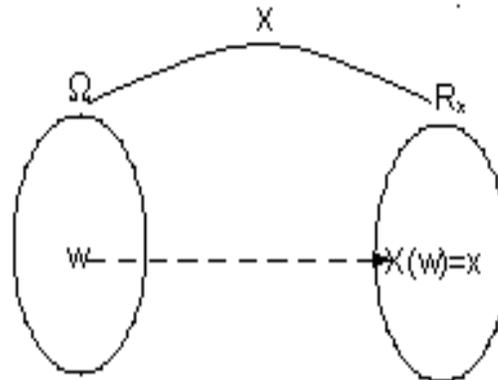


3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

2012

Variável aleatória

Ω é o espaço amostral de um experimento aleatório. Uma variável aleatória, X , é uma função que atribui um **número real** a cada **resultado** em Ω .



Exemplo. Retira-se, ao acaso, um item produzido de um lote de seis unidades.
Variáveis:

X : Número de defeitos no item selecionado.

Y : Tempo de vida do item (em h).

O espaço amostral associado a este experimento aleatório é

$$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_6\}.$$

Os possíveis valores da variável X são $0,1,2,\dots$, e os possíveis valores da variável Y são os números **reais não negativos**.

Classificação:

- **Variáveis aleatórias discretas.** O conjunto de possíveis valores é **finito** ou **infinito enumerável**.
- **Variáveis aleatórias contínuas.** O conjunto de possíveis valores é **infinito não enumerável** (um intervalo, por exemplo).

No exemplo acima, X é discreta e Y é contínua.

Variáveis aleatórias discretas (VAD)

X é uma VAD com possíveis valores no conjunto R_X . Uma função $f(x)$ é uma **função de probabilidade** se

$$(i) 0 \leq f(x_i) \leq 1,$$

$$(ii) P(X = x_i) = f(x_i), \quad x_i \in R_X \quad e$$

$$(iii) \sum_{x_i \in R_X} f(x_i) = 1.$$

Exemplo. Um lote de um certo produto é formado por 35 itens, sendo 21 itens do tipo H e 14 do tipo M. Uma amostra de 3 itens será formada sorteando-se, **sem reposição**, três itens do lote. Qual a probabilidade de encontrarmos na amostra **pelo menos dois** itens do tipo **M**?

Definimos X como o **número** de itens do tipo **M** na amostra.

Espaço amostral	Probabilidade	X
HHH	$\frac{21}{35} \times \frac{20}{34} \times \frac{19}{33} = 0,203$	0
HHM	$\frac{21}{35} \times \frac{20}{34} \times \frac{14}{33} = 0,150$	1
HMH	$\frac{21}{35} \times \frac{14}{34} \times \frac{20}{33} = 0,150$	1
MHH	$\frac{14}{35} \times \frac{21}{34} \times \frac{20}{33} = 0,150$	1
HMM	$\frac{21}{35} \times \frac{14}{34} \times \frac{13}{33} = 0,097$	2
MHM	$\frac{14}{35} \times \frac{21}{34} \times \frac{20}{33} = 0,097$	2
MMH	$\frac{14}{35} \times \frac{13}{34} \times \frac{21}{33} = 0,097$	2
MMM	$\frac{14}{35} \times \frac{13}{34} \times \frac{12}{33} = 0,056$	3

x	0	1	2	3
P(X=x)	0,203	0,450	0,291	0,056

Assim, $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,291 + 0,056 = 0,347$.

Exemplo. A demanda diária de um item é uma variável aleatória discreta com a função de probabilidade

$$P(D = d) = \frac{C2^d}{d!}; \quad d = 1, 2, 3, 4.$$

(a) Determinar a constante C.

(b) Calcular $P(D \geq 2)$.

Solução. (a) Para que $P(D = d)$ seja uma função de probabilidade, devemos ter (i) $C > 0$ e

(ii) $P(D = 1) + P(D = 2) + P(D = 3) + P(D = 4) = 1$. Ou seja,

$$\sum_{d \in R_D} P(D = d) = 1 \Rightarrow C \left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} \right) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Logo, } P(D = d) = \frac{2^d}{6d!}; \quad d = 1, 2, 3, 4.$$

$$(b) P(D \geq 2) = 1 - P(D < 2) = 1 - P(D = 1) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Função de distribuição acumulada de uma VAD

Função de distribuição acumulada (FDA)

X é uma VAD com valores em $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ e função de probabilidade $f(x) = P(X = x)$. Para qualquer x , a FDA de X , denotada por $F(x)$, é definida como

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i), \quad \text{em que } x_i \in R_X.$$

Exemplo. Uma variável aleatória X tem função de probabilidade

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1/15, & \text{se } x = 1, \\ 7/15, & \text{se } x = 2, 3, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determinar $F(x)$.

Se $x < 1$, $F(x) = P(X \leq x) = 0$.

Se $x = 1$, $F(1) = P(X \leq 1) = \sum_{x_i \leq 1} P(X = x_i) = P(X = 1) = f(1) = \frac{1}{15}$.

Se $1 \leq x < 2$, $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = P(X = 1) = \frac{1}{15}$.

Se $x = 2$, $F(2) = P(X \leq 2) = \sum_{x_i \leq 2} P(X = x_i) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{15} + \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$.

Se $2 \leq x < 3$, $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{8}{15}$.

Se $x = 3$, $F(3) = P(X \leq 3) = \sum_{x_i \leq 3} P(X = x_i) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$
 $= \frac{1}{15} + \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = 1$.

Se $x \geq 3$, $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$.

Observação.

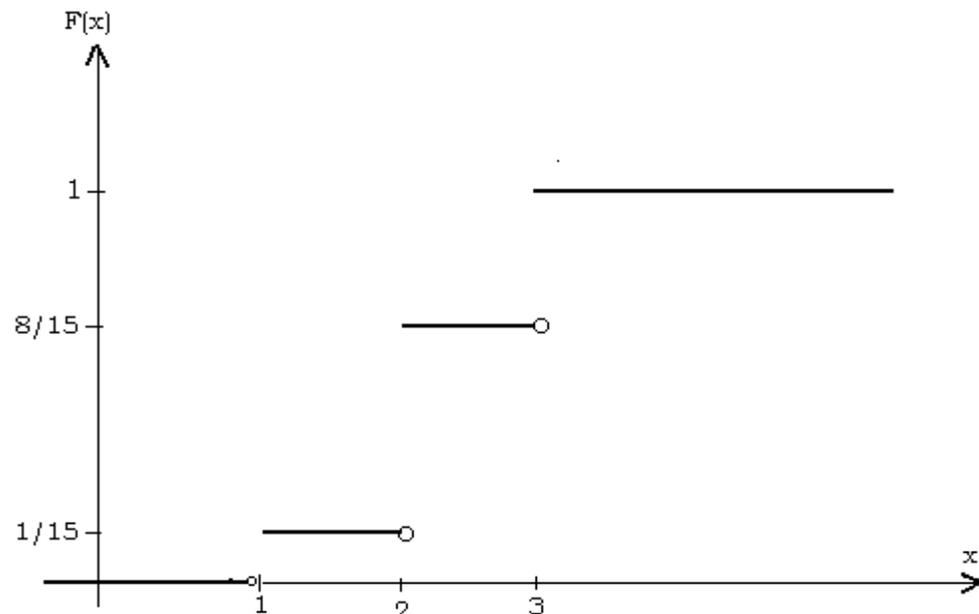
Se $x \in [1,2)$, então $F(x) = F(1)$;

se $x \in [2,3)$, então $F(x) = F(2)$.

Em geral, se $x \in [x_l, x_{l+1})$, então $F(x) = F(x_l)$
sendo que x_l e x_{l+1} são elementos de \mathbb{R}_x .

Logo, a **FDA** é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1, \\ 1/15 & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 8/15 & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$



Propriedades da função de distribuição acumulada

X é uma VAD

1. Para todo x , $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. $F(x)$ é uma função monótona não decrescente.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
4. Se $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$, em que $x_1 < x_2 < \dots$, então $f(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.
5. Se a e b são tais que $a < b$, então
 - (i) $P(X \leq a) = F(a)$,
 - (ii) $P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$,
 - (iii) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$,
 - (iv) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$ e
 - (v) $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$.

Exemplo. A variável aleatória X tem função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1/8, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1/2, & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 5/8, & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

Determinar

(a) $P(1 < X \leq 3)$, (b) $P(X \geq 2)$ e (c) $f(x)$.

Usando a propriedade 5(iii) da FDA :

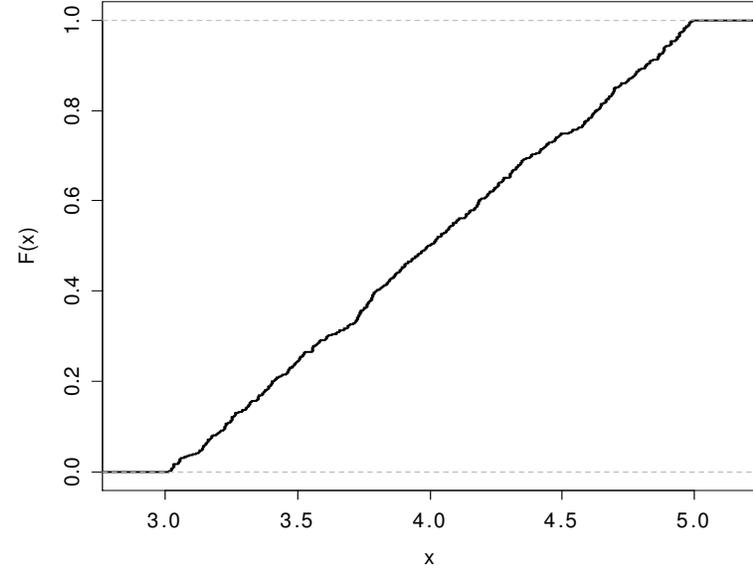
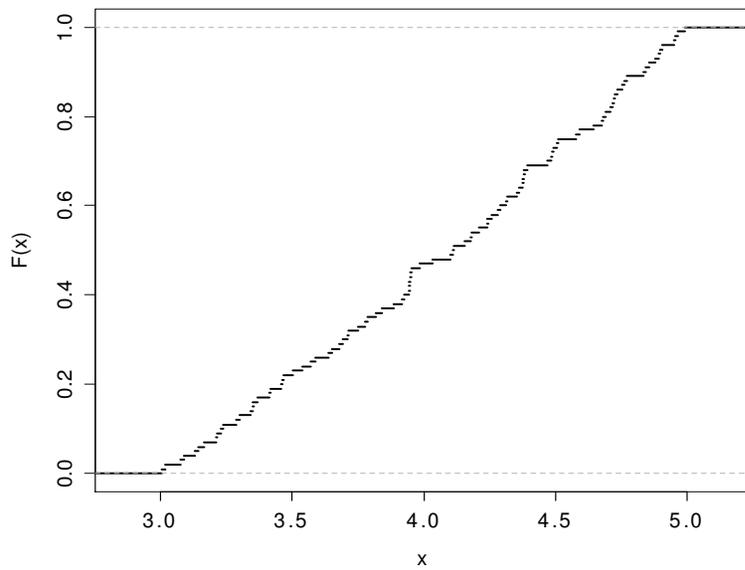
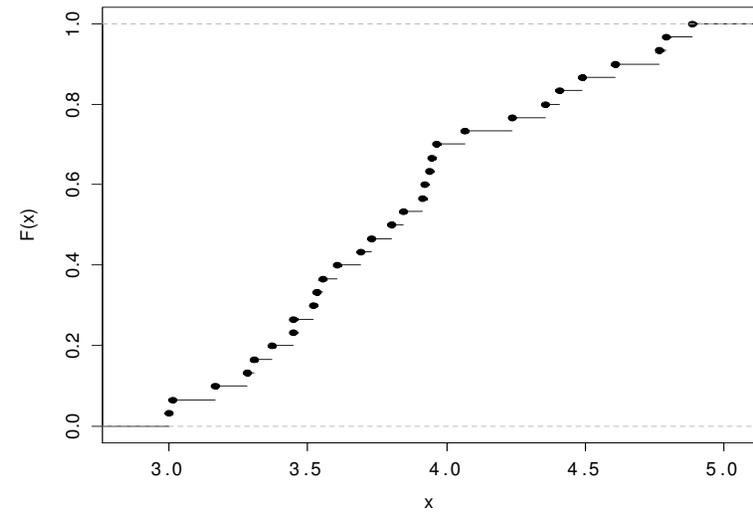
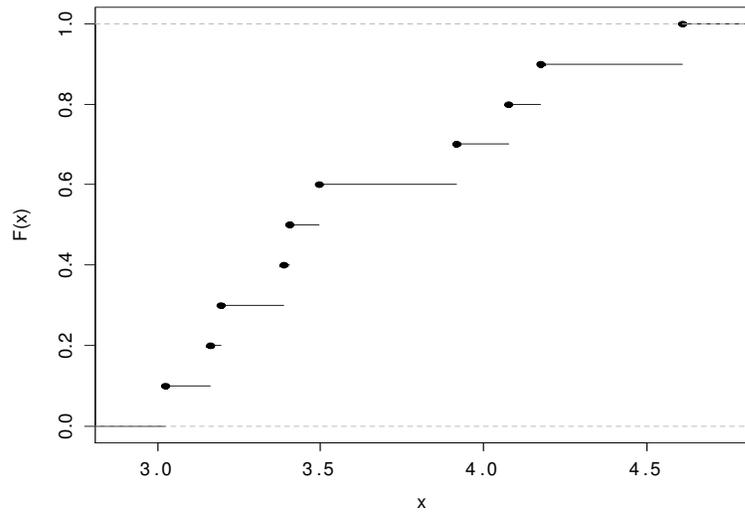
(a) $P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1) = 1 - 1/2 = 1/2$.

(b) Propriedade 5(i) da FDA : $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(1) = 1 - 1/2 = 1/2$.

(c) Da FDA tem - se que $R_X = \{0,1,2,3\}$. Pela propriedade 4 da FDA, pode - se mostrar que a função de probabilidade de X é

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1/8, & \text{se } x = 0, 2, \\ 3/8, & \text{se } x = 1, 3, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplos



Variáveis aleatórias contínuas (VAC)

Função densidade de probabilidade

Uma função $f(x)$ é chamada função **densidade** de probabilidade de uma VAC X se

1. $f(x) \geq 0$, para todo x .

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

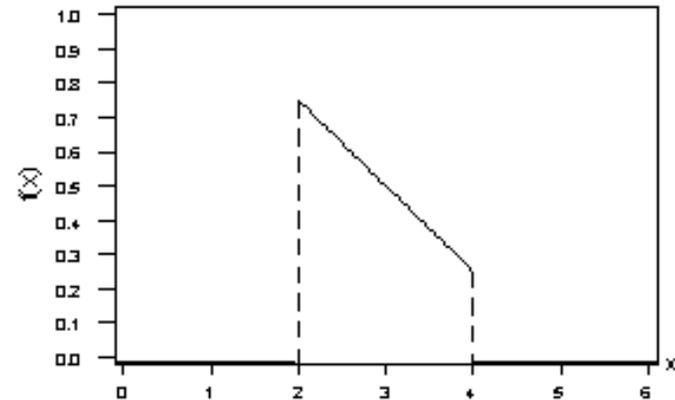
3. Se $A = \{x; a \leq x \leq b\}$, então $P(A) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$.

Exemplo. O tempo de produção de um componente (em minutos) é uma variável aleatória X com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5-x}{4}, & \text{se } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verificar se $f(x)$ é uma função **densidade** de probabilidade e calcular a **probabilidade** que o tempo de produção de um artigo escolhido ao acaso seja **menor do que 3 minutos**.

Primeiro notamos que $f(x) \geq 0$, para todo x .
 Falta **verificar** a condição (2), ou seja a **área**
 sob o gráfico de $f(x)$ deve ser **igual a 1**.



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^2 0dx + \int_2^4 \frac{5-x}{4} dx + \int_4^{\infty} 0dx = \int_2^4 \frac{5-x}{4} dx = \frac{1}{4} \left(5x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=2}^4 = 1.$$

A probabilidade de que o tempo de produção de um artigo escolhido ao acaso seja menor do que 3 minutos é a probabilidade do evento $A = \{x; x < 3\}$, ou seja,

$$P(A) = P(X < 3) = \int_{-\infty}^3 f(x)dx = \int_{-\infty}^2 0dx + \int_2^3 \frac{1}{4}(5-x)dx = \frac{1}{4} \left(5x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^3 = \frac{5}{8}.$$

Observação. Se X é uma VAC, então

(i) $P(X = x) = 0$, para todo x ,

(ii) $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$
 $= P(a < X \leq b)$, para todos a e b com $a < b$,

(iii) $P(X \leq a) = P(X < a)$, para todo a .

Função de distribuição acumulada. X é uma VAC com função densidade $f(x)$. A função de distribuição acumulada (FDA) de X é

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \text{ para todo } x.$$

Obs. Se X é um tempo de vida, utilizamos a função de confiabilidade (*reliability function*): $R(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$.

Exemplo. Uma variável aleatória X tem função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5-x}{4}, & \text{se } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{Determinar } F(x).$$

Se $x < 2$, $f(x) = 0$; logo, $F(x) = 0$.

Se $2 \leq x < 4$,

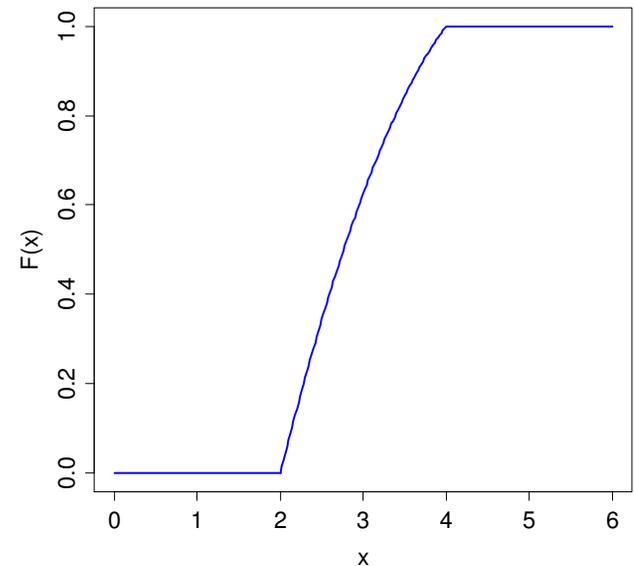
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^2 0dt + \int_2^x \frac{5-t}{4}dt = -\frac{(5-t)^2}{8} \Big|_2^x = \frac{9 - (5-x)^2}{8}.$$

Se $x \geq 4$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \underbrace{\int_{-\infty}^2 f(t)dt}_0 + \underbrace{\int_2^4 f(t)dt}_1 + \underbrace{\int_4^x f(t)dt}_0 = 1.$$

Logo, a **FDA** de X é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 2, \\ \frac{9 - (5-x)^2}{8} & \text{se } 2 \leq x < 4, \\ 1, & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$$



Observação.

A FDA de X permite o cálculo de probabilidades de eventos da forma

$E = \{x; a \leq x \leq b\}$, com $a \leq b$. Isto é,

$$P(E) = F(b) - F(a).$$

Exemplo. Considere a FDA abaixo. Obtenha $P(X \leq 3)$ e $P(3 \leq X < 5)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 2, \\ \frac{9 - (5 - x)^2}{8}, & \text{se } 2 \leq x \leq 4, \\ 1, & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$$

Solução.

$$P(X \leq 3) = F(3) = \frac{9 - (5 - 3)^2}{8} = \frac{5}{8} \text{ e}$$

$$P(3 \leq X < 5) = F(5) - F(3) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

Propriedades

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, para todo x .
2. $F(x)$ é uma função **monótona não decrescente**.
3. $F(x)$ é uma **função contínua** para todo x .
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x f(t) dt = 1$.
5. Do **teorema fundamental do cálculo** obtemos

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$

Exemplo. Suponha que o tempo de vida de um processador é uma variável aleatória X com

$$F(x) = \begin{cases} 1 - ke^{-\frac{x}{2}}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determinar (a) o valor de k , (b) $P(X \geq 2)$, $P(2 \leq X \leq 4)$ e $P(X \leq -1)$ e (c) $f(x)$.

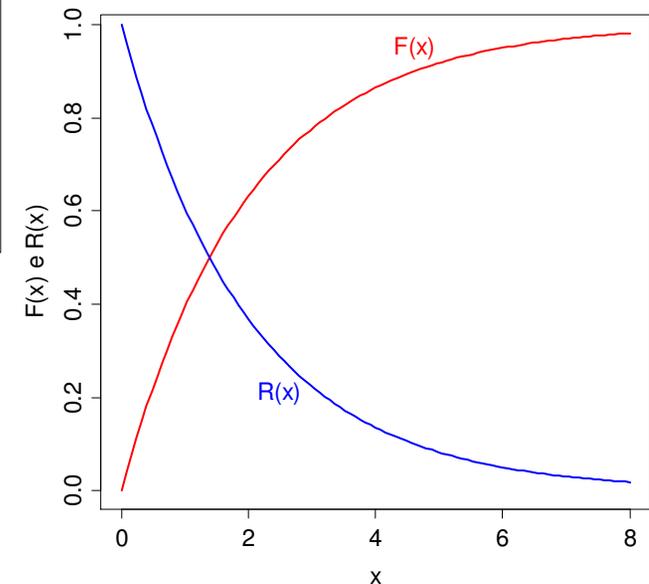
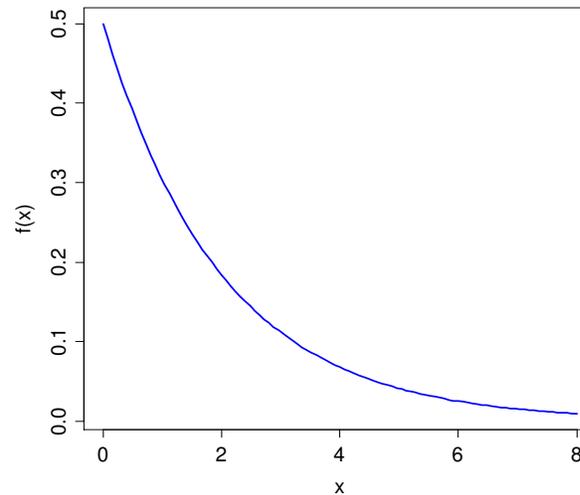
Solução. (a) Propriedade 3 de $F(x)$: $F(0) = 0$.

$$1 - ke^{-0} = 0 \Rightarrow k = 1. \text{ Logo, } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$(b) P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1} = 0,368$$

$$P(2 \leq X < 4) = F(4) - F(2) = (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} = 0,233$$

$$P(X \leq -1) = F(-1) = 0.$$



(c) Propriedade 5 de $F(x)$:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Valor esperado e variância

Valor esperado de uma variável aleatória. X é uma variável aleatória com função de probabilidade ou função densidade de probabilidade $f(x)$. O valor esperado (ou esperança matemática ou média da variável aleatória), denotado por $E(X) = \mu_x$ é definido como

1. X é uma variável aleatória discreta :

$$E(X) = \sum_{x \in R_x} xf(x) \text{ e}$$

2. X é uma variável aleatória contínua :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx ,$$

supondo que o somatório e a integral existem.

Valor esperado de uma função de variável aleatória

$Y = h(X)$, sendo h uma função de X .

O valor esperado de $h(X)$ é dado por

1. X é uma variável aleatória discreta :

$$E (X) = \sum_{x \in R_x} h (x) f (x) \text{ e}$$

2. X é uma variável aleatória contínua :

$$E (X) = \int_{-\infty}^{\infty} h (x) f (x) dx .$$

Variância de uma variável aleatória. X é uma variável aleatória com função de probabilidade ou função densidade de probabilidade $f(x)$ e com média $E(X) = \mu_X$.

A variância de X , denotada por $Var(X) = \sigma_X^2$ é definida como o **valor esperado** de $(X - \mu_X)^2$.

1. X é uma variável aleatória discreta :

$$Var (X) = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 f (x) \quad e$$

2. X é uma variável aleatória contínua :

$$Var (X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f (x) dx .$$

Desvio padrão. É a raiz quadrada da variância:

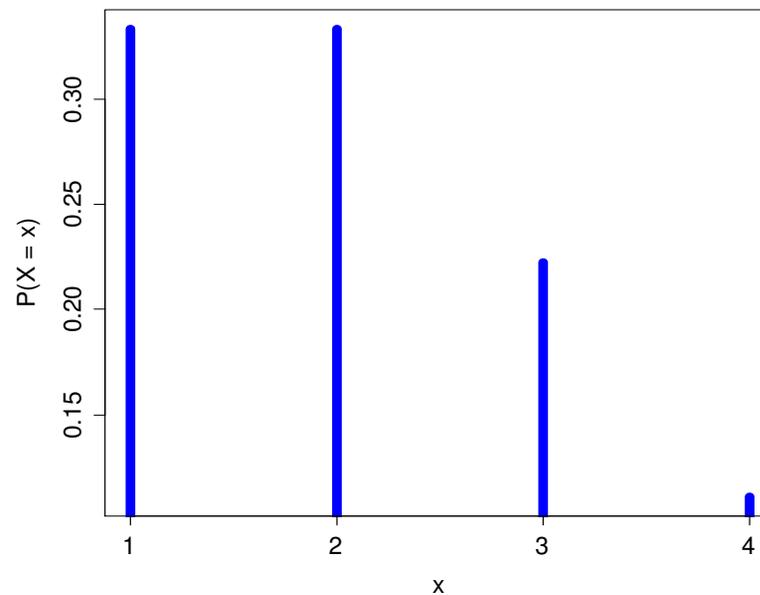
$$DP (X) = \sigma_X = \sqrt{Var (X)} .$$

Exemplo. Suponha que a demanda diária de uma peça é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{2^x}{6x!}, & x = 1, 2, 3, 4, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determinar (a) a demanda esperada e (b) o desvio padrão da demanda.

Solução. Gráfico de $f(x)$.



Solução. (a) Pela definição de valor esperado, temos

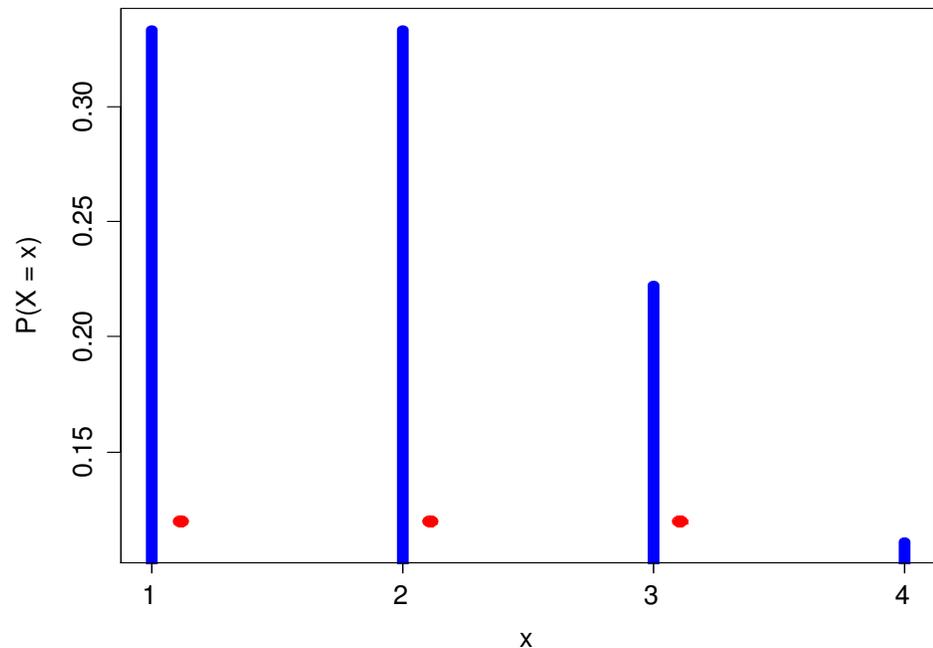
$$E(X) = \sum_{x \in R_X} xf(x) = 1 \times \frac{2}{6} + 2 \times \frac{2^2}{6 \times 2!} + 3 \times \frac{2^3}{6 \times 3!} + 4 \times \frac{2^4}{6 \times 4!} = \frac{19}{9} \cong 2,1.$$

$$(b) \text{Var}(X) = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 f(x) =$$

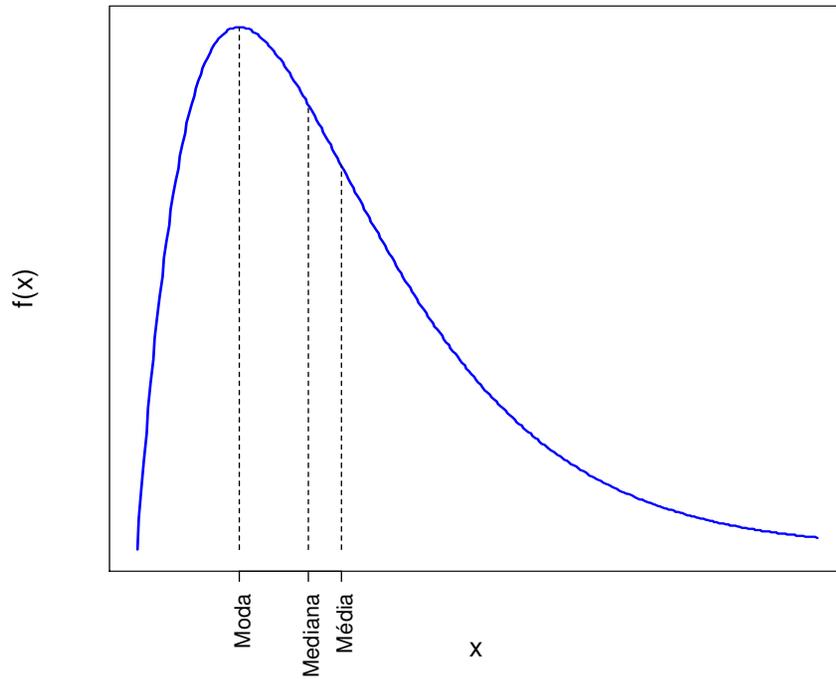
$$= \left(1 - \frac{19}{9}\right)^2 \times \frac{2}{6} + \left(2 - \frac{19}{9}\right)^2 \times \frac{2^2}{6 \times 2!} + \left(3 - \frac{19}{9}\right)^2 \times \frac{2^3}{6 \times 3!} + \left(4 - \frac{19}{9}\right)^2 \times \frac{2^4}{6 \times 4!} = \frac{80}{81},$$

$$DP(X) = \sigma_X = \sqrt{\frac{80}{81}} \cong 0,99.$$

Gráfico de $f(x)$ com $\mu - \sigma$, μ e $\mu + \sigma$.



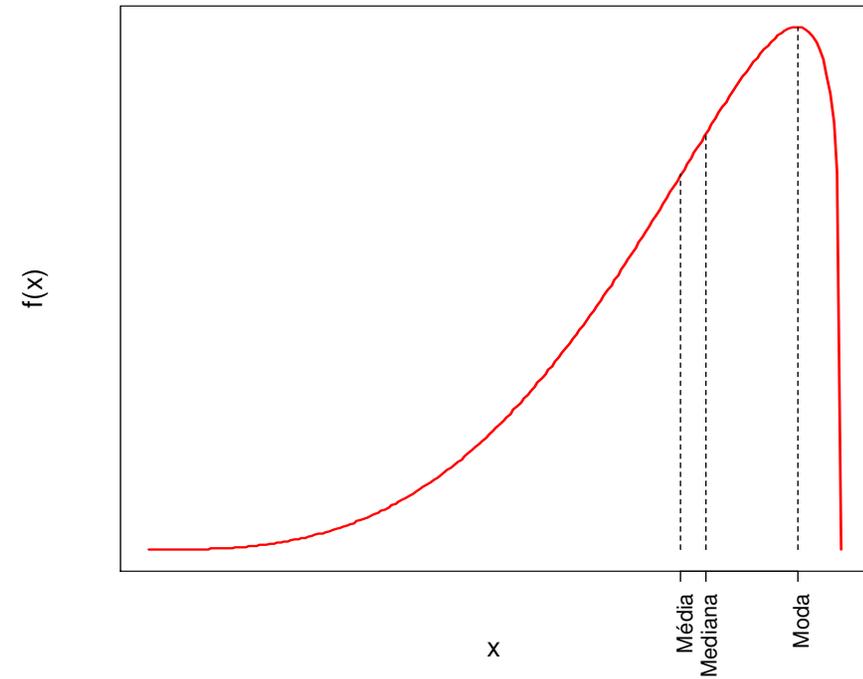
Moda, mediana e média (VAC)



Assimetria à direita:

$\text{Moda} < \text{Mediana} < \text{Média}$

Simetria: $\text{Mediana} = \text{Média}$ (se existir).



Assimetria à esquerda:

$\text{Moda} > \text{Mediana} > \text{Média}$

Variáveis aleatórias independentes

X e Y são duas variáveis aleatórias. Dizemos que X e Y são **independentes** se, e somente se,

$$\begin{aligned} P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) &= P(X \leq x) \times P(Y \leq y) \\ &= F_X(x) \times F_Y(y), \text{ para todos } x \text{ e } y, \end{aligned}$$

sendo que F_X e F_Y são as FDA's de X e Y .

Em particular, se X e Y são duas variáveis aleatórias **discretas**, X e Y são **independentes** se, e somente se,

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x) \times P(Y = y), \text{ para todos } x \text{ e } y.$$

Propriedades do valor esperado e da variância

X e Y são duas variáveis aleatórias e a e b dois números reais.

1. $E(a) = a$.

2. $E(aX) = aE(X)$.

3. $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$.

4. $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$.

5. $Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2$.

6. $Var(a) = 0$.

7. $Var(aX) = a^2Var(X)$.

8. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então

$$Var(aX \pm bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y).$$

9. Se X_1, \dots, X_n são n variáveis independentes, então

$$Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n).$$

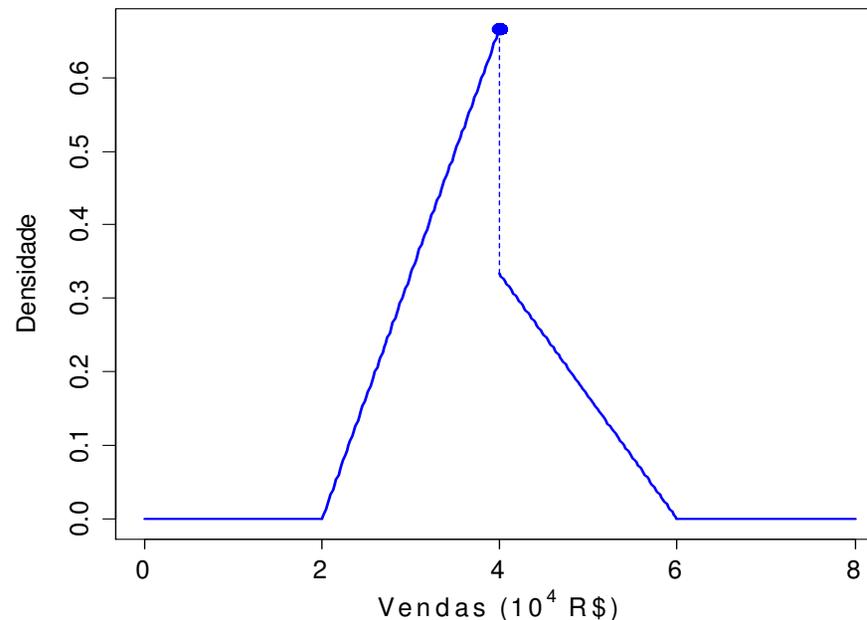
Exemplo. O total de **vendas diárias** de um empresa que comercializa equipamentos eletrônicos (em dezenas de milhares de R\$) é uma variável aleatória com função densidade

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{3}, & \text{se } 2 \leq x \leq 4, \\ \frac{6-x}{6}, & \text{se } 4 < x \leq 6, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- (a) Para um certo dia, determine a probabilidade de que as vendas da empresa sejam **maiores do que R\$ 22.000,00**, mas **não ultrapassem R\$ 45.000,00**.
- (b) A **média** e o **desvio padrão** das vendas diárias.
- (c) Se o **lucro diário** é dado pela função $Y = 0,2X - 0,5$, calcule a média e o desvio padrão do lucro diário.

Solução. Denotamos as vendas diárias (em dezenas de milhares de R\$) por X .

Gráfico de $f(x)$:



(a) Definimos $A = \{2,2 < X \leq 4,5\}$ e calculamos

$$\begin{aligned} P(A) &= P(2,2 < X \leq 4,5) = \int_{2,2}^{4,5} f(x) dx = \int_{2,2}^4 \frac{x-2}{3} dx + \int_4^{4,5} \frac{6-x}{6} dx \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{2,2}^4 + \frac{1}{6} \left(6x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_4^{4,5} = 0,806 . \end{aligned}$$

(b) Iniciamos calculando

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_2^4 x \left(\frac{x-2}{3} \right) dx + \int_4^6 x \left(\frac{6-x}{6} \right) dx = \frac{34}{9} \cong 3,78$$

$$\text{e } E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_2^4 x^2 \left(\frac{x-2}{3} \right) dx + \int_4^6 x^2 \left(\frac{6-x}{6} \right) dx = \frac{134}{9} \cong 14,89.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \text{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{134}{9} - \left(\frac{34}{9} \right)^2 \\ &= 50 / 81 \end{aligned}$$

$$\text{e } \sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{50 / 81} \cong 0,786 .$$

(c) Definimos $Y = 0,2X - 0,5$. Das propriedades do valor esperado e da variância obtemos $E(Y) = E(0,2X - 0,5) = 0,2 E(X) - 0,5 = 0,2 \times 34/9 - 0,5 \cong 0,256$,

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(0,2X - 0,5) = 0,2^2 \text{Var}(X) = 0,2^2 \times (50/81)$$

$$\Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{\text{Var}(Y)} \cong 0,157.$$