

Exercício 1. Determine o posto das matrizes A e B a seguir

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercício 2. Mostre que se uma matriz A admite inversa, então ela é única.

Exercício 3. Determine a matriz A associada à forma quadrática

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 - 3x_3^2.$$

Exercício 4. Sejam duas variáveis aleatórias $Y_1 = X$ e $Y_2 = 1 - X$ onde $E(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Obtenha a matriz de variâncias e covariâncias de $(Y_1, Y_2)'$ e verifique que é positiva semi-definida.

Exercício 5. Seja A uma matriz $p \times n$ qualquer. Prove que $A'A$ é simétrica.

Exercício 6. Considere $\mathbf{X} = [X_0, X_1, X_2]'$ $\sim N_3(\mathbf{0}, \Sigma)$ com $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

- Determine a distribuição marginal de X_1 .
- Determine a distribuição conjunta de X_1 e X_2 .
- Determine a distribuição condicional de X_0 dado $X_1 = x_1$ e $X_2 = x_2$.
- Determine ρ_{12} , ρ_{01} e ρ_{02} , em que $\rho_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j) / \sqrt{\text{Var}(X_i)\text{Var}(X_j)}$.
- Determine a distribuição de $Z = 4X_0 - 6X_1 + X_2$.
- Determine a covariância entre Z_1 e Z_2 , onde $Z_1 = X_0 - X_1 + 2X_2$ e $Z_2 = 2X_1$.

Exercício 7. Seja $\mathbf{X} = [X_0, X_1, X_2]'$ um vetor aleatório tridimensional com função geradora de momentos $m_x(t) = \exp(t_1 - t_2 + 2t_3 + t_1^2 + \frac{1}{2}t_2^2 + 2t_3^2 - \frac{1}{2}t_1t_2 - t_1t_3)$. Determine c tal que $P(2X_1 - 3X_2 + X_3 > c) = 0,95$.

Exercício 8. Se $[X, Y]'$ tem distribuição normal bivariada, com $X \sim N(8, 4)$ e $Y \sim N(3, 2)$ e que $E(Y|X = x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x$, determine o coeficiente de correlação entre X e Y e $\text{Var}(Y|X = x)$.

Exercício 9. Sejam $Y \sim N(0, I)$, $X = AY$, $U = BY$ e $V = CY$, onde A , B e C são matrizes $r \times n$ de posto r com $r < n$. Se $\text{Cov}(X, U) = 0$ e $\text{Cov}(X, V) = 0$, mostre que X é independente de $U + V$.

Exercício 10. Sejam \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 , \mathbf{X}_3 e \mathbf{X}_4 vetores aleatórios independentes com distribuição $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Determine a distribuição dos vetores aleatórios $\mathbf{V}_1 = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$ e $\mathbf{V}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{X}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$. Determine a distribuição conjunta de \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 .