9a. Lista de Exercícios de Álgebra Linear 10.10.2012

`Problemas envolvendo posto, eliminação e sistemas lineares`

1. Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas e calcule o posto e a nulidade de cada matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Use o método de eliminação para calcular a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Achar uma base para o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz nas bases canônicas é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Use o conceito de posto de matriz e o processo de eliminação para exibir uma base para a imagem e uma base para o núcleo de cada uma das transformações lineares

(i) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z, t) = (x + 2y - t, 2x - z + 2t, -2x + y + 3z)$

(ii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 3y, 2y + 4z, x + y - 4z)$

(iii) $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$, $D(p) = p'$ (a derivada de p)

5. Use a eliminação para verificar que o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z - 3t &= a \\ 2x - 5y - 3z + 12t &= b \\ 7x + y + 8z + 5t &= c \end{aligned}$$

admite solução se, e somente se, $37a + 13b = 9c$. Encontre a solução do sistema quando $a = 2$ e $b = 4$.

6. Determine os valores de a, de modo que o sistema tenha (i) nenhuma solução; (ii) mais de uma solução; (iii) uma única solução

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

6. Determine os valores de k tais que em cada um dos sistemas tenha (i) nenhuma solução; (ii) mais de uma solução; (iii) uma única solução

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= k \\ 2x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$x - 3z = -3$$
$$2x + ky - z = -2$$
$$x + 2y + kz = 1$$

7. Mostre que a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z + t &= 0 \\ x + 3y - z + 2t &= 0 \end{cases}$$

pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde λ_1, λ_2 são números reais arbitrários.

8. Mostre que a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z + t &= 1 \\ x + 3y - z + 2t &= 3 \end{cases}$$

pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde λ_1, λ_2 são números reais arbitrários.

9. Compare o exercício 2 com o exercício 1. O que você nota?

10. (Continuação do exercício anterior) Mostre que se u é uma solução particular de um sistema não homogêneo $AX = B$ e que W é o conjunto solução do sistema homogêneo associado $AX = 0$, então

$$u + W = \{u + w \mid w \in W\}$$

é o conjunto solução do sistema não homogêneo $AX = B$.

11. (Problema Desafio) Considere o sistema de n equações lineares a n incógnitas:

$$\begin{aligned} x_i + x_{i+1} &= a_i \quad (i = 1, \cdots, n-1), \\ x_1 + x_n &= a_n. \end{aligned}$$

(i) Se n é ímpar, prove que o sistema possui solução única, sejam quais forem os a_i.

(ii) Se n é par, obtenha condições sobre os a_i que sejam necessárias e suficientes pata que o sistema possua solução.