

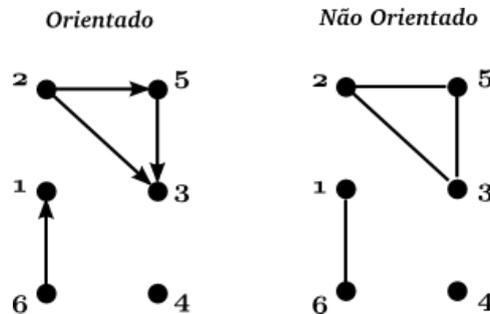


## SCC0203 - Algoritmos e Estruturas de Dados II

### 1ª lista de exercícios

**Questão 1** Desenhe as versões não orientadas e orientadas do grafo  $G = (V, E)$ , onde  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $E = \{(2, 5), (6, 1), (5, 3), (2, 3)\}$ .

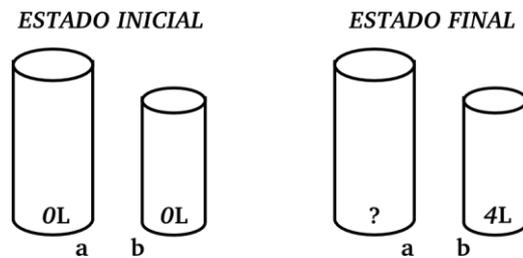
**Questão 2** Defina os grafos ilustrados na seguinte figura.



**Questão 3** Defina e desenhe os grafos não orientados completos com 4 vértices ( $K_4$ ), 5 vértices ( $K_5$ ) e 6 vértices ( $K_6$ ).

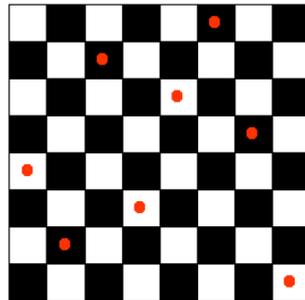
**Questão 4** Um fazendeiro precisa atravessar um rio levando um lobo, uma cabra e um repolho. O barco disponível só tem capacidade para levar o fazendeiro acompanhado de um item. O fazendeiro não pode abandonar em uma das margens a cabra com o lobo e nem mesmo o repolho com a cabra, pois o lobo comeria a cabra ou então a cabra comeria o repolho. Como representar cada estado? Desenhe o grafo que mostra alguma solução para atravessar o rio.

**Questão 5** Tem-se dois recipientes de água, um com capacidade de 7 litros e outro com capacidade de 5 litros. Inicialmente ambos estão vazios – veja a figura a seguir. É necessário encher um dos recipientes com 4 litros, sendo que as únicas operações possíveis são encher completamente (através de uma fonte externa) ou esvaziar completamente um dos recipientes, ou passar todo o conteúdo de um recipiente para outro. Como representar cada estado? Desenhe o grafo que mostra algumas soluções para o problema.



**Questão 6** Dê um exemplo de um grafo em que cada vértice é adjacente a dois outros vértices e cada aresta é adjacente a duas outras arestas.

**Questão 7** Seja um problema que consiste em posicionar 8 rainhas em um tabuleiro de xadrez, inicialmente vazio, tal que não há ataque entre elas, como na figura a seguir. Como representar cada estado? Desenhe o grafo que mostra algumas soluções para o problema.



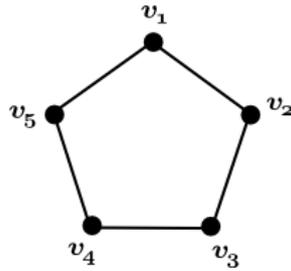
**Questão 8** Quantas arestas tem um grafo com 3 vértices de grau 3 e um vértice de grau 5?

**Questão 9** Em um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas, qual a soma dos graus de todos os vértices? Observe que, em um grafo não orientado, cada aresta soma 1 ao grau de cada vértice em que incide e cada aresta incide somente sobre dois vértices. Em um grafo orientado, por outro lado, cada aresta soma 1 ao grau de cada vértice em que incide, porém, cada aresta incide somente sobre um vértice.

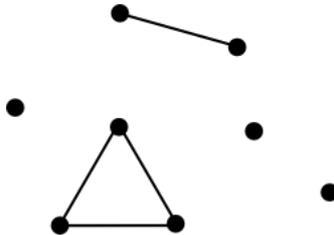
**Questão 10** Sabendo que cada vértice tem pelo menos grau 3, qual o maior número possível de vértices em um grafo com 35 arestas? Lembre-se que a soma dos graus dos vértices é igual a duas vezes o número de arestas. Se cada aresta liga dois vértices teríamos 70 vértices de grau 1. Se cada vértice tem pelo menos grau 3, então...

**Questão 11** Quantas arestas possui um grafo completo com  $n$  vértices? E um grafo orientado completo com  $n$  vértices?

**Questão 12** Encontre o complemento do seguinte grafo.

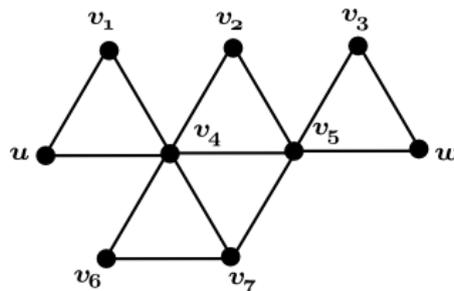


**Questão 13** Quantas componentes conexas tem o seguinte grafo?



**Questão 14** Seja  $G$  um grafo conexo. Mostre que, se  $G$  contém exatamente  $2n$  vértices de grau ímpar, onde  $n \geq 2$ ,  $G$  contém no mínimo  $n$  caminhos disjuntos (isto é, que não compartilham nenhuma aresta), onde cada um une dois vértices de grau ímpar.

**Questão 15** Encontre no seguinte grafo (a) o menor caminho simples entre  $u$  e  $w$  e (b) o maior ciclo simples entre  $u$  e  $w$ .



**Questão 16** O grafo da Questão 15 é Euleriano? É Hamiltoniano?

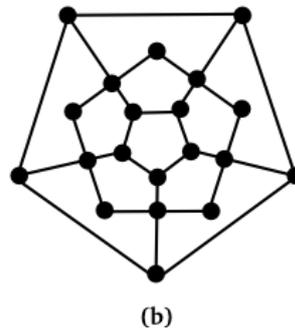
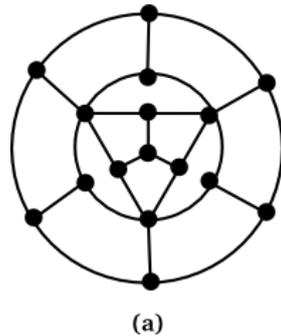
**Questão 17** Desenhe um grafo no qual um caminho Euleriano é também um ciclo Hamiltoniano. O que podemos concluir sobre esse tipo de grafo?

**Questão 18** Desenhe um grafo de 8 vértices,

(a) que contém um circuito euleriano, mas não contém nenhum ciclo hamiltoniano.

- (b) que contém um caminho hamiltoniano, mas não contém nenhum caminho euleriano.
- (c) que contém um caminho hamiltoniano e um caminho euleriano.
- (d) que não contém um caminho hamiltoniano nem um caminho euleriano.

**Questão 19** Mostre que nenhum dos dois grafos da seguinte figura possui um caminho Hamiltoniano (e, portanto, nenhum ciclo Hamiltoniano). Note que na Figura (a) somente duas das arestas incidentes em qualquer vértice podem fazer parte do ciclo Hamiltoniano. Considere o total de arestas excluídas. Você vai observar que, no total, 13 arestas devem ser excluídas. O que sobra não é suficiente para formar um caminho Hamiltoniano. Na Figura b, considere primeiro os vértices de grau 2.



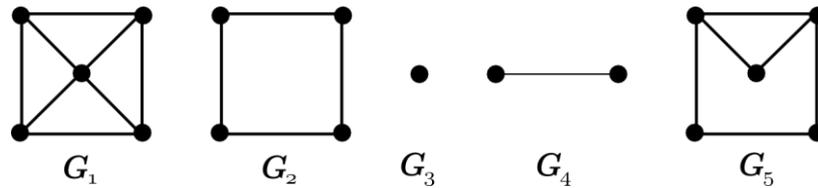
**Questão 20** Considere um jogo de dominós que contém 10 peças com as seguintes configurações: (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,3); (2,4); (2,5); (3,4); (3,5); (4,5). É possível colocar as peças de maneira que o número de uma peça é igual ao número da peça adjacente? (Dica: represente o problema com um grafo e veja se ele é Euleriano).

**Questão 21** Seja  $u$  e  $v$  dois vértices não adjacentes de um grafo simples de  $n$  vértices tal que  $d(u)+d(v) \geq n$ . Seja  $G+uv$  o grafo obtido acrescentando uma aresta entre  $u$  e  $v$ . Mostre que  $G$  é hamiltoniano se e somente se  $G+uv$  é hamiltoniano.

**Questão 22** É possível mover um cavalo num tabuleiro de xadrez de tal maneira que ele efetue todo movimento permitido exatamente uma vez?

**Questão 23** Dados os seguintes grafos, indique todos os pares  $x$  e  $y$  tais que:

- (a)  $G_x$  é subgrafo de  $G_y$  ;
- (b)  $G_x$  é subgrafo gerador de  $G_y$  ;
- (c)  $G_x$  é subgrafo induzido de  $G_y$  ;
- (d)  $G_x$  não é subgrafo de  $G_y$  .



**Questão 24** Uma árvore com 14 vértices possui quantas arestas? E uma árvore com  $n$  vértices?

**Questão 25** A altura de uma árvore enraizada é o tamanho do maior caminho da raiz a uma folha. Quais as alturas possíveis para uma árvore com 5 vértices?

**Questão 26** Considere uma árvore  $T$  com  $n$  folhas cujo cada nó interno possui dois filhos com exceção de alguns nós de altura  $h-1$ . Qual a altura  $h$  de  $T$ ? E se cada nó interno possuir  $k$  filhos?