Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Determinação numérica de autovalores e autovetores
Método das Potências

19 May 2008 . 10:30

Método das potências

- Idéia:

  Determinar o autovalor de maior valor absoluto de uma matriz A e o seu correspondente autovetor **sem** determinar o polinômio característico da matriz.

Por que ?

  Algumas vezes, na prática, queremos determinar autovalores de módulo grande.

Teorema

Seja A uma matriz real de ordem *n* e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ seus autovalores e $u_1, u_2, \ldots u_n$ seus correspondentes autovetores. Suponha que os autovetores são linearmente independentes e que $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, i=2,...,n.

Seja ainda a sequência definida por $y_{k+1} = Ay_k$, k=0,1,...

Tome y_0 um vetor arbitrário de R^n tal que

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$$

com c_j escalares e $c_1 \neq 0$.

Então

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1}$$

e y_k tende ao autovetor correspondente.

Demonstração

Por hipótese: $y_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$.

$$\boxed{Au_i = \lambda_i u_i}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= Ay_0 \\
&= c_1 A u_1 + c_2 A u_2 + \ldots + c_n A u_n \\
&= c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + c_n \lambda_n u_n \\
&= \lambda_1 \left[c_1 u_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_2 + \ldots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} u_n \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= Ay_1 = A^2 y_0 \\
&= \lambda_1 \left[c_1 A u_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} A u_2 + \ldots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} A u_n \right] \\
&= \lambda_1 \left[c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda_2 u_2 + \ldots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \lambda_n u_n \right] \\
&= \lambda_1^2 \left[c_1 u_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 u_2 + \ldots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 u_n \right]
\end{aligned}$$

Demonstração

- ...

$$
\begin{aligned}
y_k &= A y_{k-1} = A^k y_0 \\
&= \lambda_1^k \left[c_1 u_1 + \underbrace{c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k u_2 + \ldots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k u_n}_{\text{tende a zero}} \right]
\end{aligned}
$$

quando k-> ∞

$$
(\lambda_1)^k \left[c_1 u_1 + \cancelto{0}{c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p u_2 + \ldots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p u_n} \right]
$$

converge para um múltiplo do autovetor correspondente a λ_1

Como obter λ_1?

$$y_{k+1} = Ay_k = A^{k+1}y_0 = \lambda_1^{k+1}\left[c_1u_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1}u_2 + \cdots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k+1}u_n\right]$$

$$y_k = Ay_{k-1} = A^k y_0 = \lambda_1^{k}\left[c_1u_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k}u_2 + \cdots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k}u_n\right]$$

Assim:

$$\lambda_1 = \lim_{k\to\infty}\frac{\left(y_{k+1}\right)_r}{\left(y_k\right)_r} = \lim_{k\to\infty}\frac{\left(A^{k+1}y_0\right)_r}{\left(A^k y_0\right)_r}, r = 1,\ldots,n$$

c.q.d.

Cálculo de λ_1 (normalização)

- Na prática, o cálculo de λ_1 é feito com a construção de dois outros vetores:

$$z_{k+1} = A y_k$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1} \qquad \alpha_{k+1} = \max_{1 \leq r \leq n} |(z_{k+1})_r| \; .$$

Cálculo de λ_1 (normalização)

$$
\begin{aligned}
z_1 &= Ay_0 \\
y_1 &= \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \frac{1}{\alpha_1} A y_0 \\
z_2 &= Ay_1 = \frac{1}{\alpha_1} A^2 y_0 \\
y_2 &= \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} A^2 y_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_3 &= Ay_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} A^3 y_0 \\
&\vdots \\
y_k &= \frac{1}{\alpha_k} z_k = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} A^k y_0 \\
z_{k+1} &= Ay_k = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} A^{k+1} y_0 .
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{k \to \infty} \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lim_{k \to \infty} \frac{\left(A^{k+1} y_0\right)_r}{\left(A^k y_0\right)_r} = \lambda_1
$$

Cálculo de λ_1-Observações

a) No limite, todas as componentes de $(z_{k+1})r/(y_k)r$ tendem a λ_1. Entretanto, na prática, uma das componentes converge mais rapidamente do que as outras. Assim, quando uma das componentes satisfizer a precisão desejada teremos o auto-valor procurado. Além disso, a velocidade de convergência depende de λ_i / λ_1 . Portanto, quanto maior foi $|\lambda_1|$ quando comparado a $|\lambda_i|$, mais rápido será a convergência.

b) Para obtermos λ_1 com uma precisão ε, em cada passo calculamos aproximações para λ_1. O teste do erro relativo em cada componente de λ_1 é usado como um critério de parada:

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|_r}{|\lambda_1^{(k+1)}|_r} < \epsilon \ ,$$

c) Quando todas as componentes r forem iguais, então o vetor y_k dessa iteração é o auto-vetor correspondente ao autovalor λ_1.

d) se algum vetor resultar no vetor nulo, o método falha. Tal acontecimento deve ocorrer se as hipóteses não foram satisfeitas.

Exemplo- Método das potências

Exemplo 7.4 - *Usando o método das potências determinar o auto-valor de maior valor absoluto da matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

com precisão de 10^{-2}.

Tomemos $y_0 = (1,\ 1,\ 1)^t$. Temos:

$$z_1 = Ay_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \; ; \; \alpha_1 = \max |\,(z_1)_r\,| = \max(|4|, |6|, |11|) = 11 \; .$$

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \begin{pmatrix} 0.3636 \\ 0.5455 \\ 1 \end{pmatrix} \; , \; z_2 = Ay_1 = \begin{pmatrix} 2.0908 \\ 3.8182 \\ 7.5454 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{(z_2)_r}{(y_1)_r} = \begin{pmatrix} 5.7503 \\ 6.9995 \\ 7.5454 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \begin{pmatrix} 0.2771 \\ 0.5060 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; z_3 = A y_2 = \begin{pmatrix} 1.8313 \\ 3.5662 \\ 7.1204 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{(z_3)_r}{(y_2)_r} = \begin{pmatrix} 6.6088 \\ 7.0478 \\ 7.1204 \end{pmatrix}$$

$$\frac{|\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}|_r}{|\lambda_1^{(2)}|_r} \simeq \begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.07 \\ 0.13 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
y_3 &= \frac{1}{\alpha_3} z_3 = \begin{pmatrix} 0.2572 \\ 0.5008 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; z_4 = A y_3 = \begin{pmatrix} 1.8256 \\ 3.5160 \\ 7.0304 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad \lambda_1^{(3)} &= \frac{(z_4)_r}{(y_3)_r} = \begin{pmatrix} 7.0980 \\ 7.0208 \\ 7.0304 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

$$
\frac{|\lambda_1^{(3)} - \lambda_1^{(2)}|_r}{|\lambda_1^{(2)}|_r} \simeq \begin{pmatrix} 0.069 \\ 0.004 \\ 0.013 \end{pmatrix}
$$

$$
\lambda_1 \simeq 7.0208 \text{ com } \epsilon < 10^{-2} \text{ e } u_1 \simeq \begin{pmatrix} 0.2572 \\ 0.5008 \\ 1 \end{pmatrix} = y_3 \; .
$$

Método da Potência Inversa

- Usando para determinar o autovalor de menor valor absoluto e seu correspondente auto-vetor. Assumimos:

$$|\lambda_n| < |\lambda_i|, \ i=1,\dots,n-1$$

Desejamos determinar λ_n

Sabemos que se λ é auto-valor de A, então λ^{-1} é auto-valor de A^{-1}. Além disso, se $|\lambda_n|$ é o menor auto-valor de A, então $|\lambda_n^{-1}|$ é o maior auto-valor de A^{-1}. Assim, o método da potência inversa consiste em calcular pelo método das potências o auto-valor de maior valor absoluto de A^{-1}, pois assim teremos o menor auto-valor, em módulo, de A. Portanto, dado y_k, construímos dois outros vetores y_{k+1} e z_{k+1} da seguinte forma :

Método da Potência Inversa

$$
\begin{aligned}
z_{k+1} &= A^{-1} y_k \\
y_{k+1} &= \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1}, \quad \text{onde } \alpha_{k+1} = \max_{1 \le r \le n} |(z_{k+1})_r| \ ,
\end{aligned}
$$

- E portanto:

$$
\lambda_n^{-1} = \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} \ .
$$

Note que na prática não é necessário calcular A^{-1}, pois de:

$$
z_{k+1} = A^{-1} y_k \Rightarrow A z_{k+1} = y_k \ ,
$$

Método da Potência Inversa

- Exemplo: Determinar o menor autovalor, em módulo, da matriz dada abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5.25 \end{pmatrix}.$$

Assim, tomando $y_0 = (1,\ 1,\ 1)^t$ em $Az_1 = y_0$ ou seja fazendo$LUz_1 = y_0$, segue que:

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0.5715 \\ -0.1429 \\ 0.1905 \end{pmatrix}, \ \alpha_1 = 0.5715\ , \quad y_1 = \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2500 \\ 0.3333 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo agora $LUz_2 = y_1$, obtemos:

$$z_2 = \begin{pmatrix} 0.7024 \\ -0.4048 \\ 0.1230 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_3^{-1} = \frac{(z_2)_r}{(y_1)_r} = \begin{pmatrix} 0.7024 \\ 1.6192 \\ 0.3690 \end{pmatrix}.$$

Método da Potência Inversa

- Continuando...

Agora, $\alpha_2 = 0.7024$. Continuando o processo, obtemos:

$$y_2 = \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5763 \\ 0.1751 \end{pmatrix}, \text{ e de } LU z_3 = y_2 \Rightarrow z_3 = \begin{pmatrix} 0.7377 \\ -0.4754 \\ 0.1084 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_3^{-1} = \frac{(z_3)_r}{(y_2)_r} = \begin{pmatrix} 0.7377 \\ 0.8249 \\ 0.6192 \end{pmatrix}. \text{ Temos : } \alpha_3 = 0.7377, \text{ e assim :}$$

$$y_3 = \frac{1}{\alpha_3} z_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6444 \\ 0.1469 \end{pmatrix} \text{ e de } LU z_4 = y_3 \Rightarrow z_4 = \begin{pmatrix} 0.7454 \\ -0.4908 \\ 0.1063 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \lambda_3^{-1} = \frac{(z_4)_r}{(y_3)_r} = \begin{pmatrix} 0.7454 \\ 0.7617 \\ 0.7235 \end{pmatrix}. \text{ Finalmente, } \alpha_4 = 0.7454, \text{ e portanto :}$$

$$y_4 = \frac{1}{\alpha_4} z_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6584 \\ 0.1426 \end{pmatrix} \text{ e de } LU z_5 = y_4 \Rightarrow z_5 = \begin{pmatrix} 0.7471 \\ -0.4942 \\ 0.1061 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \lambda_3^{-1} = \frac{(z_5)_r}{(y_4)_r} = \begin{pmatrix} 0.7471 \\ 0.7506 \\ 0.7443 \end{pmatrix}.$$

Logo $\lambda_3^{-1} \simeq 0.7471$ é o auto-valor de maior valor absoluto de A^{-1}. Portanto $\frac{1}{\lambda_3^{-1}} \simeq 1.3385$ é o auto-valor de menor valor absoluto de A.