ICMC – USP – SME0220

Introdução à Teoria das Probabilidades – 2ª prova – 2º/2016

S O L U Ç Ã O

1. Um geólogo coletou 11 amostras de rocha basáltica e nove de granito. Em seguida, solicitou a um técnico de laboratório que selecionasse 15 amostras para análise. Qual a probabilidade de todas as amostras de um dos dois tipos de rocha serem selecionadas para análise?
Solução. $X$ é a variável aleatória que representa o número de amostras de rocha basáltica selecionadas para análise. Pelo enunciado, a distribuição de $X$ é hipergeométrica com $N = 20$, $M = 11$ e $n = 15$, em que $X \in \{0, 1, \ldots, 11\}$. Devemos calcular a probabilidade do evento $[X = 11] \cup [X = 11 - 9 = 6]$. Levando em conta que temos dois eventos mutuamente exclusivos, a respota é

$$\frac{\binom{11}{11}\binom{9}{4} + \binom{11}{6}\binom{9}{9}}{\binom{20}{15}} = \frac{49}{1292} \cong 0,0379.$$

2. O tempo até o atendimento em uma fila, em min, é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0, 5)$. O atendimento é considerado satisfatório se o tempo não exceder 3,5 min. Em seis atendimentos realizados de forma independente, qual a probabilidade de que pelo menos quatro atendimentos sejam satisfatórios?
Solução. $X$ é a variável aleatória que representa o número de atendimentos satisfatórios de um total de seis atendimentos realizados. Supondo que os atendimentos são realizados de forma independente, pelo enunciado a distribuição de $X$ é binomial com $n = 6$ e probabilidade de sucesso (suposta) constante, $\theta$. Ainda pelo enunciado, $\theta = 3,5/5 = 0,7$, pois a distribuição do tempo até o atendimento é uniforme. A resposta é

$$P(X \geqq 4) = \sum_{x=4}^{6} \binom{6}{x} 0,7^x \times 0,3^{6-x} \cong 0,744.$$

3. Em uma grande frota de caminhões de entrega o número médio diário de caminhões em manutenção (fora de serviço) é dois. Esta frota conta com dois caminhões de reserva. Considerando um dia qualquer, calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

   (a) Não é necessário utilizar os caminhões de reserva.

   (b) O número de caminhões de reserva é insuficiente.

Solução. $X$ é a variável aleatória que representa o número de caminhões em manutenção, cuja média é igual a 2. Supomos que a distribuição de $X$ é Poisson com $\lambda = 2$.
No item 3a temos $X = 0$ e a resposta é $P(X = 0) = e^{-\lambda} = e^{-2} \cong 0,135$.
O item 3b corresponde ao evento $[X > 2]$, com probabilidade

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leqq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} P(X = x) = 1 - (e^{-2} + e^{-2} + \frac{e^{-2} \times 2^2}{2!}) \cong 0,323.$$

4. As variáveis aleatórias $X$ e $Y$ têm função densidade conjunta $f_{X,Y}(x, y) = 6y$, se $x > 0$, $y > 0$ e $x + y < 1$; $f_{X,Y}(x, y) = 0$, caso contrário.

   (a) Determine as funções densidades marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

   (b) $X$ e $Y$ são variáveis aleatórias independentes?

Solução. A função densidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ assume valores maiores do que 0 quando $(x, y)$ pertence ao triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$. Logo, para $x \in (0, 1)$, temos $y \in (0, 1 - x)$ e para $y \in (0, 1)$, temos $x \in (0, 1 - y)$.
No item 4a, para $x \in (0, 1)$ calculamos

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy = \int_0^{1-x} 6y\, dy = 3y^2 \mid_0^{1-x} = 3(1 - x)^2,$$

sendo que $f_X(x) = 0$, se $x \notin (0, 1)$.
No item 4a, para $y \in (0, 1)$ calculamos

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx = \int_0^{1-y} 6y\, dx = 6yx \mid_0^{1-y} = 6y(1 - y),$$

sendo que $f_Y(y) = 0$, se $y \notin (0, 1)$.
No item 4b, levando em conta o item 4a notamos que $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, de modo que $X$ e $Y$ não são variáveis aleatórias independentes.

5. Para $x \in \{0, 3, 6\}$ e $y \in \{1, 2\}$, a tabela abaixo apresenta a distribuição de $(X, Y)$, ou seja, $P(X = x, Y = y)$. Determine os valores das probabilidades $p_{01}$, $p_{31}$, $p_{61}$ e $p_{62}$ sabendo que (i) $P(Y = 2|X = 0) = 1/4$ e (ii) as variáveis aleatórias $X$ e $Y$ são independentes.

Distribuição de $(X, Y)$.

| | $X$ | | |
|---|---|---|---|
| $Y$ | 0 | 3 | 6 |
| 1 | $p_{01}$ | $p_{31}$ | $p_{61}$ |
| 2 | 0,10 | 0,05 | $p_{62}$ |

Solução. Pelo enunciado $X$ e $Y$ são independentes. Logo, $P(Y = 2|X = 0) = P(Y = 2) = 0,25$. Como $P(Y = 2) = 0,10 + 0,05 + p_{62}$, obtemos $0,15 + p_{62} = 0,25$, de modo que $p_{62} = 0,10$. Também temos

$$\frac{1}{4} = P(Y = 2|X = 0) = \frac{P(Y = 2, X = 0)}{P(X = 0)} = \frac{0,10}{P(X = 0)},$$

de modo que $P(X = 0) = 0,40$. Como $P(X = 0) = p_{01} + 0,10$, obtemos $p_{01} = 0,30$. Pelo enunciado, $P(X = 6, Y = 2) = P(X = 6)P(Y = 2)$, ou seja, $p_{62} = (p_{61}+p_{62})(0,10+0,05+p_{62})$. Como $p_{62} = 0,10$, obtemos $0,10 = (p_{61} + 0,10) \times 0,25$, de modo que $p_{61} = 0,30$. Finalmente, como a soma das seis probabilidades na tabela é igual a 1, obtemos $p_{31} = 0,15$.

6. O volume de um balão esférico é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 1$. Determine a função densidade do raio do balão.
Solução. $X$ é a variável aleatória que representa o volume. Pelo enunciado, $F_X(x) = P(X \leqq x) = 1 - e^{-x}$, para $x > 0$, e $F_X(x) = 0$, para $x \leqq 0$. Se $Y$ representa o raio, sabemos que $X = 4\pi Y^3/3$, de modo que $Y = \sqrt[3]{3X/(4\pi)}$. Logo, $Y$ é uma variável aleatória e, para $y > 0$,

$$F_Y(y) = P(Y \leqq y) = P\left(\sqrt[3]{\frac{3X}{4\pi}} \leqq y\right) = P\left(X \leqq \frac{4\pi}{3}y^3\right) = 1 - \exp\left(-\frac{4\pi}{3}y^3\right).$$

Derivando $F_Y(y)$ em relação a $y$, $y > 0$, obtemos

$$f_Y(y) = 4\pi y^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{3}y^3\right).$$

Para $y \leqq 0$, $f_Y(y) = 0$.