Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Sistemas lineares

Método de eliminação de Gauss

Material Elaborado por: Alysson Machado Costa (SME/ICMC/USP)

O que sabemos

- Podemos multiplicar uma linha de um sistema por um escalar e somar com outra linha... O sistema continua válido:

Ex.:

$\times 2$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x - y = 5 \end{cases} \; - \qquad \begin{cases} x + 3y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

A B C

A, B e C são equivalentes! $x = 4,\ y = -1$

Qual a vantagem ?

- Obviamente, de A para B para C, não ganhamos nada. Mas se fizermos:

$$\underset{A}{\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}} \xrightarrow{eq_2 \rightarrow eq_2 - 1 * eq_1} \underset{D}{\begin{cases} x + y = 3 \\ -2y = 2 \end{cases}}$$

sabemos resolver facilmente!

Queremos um sistema triangular:

- Sabemos resolver muito facilmente um sistema triangular:

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & \ldots + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & \ldots + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\
 & & & & a_{33}\,x_3 & \ldots + & a_{3n}\,x_n & = & b_n \\
 & & & & & & \ldots\ldots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{nn}\,x_n & = & b_n
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{ccl}
x_n & = & \dfrac{b_n}{a_{nn}}\,, \\
 & & \\
x_i & = & \dfrac{b_i\;-\;\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\;x_j}{a_{ii}}\,, \quad i \;=\; n-1,\ldots,1\,.
\end{array}
\right.
$$

Como fazer ?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\
\dots & \dots & & & & \\
a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)}
\end{array}\right),$$

zerar estes elementos

Como eliminar os elementos indesejados ?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \ldots & \ldots & & & & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right),$$

n^a linha = n^a linha - 1^a linha multiplicada por $a_{n1}^{(1)}/\, a_{11}^{(1)}$

3^a linha = 3^a linha - 1^a linha multiplicada por $a_{31}^{(1)}/\, a_{11}^{(1)}$

2^a linha = 2^a linha - 1^a linha multiplicada por $a_{21}^{(1)}/\, a_{11}^{(1)}$

Ficamos com:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & \ldots & & & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right),$$

onde:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 2, 3, \ldots, n; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, n. \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - b_1^{(1)} \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \end{array}\right.$$

Observações (1/3)

- Para efetuar as operações de eliminação da primeira coluna, necessitamos que $a_{11} \neq 0$.

Para eliminar os elementos indesejados da segunda coluna:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
 & \dots & & & & \vdots \\
 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)}
\end{array}\right),
$$

n^a linha = n^a linha - 1^a linha multiplicada por $a_{n2}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$

3^a linha = 3^a linha - 1^a linha multiplicada por $a_{32}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$

Observações (2/3)

- Para efetuar as operações de eliminação da primeira coluna, necessitamos que $a_{11} \neq 0$.

- Para efetuar as operações de eliminação da segunda coluna, necessitamos $a_{22}^{(2)} \neq 0$. *O* que isso significa ?
  - Quando da eliminação de a_{21}, não pode aparecer zero em $a_{22}^{(2)}$. Ou seja:

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$$

e assim por diante... acabamos com:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
 & & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3,n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\
 & & & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
 & & & & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} & b_{n-1}^{(n-1)} \\
 & & & & & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)}
\end{array}\right),$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}
a_{ij}^{(n)} & = & a_{ij}^{(n-1)} - a_{n-1,j}^{(n-1)} \dfrac{a_{i,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}\ , \\
 & & \\
b_i^{(n)} & = & b_i^{(n-1)} - b_{n-1}^{(n-1)} \dfrac{a_{i,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}\ ,
\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} i = n\ ; \\ j = n-1, n\ . \end{array}$$

Observações (3/3)

- Para efetuar as operações de eliminação da primeira coluna, necessitamos que $a_{11} \neq 0$.

- Para efetuar as operações de eliminação da segunda coluna, necessitamos $a_{22}^{(2)} \neq 0$. O que isso significa ?

  - Quando da eliminação de a_{21}, não pode aparecer zero em $a_{22}^{(2)}$. Ou seja:

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$$

- No caso geral:

$$det A_k \neq 0$$

onde A_k são os menores principais

Exemplo

Resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 13 \end{array}\right)$$

Exemplo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 13 \end{array}\right)$$

Eliminando a_{21}:

2^a linha = 2^a linha - 1^a linha * a_{21}/a_{11}

! 2^a linha = 2^a linha - 1^a linha*2/6

! 2^a linha = 2^a linha - 1^a linha * 1/3

! 2^a linha = 2^a linha - (2 2/3 -1/3 | 7/3)

Eliminando a_{31}:

3^a linha = 3^a linha - 1^a linha*a_{31}/a_{11}

! 3^a linha = 3^a linha - 1^a linha * 3/6

! 3^a linha = 3^a linha - 1^a linha * 1/2

! 3^a linha = 3^a linha - (3 1 -1/2 | 7/2)

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & 14/3 \\ 0 & 1 & 17/2 & 19/2 \end{array}\right)$$

Exemplo

$$\left(\begin{array}{cccc} 6 & 2 & -1 & | & 7 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & | & 14/3 \\ 0 & 1 & 17/2 & | & 19/2 \end{array}\right)$$

Eliminando a_{32}:

3ª linha = 3ª linha - 2ª linha * a_{32}/a_{22}

! 2ª linha = 2ª linha - 2ª linha * 1/(10/3)

! 2ª linha = 2ª linha - 2ª linha * 3/10

! 2ª linha = 2ª linha - (0 1 2/5 | 7/5)

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 6 & 2 & -1 & | & 7 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & | & 14/3 \\ 0 & 0 & 81/10 & | & 81/10 \end{array}\right)$$

Exemplo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & 14/3 \\ 0 & 0 & 81/10 & 81/10 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 10/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 81/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14/3 \\ 81/10 \end{pmatrix}$$

$81/10 x_3 = 81/10$!
$10/3\ x_2 + 4/3 = 14/3$!
$6x_1 + 2 - 1 = 7$!

$$\boxed{\begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{array}}$$