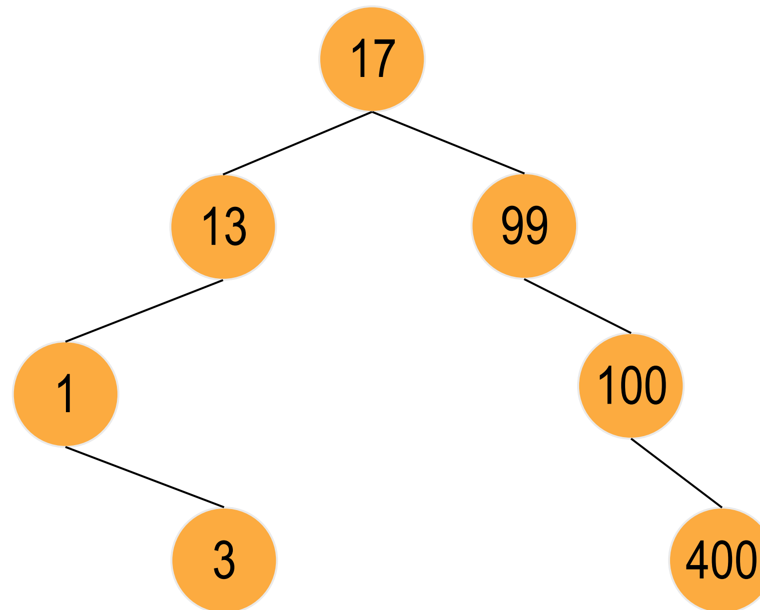
Árvores Binárias de Busca (ABB)

18/11

Definição

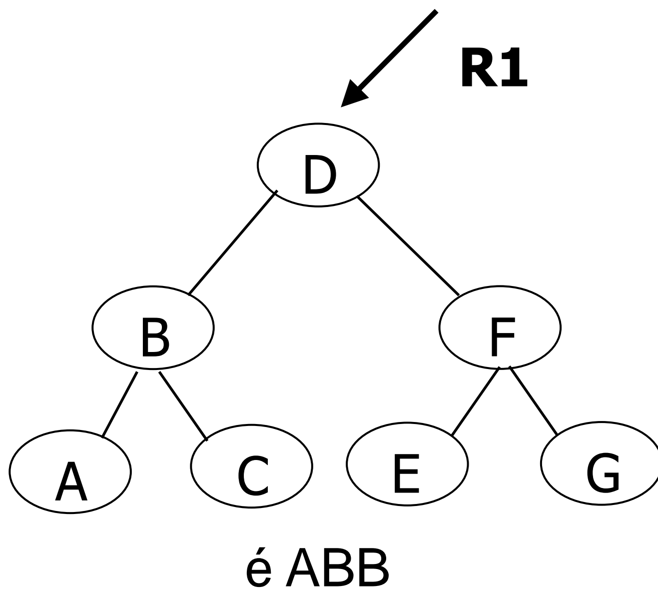
- Uma Árvore Binária de Busca possui as mesmas propriedades de uma AB, acrescida da seguintes propriedade:
  - Para todo nó da árvore, se seu valor é X, então:
    - Os nós pertencentes a sua sub-árvore esquerda possuem valores menores do que X;
    - Os nós pertencentes a sua sub-árvore direita possuem valores maiores do que X.
    - Não há elementos duplicados
    - Um percurso in-ordem nessa árvore resulta na seqüência de valores em ordem crescente
- Também chamadas de "árvores de pesquisa" ou "árvores ordenadas"

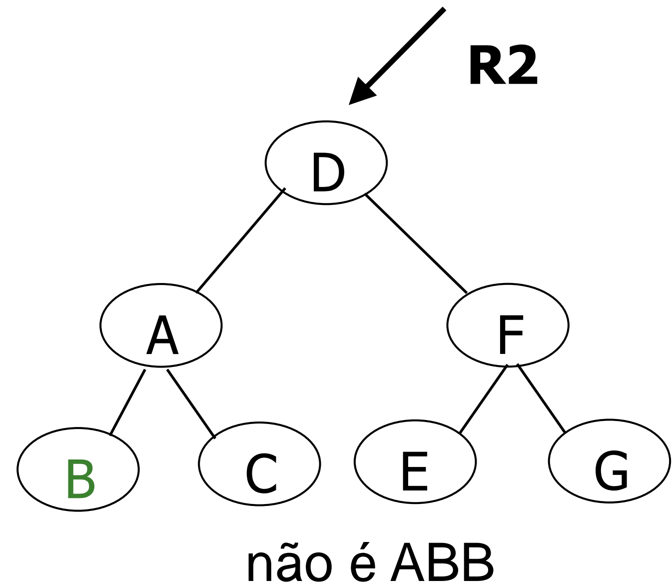
Exemplo: ABB com chave integer



- In-Ordem: 1, 3, 13, 17, 99, 100, 400

Exemplos: ABB com chave char





Características

- Se invertessemos as propriedades descritas na definição anterior,
  - de maneira que a sub-árvore esquerda de um nó contivesse valores maiores e a sub-árvore direita valores menores, o percurso in-ordem resultaria nos valores em ordem decrescente
- Uma árvore de busca criada a partir de um conjunto de valores não é única: o resultado depende da seqüência de inserção dos dados

ABB

- Por que uma ABB é boa?

- Imagine a situação
  - Sistema de votação por telefone (exemplo do programa antigo “Você decide” ou Big Brother)
    - Cada número só pode votar uma vez
    - Um sistema deve armazenar todos os números que já ligaram
    - A cada nova ligação, deve-se consultar o sistema para verificar se aquele número já votou; o voto é computado apenas se o número ainda não votou
    - A votação deve ter resultado on-line

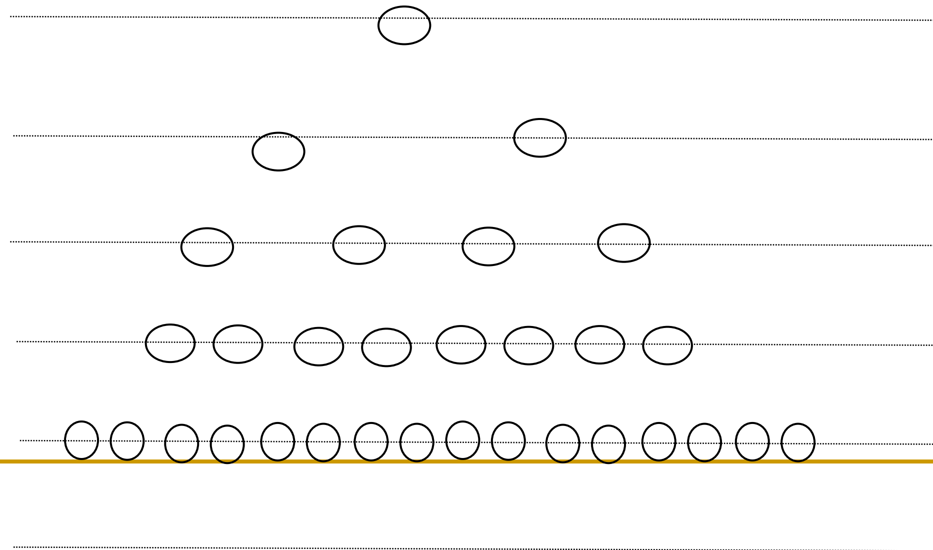
ABB

- Por que uma ABB é boa?

- Solução com ABBs
  - Cada número de telefone é armazenado em uma ABB
  - Suponha que em um determinado momento, a ABB tenha 1 milhão de telefones armazenados
  - Surge nova ligação e preciso saber se o número está ou não na árvore (se já votou ou não)

ABB

- Por que uma ABB é boa?
- Considere uma ABB com chaves uniformemente distribuídas (árvore cheia)

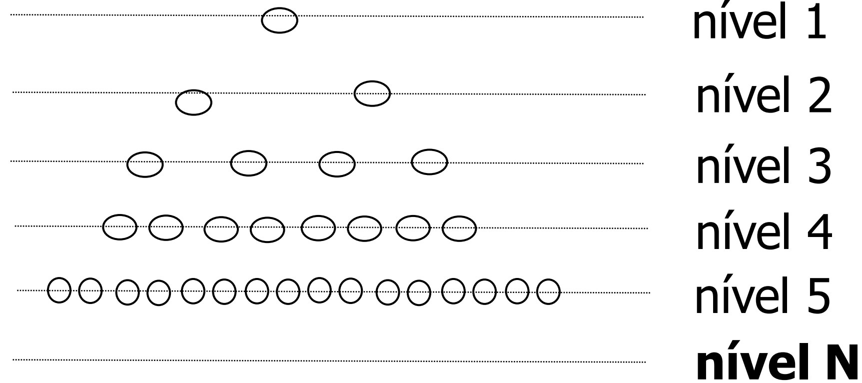


ABB

- Por que uma ABB é boa?
- Responda
  - Quantos elementos cabem em uma árvore de N níveis, como a anterior?
  - Como achar um elemento em uma árvore assim a partir da raiz?
  - Quantos nós se tem que visitar, no máximo, para achar o telefone na árvore, ou ter certeza de que ele não está na árvore?

ABB

- Por que uma ABB é boa?



Nível	Quantos cabem
1	1
2	3
3	7
4	15
...	...
N	**$2^N - 1$**
10	1.024
13	8.192
16	65.536
18	262.144
20	1 milhão
30	1 bilhão
	...

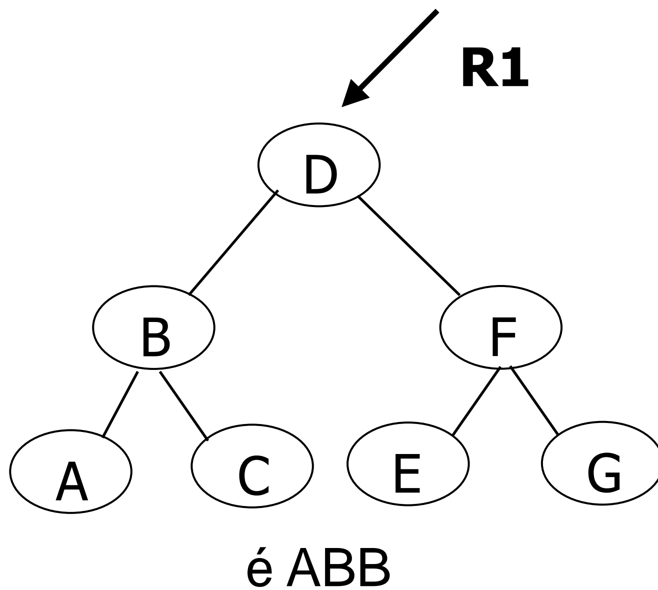
ABB

- Por que uma ABB é boa?

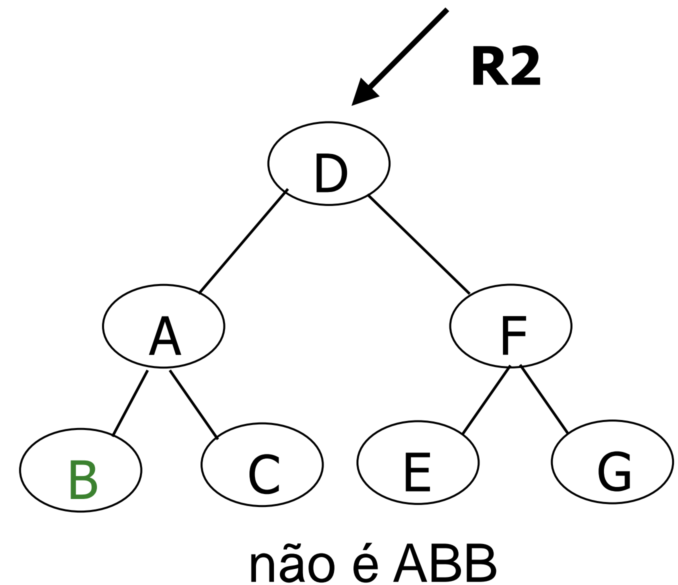
- Para se buscar em uma ABB
  - Em cada nó, compara-se o elemento buscado com o elemento presente
    - Se menor, percorre-se a subárvore esquerda
    - Se maior, percorre-se subárvore direita
  - Desce-se verticalmente até as folhas, no pior caso, sem passar por mais de um nó em um mesmo nível
  - Portanto, no pior caso, a busca passa por tantos nós quanto for a altura da árvore

ABB

- Exemplo: busca pelo elemento E nas árvores abaixo



é ABB



não é ABB

3 consultas

6 consultas

ABB

- Por que uma ABB é boa?
  - Buscas muito rápidas!!!

Listas versus ABB

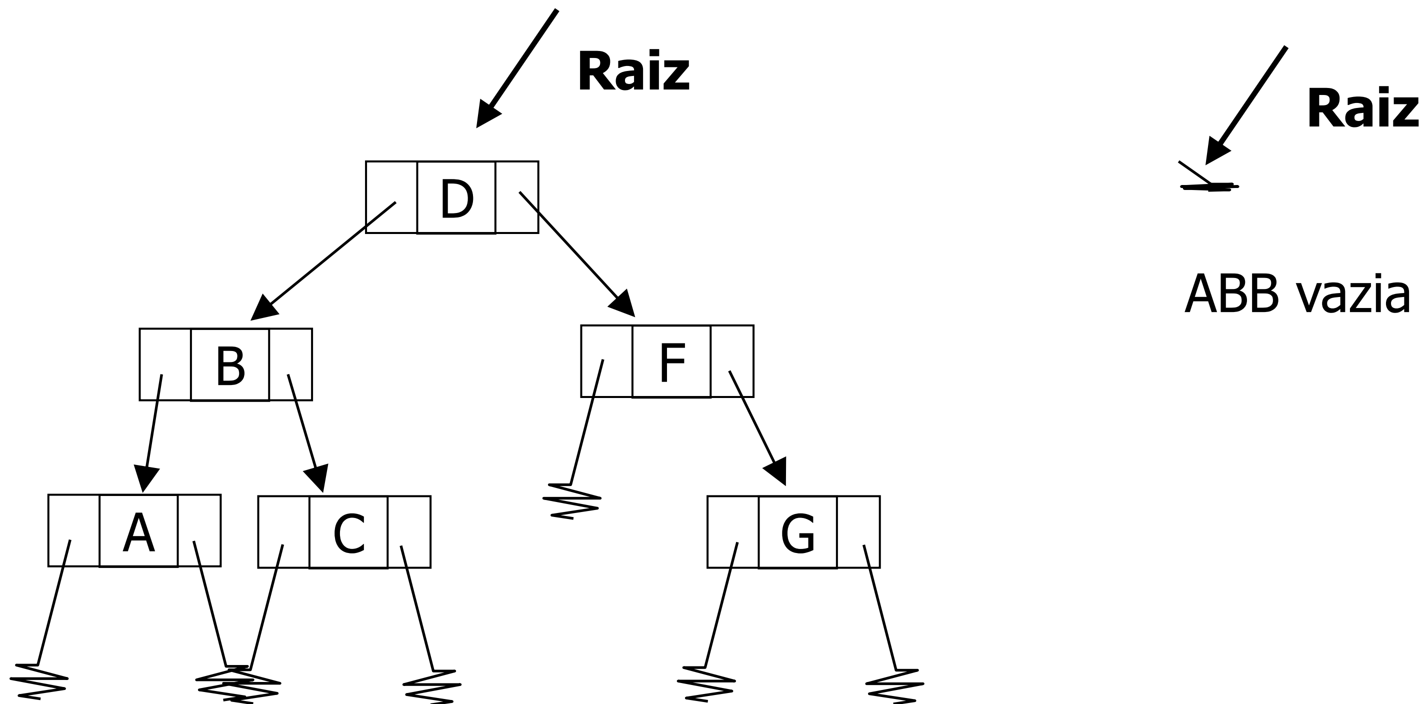
- O tempo de busca é estimado pelo número de comparações entre chaves.

- Em listas de n elementos, temos:
  - Sequenciais (Array): O(n) se não ordenadas; ou $O(\log_2 n)$, se ordenadas
  - Encadeadas (Dinâmicas): O(n)

- As ABB constituem a alternativa que combina as vantagens de ambos: são dinâmicas e permitem a busca binária $O(\log_2 n)$ – no caso de árvore balanceada

ABB

- Representação Encadeada Dinâmica



ABB

- Declaração

```
typedef int elem;
 // deve haver em problemas reais
typedef char *tipo_chave;
typedef struct arv *Arv;
```

```
struct arv {
  // este campo serve para as comparações em programas reais
    tipo_chave chave;
    // dados associados aa chave
    elem info;
    struct arv* esq;
    struct arv* dir;
};
```

Operações Básicas em ABB's

- **TAD ABB:**
- Definir (igual a AB)
- Remover
- Inserir
- Imprimir elementos em seqüência (igual a AB)
- Busca
- Destruir (igual a AB)

ABB

- Operações sobre a ABB
  - Devem considerar a ordenação dos elementos da árvore
    - Por exemplo, na inserção, deve-se procurar pelo local certo na árvore para se inserir um elemento

- Exercício
  - Prática com o TAD (exemplos)
  - Construa a partir do início uma ABB com os elementos K, E, C, P, G, F, A, T, M, U, V, X, Z

TAD ABB

- Busca
  - Comparando o parâmetro "chave" com a informação no nó "raiz", 4 casos podem ocorrer:
    - A árvore é vazia => a chave não está na árvore => fim do algoritmo
    - Elemento da raiz = chave => achou o elemento (está no nó raiz) => fim do algoritmo
    - Chave < elemento da raiz => chave pode estar na subárvore esquerda
    - Chave > elemento da raiz => chave pode estar na subárvore direita
  - Pergunta: quais os casos que podem ocorrer para a subárvore esquerda? E para a subárvore direita?

Os mesmos!

TAD ABB

- Exercício
  - Implementação da sub-rotina de busca de um elemento valor na árvore
  - Retorna NULL se não achou (insucesso) ou o ponteiro do elemento valor (sucesso) no caso de desejarmos acessar os campos associados ao campo chave
  - Arv busca(Arv p, elem valor);

```
Arv busca(Arv p, elem valor){

if (p == NULL)
        return NULL;
if (valor == p->info)
        return p;
if (valor < p->info)
        return busca(p->esq, valor);
else
        return busca(p->dir, valor);
}
```

Inserção

- Passos do algoritmo de inserção
  - Procure um “local” para inserir o novo nó, começando a procura a partir do nó-raiz;
  - Para cada nó-raiz de uma sub-árvore, compare; se o novo nó possui um valor menor do que o valor no nó-raiz (vai para sub-árvore esquerda), ou se o valor é maior que o valor no nó-raiz (vai para sub-árvore direita);
  - Se um ponteiro (filho esquerdo/direito de um nó-raiz) nulo é atingido, coloque o novo nó como sendo filho do nó-raiz.

Inserção

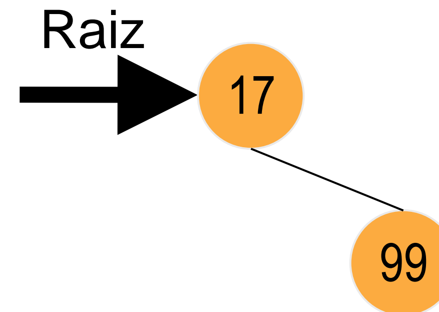
- Para entender o algoritmo considere a inserção do conjunto de números, na seqüência

  {17,99,13,1,3,100,400}

- No início a ABB está vazia!

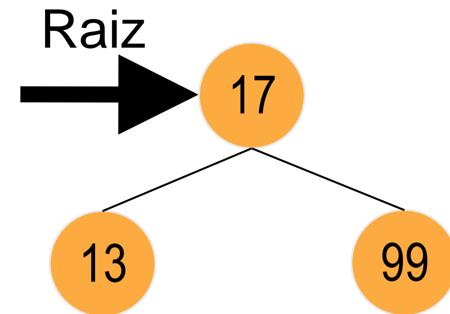
Inserção

- O número 17 será inserido tornando-se o nó raiz
- A inserção do 99 inicia-se na raiz. Compara-se 99 c/ 17.
- Como 99 > 17, 99 deve ser colocado na sub-árvore direita do nó contendo 17 (subárvore direita, inicialmente, nula)



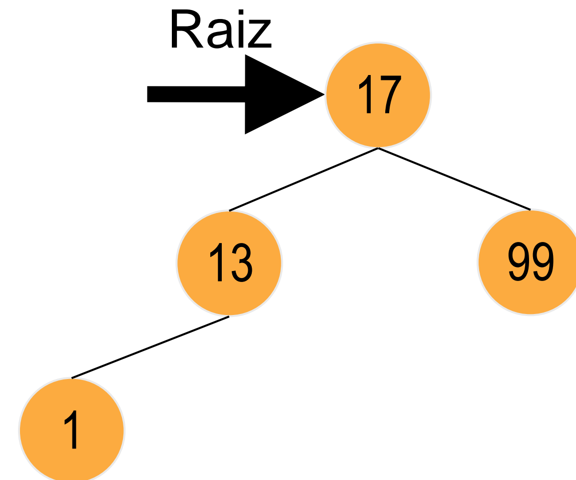
Inserção

- A inserção do 13 inicia-se na raiz
- Compara-se 13 c/ 17. Como 13 < 17, 13 deve ser colocado na sub-árvore esquerda do nó contendo 17
- Já que o nó 17 não possui descendente esquerdo, 13 é inserido na árvore nessa posição



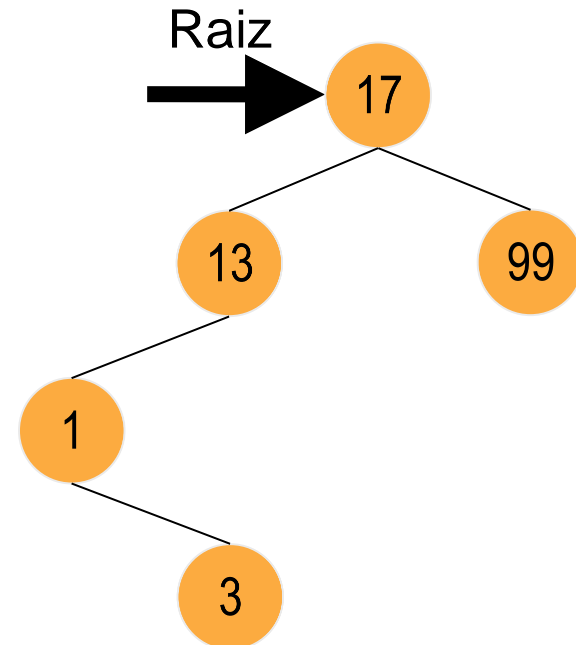
Inserção

- Repete-se o procedimento para inserir o valor 1
- 1<17, então será inserido na sub-árvore esquerda
- Chegando nela, encontra-se o nó 13, 1<13 então ele será inserido na sub-árvore esquerda de 13



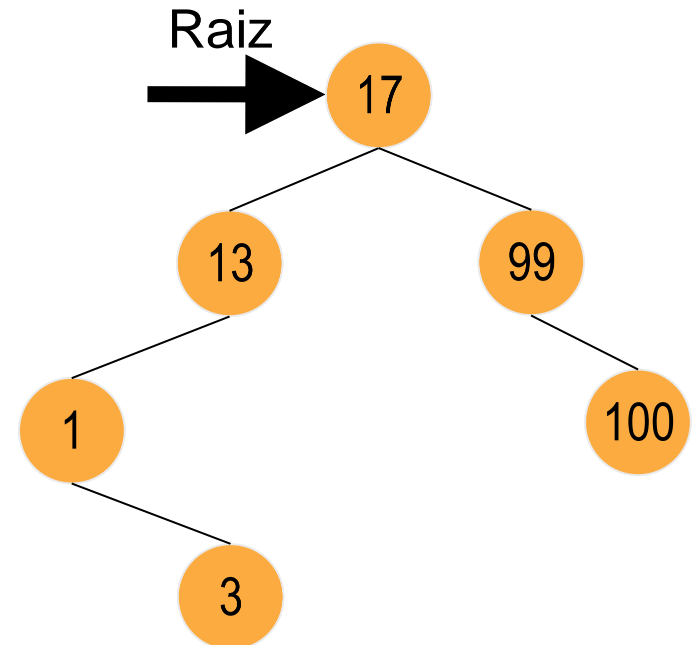
Inserção

- Repete-se o procedimento para inserir o elemento 3:
  - 3 < 17;
  - 3 < 13
  - 3 > 1



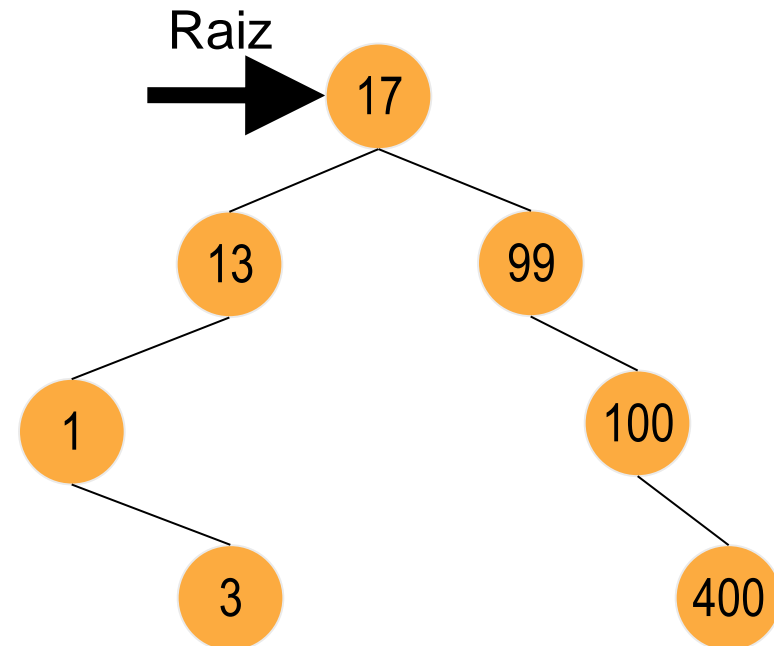
Inserção

- Repete-se o procedimento para inserir o elemento 100:
  - 100 > 17
  - 100 > 99



Inserção

- Repete-se o procedimento para inserir o elemento 400:
  - 400 > 17
  - 400 > 99
  - 400 > 100



TAD ABB

- Inserção

  - Estratégia geral
    - Inserir elementos como nós folha (sem filhos)
    - Procurar o lugar certo e então inserir

  - Comparando o parâmetro “chave” com a informação no nó “raiz”, 4 casos podem ocorrer

    - A árvore é vazia => insere o elemento, que passará a ser a raiz (se houver espaço); fim do algoritmo
    - Chave < elemento da raiz => insere na subárvore esquerda
    - Chave > elemento da raiz => insere na subárvore direita
    - Elemento da raiz = chave => o elemento já está na árvore; fim do algoritmo

TAD ABB

- Exercício
  - Implementação da sub-rotina de inserção de um elemento na árvore

  - O que o insere deve retornar??
    - Sucesso ou insucesso,
      - além do ponteiro para o nó inserido, para o caso de desejarmos complementar as informações do nó chave, como usaremos no nosso Projeto 3.

  - int insere(Arv *p, elem v);

```
int insere(Arv *p, elem v){
if (*p==NULL) {
   *p = (Arv) malloc(sizeof(struct arv));
    if (*p == NULL)
       return 0; // falha na inserção: não há espaço
    else {
       (*p)->info = v;
       (*p)->esq = NULL;
       (*p)->dir = NULL;
       return 1; // inserção com sucesso
    }
}
if (v < (*p)->info)
   return  insere(&(*p)->esq,v); // insere na sae
else if (v > (*p)->info)
        return insere(&(*p)->dir,v); // insere na sad
      else return 0; // elemento duplicado; não insere
}
```

Custo da Operação de Inserção

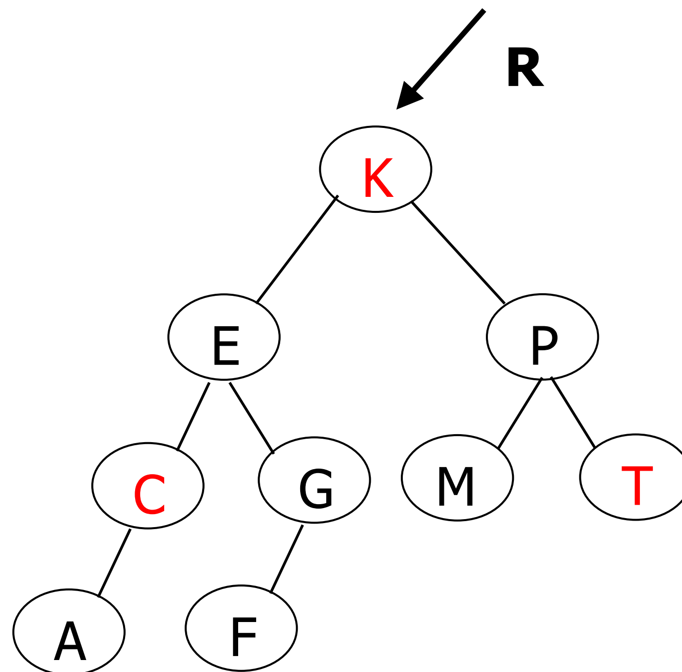
- A inserção requer uma busca pelo lugar da chave, portanto, com custo de uma busca qualquer (tempo proporcional à altura da árvore).

- O custo da inserção, após a localização do lugar, é constante; não depende do número de nós.

- Logo, tem complexidade análoga à da busca.

TAD ABB

- Remoção
  - Prática com o TAD (exemplos)
  - Para a árvore abaixo, remova os elementos T, C e K, nesta ordem (cada um destes é um caso diferente)



TAD ABB

- Remoção

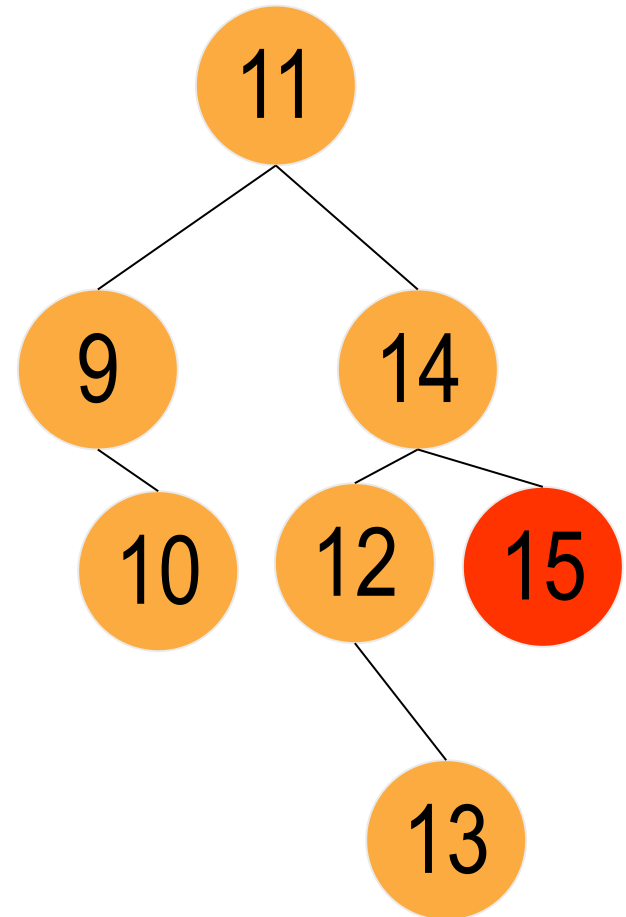
  - Caso 1 (remover T): o nó a ser removido (R) não tem filhos
    - Remove-se o nó
    - R aponta para NULL (importante no caso de ser a raiz)

  - Caso 2 (remover C): o nó a ser removido tem 1 único filho
    - “Puxa-se” o filho para o lugar do pai
    - Remove-se o nó

  - Caso 3 (remover K): o nó a ser removido tem 2 filhos
    - Acha-se a maior chave da subárvore esquerda (ou o menor da direita)
    - R recebe o valor dessa chave
    - Remove-se a maior chave da subárvore esquerda (ou a menor da direita)

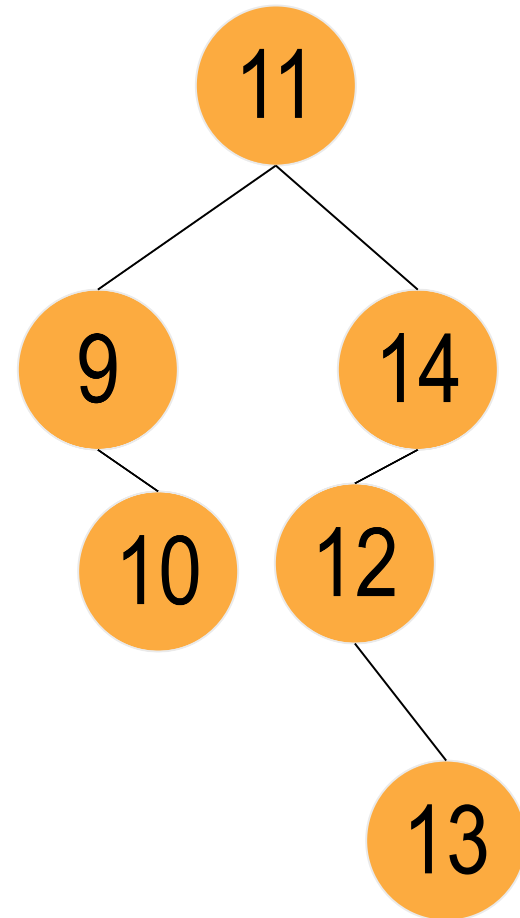
Remoção – Caso 1

- Caso o valor a ser removido seja o 15
- pode ser removido sem problema, não requer ajustes posteriores



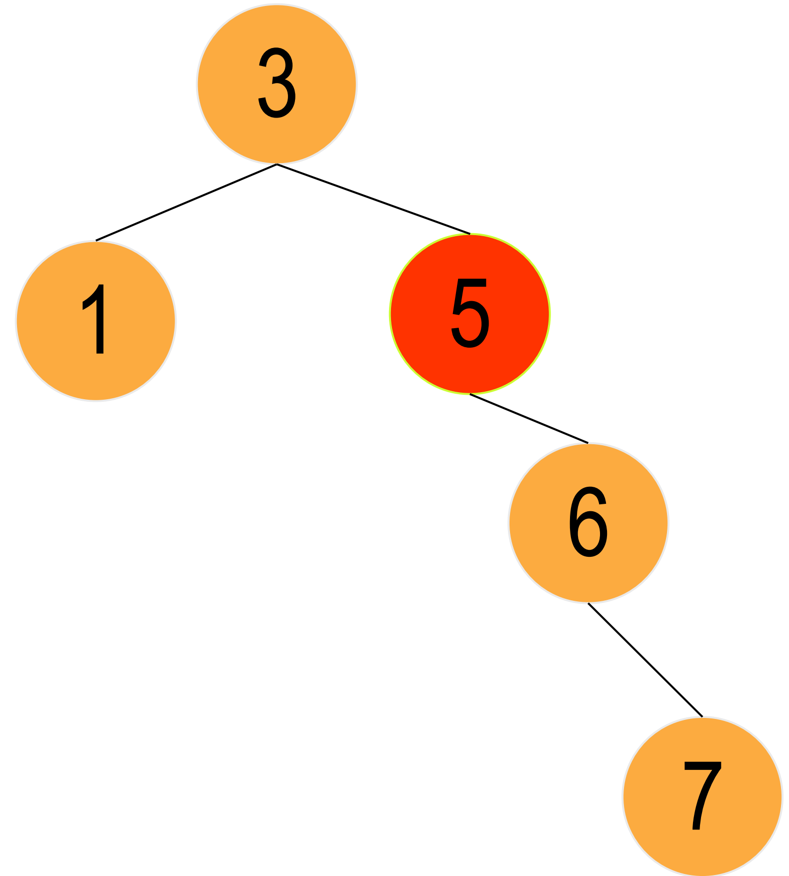
Remoção – Caso 1

- Os nós com os valores 10 e 13 também podem ser removidos!



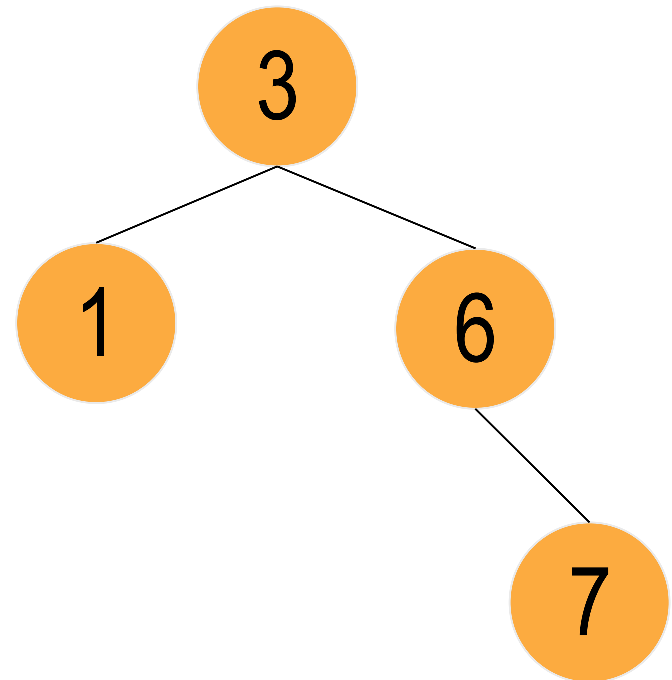
Remoção – Caso 2

- Removendo-se o nó com o valor 5
- Como ele possui uma sub-árvore direita, o nó contendo o valor 6 pode "ocupar" o lugar do nó removido



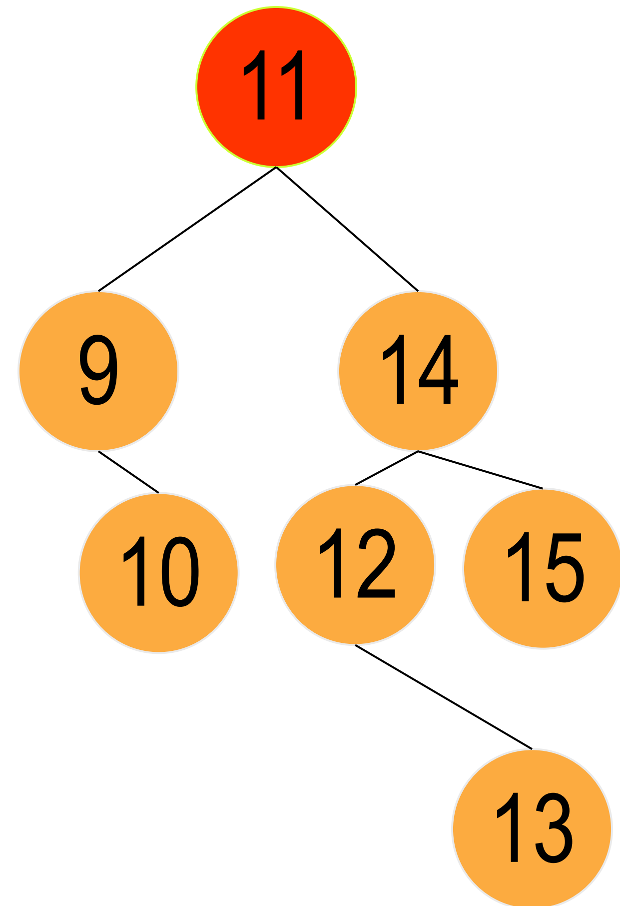
Remoção – Caso 2

- Esse segundo caso é análogo caso existisse um nó com somente uma sub-árvore esquerda



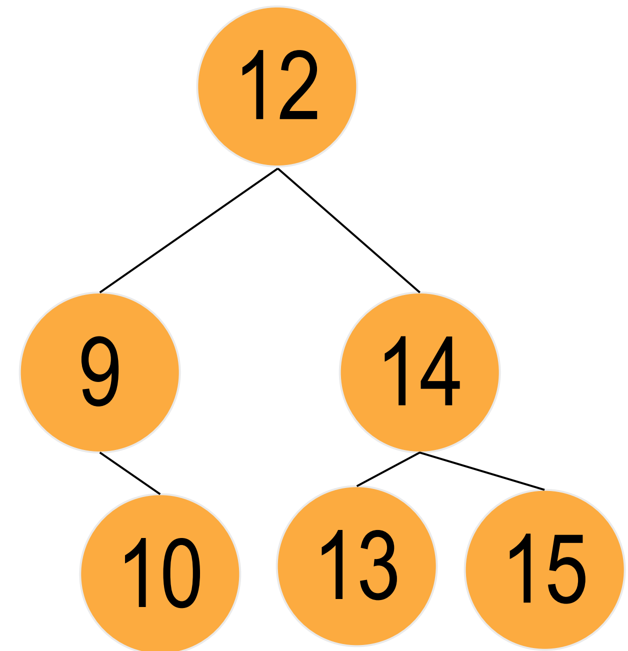
Remoção – Caso 3

- Eliminando-se o nó de chave 11
- Neste caso, existem 2 opções:
  - O nó com chave 10 pode "ocupar" o lugar do nó-raiz, ou
  - O nó com chave 12 pode "ocupar" o lugar do nó-raiz



Remoção – Caso 3

- Esse terceiro caso, também se aplica ao nó com chave 14, caso seja retirado.
  - Nessa configuração, o nó com chave 15 poderia "ocupar" o lugar.



TAD ABB

- Exercício
  - Implementação da sub-rotina de remoção de um elemento da árvore
  - O que o remove deve retornar??
    - Sucesso ou insucesso,
      - além da árvore atualizada, pois a remoção pode afetar o endereço da raiz.

  - int remover(Arv *p, elem x)

```
int remover(Arv *p, elem x) {
    Arv aux;
    if (*p==NULL)
      return 0; // árvore vazia ou não achou
// Localiza o elemento a ser removido
    else if (x<(*p)->info)
        return(remover(&(*p)->esq,x));
    else if (x>(*p)->info)
        return(remover(&(*p)->dir,x));
    else { // achou
        //caso 1: o nó não tem filhos
        if (((*p)->esq==NULL) && ((*p)->dir==NULL)) {
          free(*p);
          *p=NULL;
          return 1;
        }
```

```
//caso 2a: só há o filho direito
    else if ((*p)->esq==NULL) {
        aux=*p;
        *p=(*p)->dir;
        free(aux);
        return 1;
    }
    //caso 2b: só há o filho esquerdo
    else if ((*p)->dir==NULL) {
        aux=*p;
        *p=(*p)->esq;
        free(aux);
        return 1;
    }
    //caso 3: há os dois filhos
    else {
        (*p)->info=busca_maior((*p)->esq);
        return(remover(&(*p)->esq,(*p)->info));
    }
  }
}
```

Embora este algoritmo seja fácil de entender, o custo para remover um nó com 2 filhos é caro, pois:

1) Ativa a busca do maior nó da esquerda
2) Ativa a remoção de tal nó

Separadmente!

Uma melhoria seria já remover o maior da esquerda, sem chamar o procedimento recursivamente.

```
elem busca_maior(Arv p) {
    while (p->dir!=NULL)
        p=p->dir;
    return (p->info);
}
```

Custo da Operação de Remoção

- A remoção requer uma busca pela chave do nó a ser removido, portanto, com custo de uma busca qualquer (tempo proporcional à altura da árvore).

- O custo da remoção, após a localização do nó dependerá de 2 fatores:
  - do caso em que se enquadra a remoção: se o nó tem 0, 1 ou 2 sub-árvores; se 0 ou 1 filho, custo é constante.
  - de sua posição na árvore, caso tenha 2 sub-árvores (quanto mais próximo do último nível, menor esse custo; é o custo da busca pelo maior à esquerda ou menor à direita)

- Repare que um maior custo na busca implica num menor custo na remoção pp. dita; e vice-versa. Porque??

- Logo, tem complexidade dependente da altura da árvore.

Conclusão sobre o custo da busca em ABB

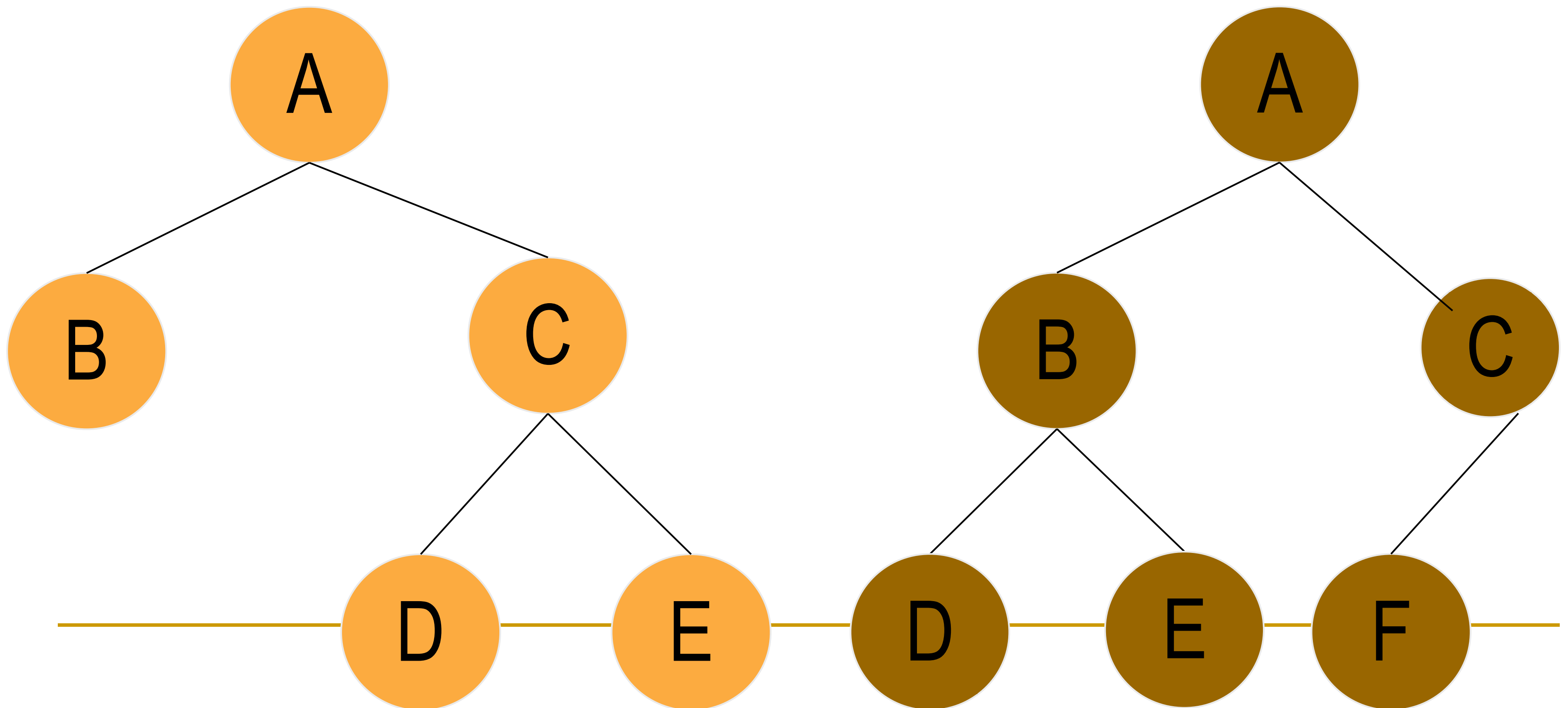
- Pior caso: número de passos é determinado pela altura da árvore

- Altura da ABB depende da seqüência de inserção das chaves...
  - Considere, p.ex., o que acontece se uma seqüência ordenada de chaves é inserida...
  - Seria possível gerar uma árvore balanceada com essa mesma seqüência, se ela fosse conhecida a priori. Como?

- Busca é eficiente se árvore razoavelmente balanceada...

Árvore Binária Balanceada

- Para cada nó, as alturas de suas duas sub-árvores diferem de, no máximo, 1



Árvore Binária Perfeitamente Balanceada

- O número de nós de suas sub-árvores esquerda e direita difere em, no máximo, 1
- É a árvore de altura mínima para o conjunto de chaves
- Toda AB Perfeitamente Balanceada é Balanceada, sendo que o inverso não é necessariamente verdade
- Os algoritmos de inserção e remoção vistos não garantem que a árvore resultante de uma inserção/remoção seja perfeitamente balanceada ou mesmo apenas balanceada

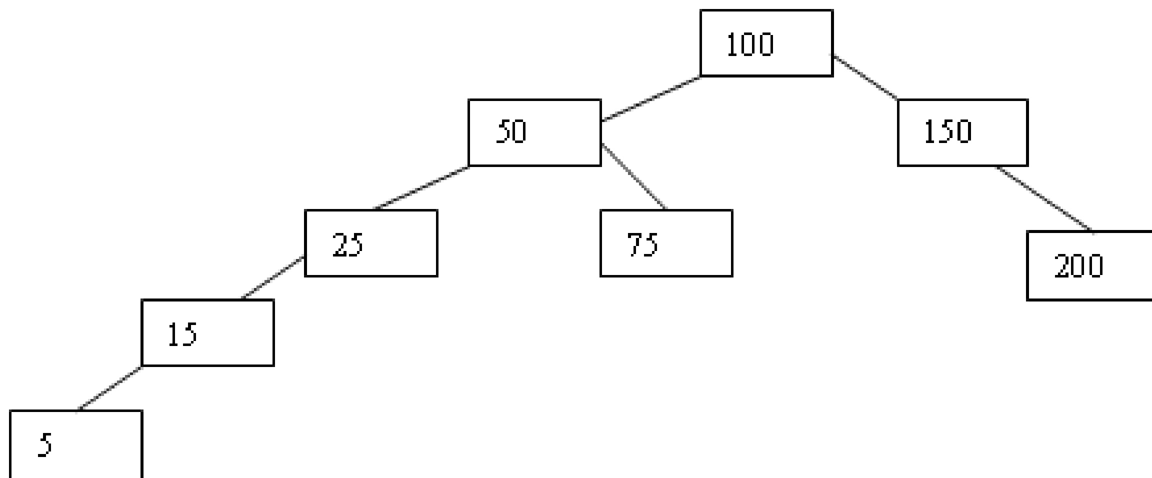
Soluções para o desbalanceamento

- Existem, pelo menos, 2 meios para solucionar o problema:
- - Utilizar Árvores AVL cujos procedimentos de inserção e remoção garantem o balanceamento (próximo assunto)
- - Fazer um rebalanceamento GLOBAL da árvore, após várias inserções e remoções

Rebalanceamento Global

Rebalanceamento Global para manter a Árvore Balanceada

1- **Ordenar os registros em ordem crescente das chaves.**
   Percorrendo em in-ordem a árvore para obter uma seqüência ordenada em arrays
2- **O registro do meio do array torna-se a raiz da árvore binária**
3- **Tome a metade esquerda da árvore e repita o passo 2 para a sub-árvore esquerda**
4- **Idem para a metade direita e sub-árvore direita**
5- **Repita o processo até não poder dividir mais**



5	15	25	50	75	100	150	200