulação

Simulação estocástica é a arte de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Arte? Necessitamos de muitas técnicas para atingir o(s) objetivo(s) (Teoria dos Números, Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Computação, Análise Numérica, . . .)

Variáveis aleatórias? Muitos problemas ou são de natureza não determinística ou porque é mais apropriado o tratamento estocástico.

Ambiente computacional? A complexidade e/ou o volume de dados impedem a busca de uma solução manual.

Certo resultado? O bom uso da simulação estocástica fornece resultados aproximados.

Geração de Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias i.i.d. Uniforme(0,1).

Geração de Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias i.i.d. Uniforme(0,1).
Procedimentos para geração de números pseudoaleatórios: as sequências geradas, embora sejam determinísticas, devem ter a "aparência" de aleatoriedade.

Geração de Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias i.i.d. Uniforme(0,1).

Procedimentos para geração de números pseudoaleatórios: as sequências geradas, embora sejam determinísticas, devem ter a "aparência" de aleatoriedade.

Testes de geradores de números aleatórios.

Geração de Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias i.i.d. Uniforme(0,1).

Procedimentos para geração de números pseudoaleatórios: as sequências geradas, embora sejam determinísticas, devem ter a "aparência" de aleatoriedade.

Testes de geradores de números aleatórios.

Período da sequência, precisão, repetibilidade e portabilidade.

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

1. x_0: número de quatro algarismos decimais (semente). Faça $i = 0$.

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

1. x_0: número de quatro algarismos decimais (semente). Faça $i = 0$.
2. Calcular x_i^2. Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que x_i^2 seja escrito como $d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0$, em que $d_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, para $j = 0, 1, \ldots, 7$.

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

1. x_0: número de quatro algarismos decimais (semente). Faça $i = 0$.
2. Calcular x_i^2. Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que x_i^2 seja escrito como $d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0$, em que $d_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, para $j = 0, 1, \ldots, 7$.
3. Fazer $x_{i+1} = d_5 d_4 d_3 d_2$ (meio do quadrado).

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

1. x_0: número de quatro algarismos decimais (semente). Faça $i = 0$.
2. Calcular x_i^2. Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que x_i^2 seja escrito como $d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0$, em que $d_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, para $j = 0, 1, \ldots, 7$.
3. Fazer $x_{i+1} = d_5 d_4 d_3 d_2$ (meio do quadrado).
4. Faça $i = i + 1$ e retorne ao passo 2 até que $i = n$.

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

1. x_0: número de quatro algarismos decimais (semente). Faça $i = 0$.
2. Calcular x_i^2. Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que x_i^2 seja escrito como $d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0$, em que $d_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, para $j = 0, 1, \ldots, 7$.
3. Fazer $x_{i+1} = d_5 d_4 d_3 d_2$ (meio do quadrado).
4. Faça $i = i + 1$ e retorne ao passo 2 até que $i = n$.
5. Divida os elementos da sequência por 10.000.

Exemplos:
(a) $\{2100, 4100, 8100, 6100, 2100, \ldots\}$,

Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

1. x_0: número de quatro algarismos decimais (semente). Faça $i = 0$.
2. Calcular x_i^2. Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que x_i^2 seja escrito como $d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0$, em que $d_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, para $j = 0, 1, \ldots, 7$.
3. Fazer $x_{i+1} = d_5 d_4 d_3 d_2$ (meio do quadrado).
4. Faça $i = i + 1$ e retorne ao passo 2 até que $i = n$.
5. Divida os elementos da sequência por 10.000.

Exemplos:

(a) $\{2100, 4100, 8100, 6100, 2100, \ldots\}$,

(b) $\{3792, 3792, \ldots\}$,

G1. Gerador de von Neumann (1949)

1. x_0: número de quatro algarismos decimais (semente). Faça $i = 0$.
2. Calcular x_i^2. Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que x_i^2 seja escrito como $d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0$, em que $d_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, para $j = 0, 1, \ldots, 7$.
3. Fazer $x_{i+1} = d_5 d_4 d_3 d_2$ (meio do quadrado).
4. Faça $i = i + 1$ e retorne ao passo 2 até que $i = n$.
5. Divida os elementos da sequência por 10.000.

Exemplos:

(a) $\{$2100, 4100, 8100, 6100, 2100, $\ldots\}$,

(b) $\{$3792, 3792, $\ldots\}$,

(c) Considere $x_0 =$ ano de seu nascimento.

G2. Geradores congruenciais lineares (Lehmer, 1951)

G2. Geradores congruenciais lineares (Lehmer, 1951)
Gerar uma sequência de inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em $\{0,\ 1,\ \ldots,\ M\text{-}1\}$, M "grande". Fazer $u_i = x_i/M$, $i = 1, \ldots, n$.

$$x_i = (ax_{i-1} + c)\ mod\, M,\ \ i \geq 1,$$

sendo que $a, c, x_0 \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$, x_0 é chamado de semente e *mod* representa o resto da divisão inteira.

G2. Geradores congruenciais lineares (Lehmer, 1951)
Gerar uma sequência de inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em $\{0,\ 1,\ \ldots,\ M\text{-}1\}$, M "grande". Fazer $u_i = x_i/M$, $i = 1, \ldots, n$.

$$x_i = (ax_{i-1} + c)\ mod\ M,\ \ i \geq 1,$$

sendo que $a, c, x_0 \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$, x_0 é chamado de semente e *mod* representa o resto da divisão inteira.
Exemplos:
(a) Gerador do IMSL: $a = 16807$, $c = 0$, $M = 2^{31} - 1$, período $= 2^{31} - 2$ $= 2.147.483.646$.
(b) IBM RANDU: $a = 2^{16} + 3$, $c = 0$, $M = 2^{31}$.

G3. Outros geradores

G3. Outros geradores

(1) Geradores com períodos 2^{60}, 2^{113} e $2^{19937} - 1 \cong 10^{6002}$ (Mersenne-Twister, *default* em R).

G3. Outros geradores

(1) Geradores com períodos 2^{60}, 2^{113} e $2^{19937} - 1 \cong 10^{6002}$ (Mersenne-Twister, *default* em R).

(2) Gerador natural (Y. Dodge, 1996, *International Statistical Review* 64, 329–344): algarismos decimais de π.

Cálculo de π com $12,1 \times 10^{12}$ dígitos decimais em dez/2013 (`http://mathworld.wolfram.com/PiDigits.html`).

Sugestão: Gravar bilhões de dígitos decimais de π e usar como gerador.

G3. Outros geradores

(1) Geradores com períodos 2^{60}, 2^{113} e $2^{19937} - 1 \cong 10^{6002}$ (Mersenne-Twister, *default* em R).

(2) Gerador natural (Y. Dodge, 1996, *International Statistical Review* 64, 329–344): algarismos decimais de π.

Cálculo de π com $12,1 \times 10^{12}$ dígitos decimais em dez/2013 (`http://mathworld.wolfram.com/PiDigits.html`).

Sugestão: Gravar bilhões de dígitos decimais de π e usar como gerador.

Obs. Há indicações de que "the decimal expansion of π is not statistically random" (R. E. Ganz, 2014, *Experimental Mathematics* 23, 99–104).

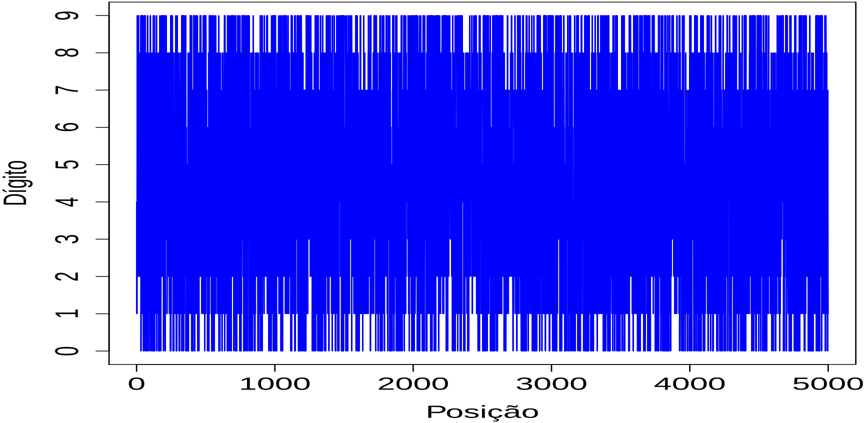

Figura 1: Primeiros 5000 dígitos de π.

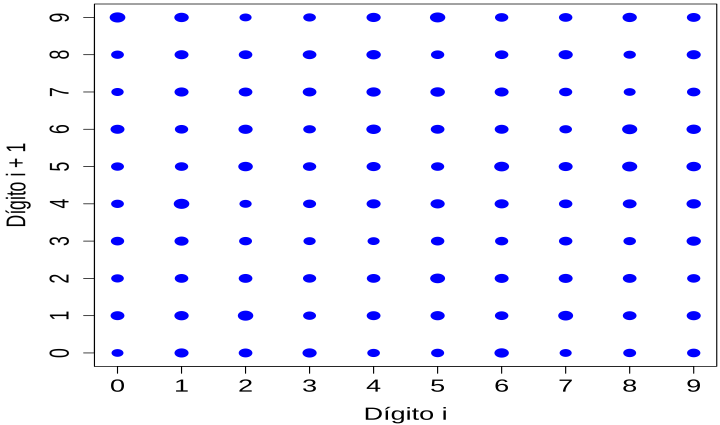

Figura 2: Primeiros 4999 pares (dígito i, dígito $i + 1$) de π.