1

2ª PROVA 2024

Exemplo 5.18. Consideremos as v.a.'s X_1 e X_2 com distribuição normal idêntica segundo

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2} \qquad -\infty < x_1 < \infty$$

e analogamente para X_2. Determine a fdpc de $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$.

Neste caso aplica-se a Equação 5.67. As soluções de x_1 e x_2 em termos de y_1 e y_2 são

$$x_1 = g_1^{-1}(\mathbf{y}) = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad x_2 = g_2^{-1}(\mathbf{y}) = \frac{y_1 - y_2}{2} \tag{5.71}$$

O jacobiano neste caso toma a forma

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Logo, a Equação 5.67 conduz a

$$\begin{aligned} f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) &= f_{X_1}[g_1^{-1}(\mathbf{y})] f_{X_2}[g_2^{-1}(\mathbf{y})] |J| \\ &= \frac{1}{4\pi} e^{-(y_1+y_2)^2/8} e^{-(y_1-y_2)^2/8} \\ &= \frac{1}{4\pi} e^{-(y_1^2+y_2^2)/4} \qquad (-\infty, -\infty) < (y_1, y_2) < (\infty, \infty) \end{aligned} \tag{5.72}$$

É interessante notar que o resultado dado pela Equação 5.72 pode escrever-se como

$$f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2) \tag{5.73}$$

onde

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-y_1^2/4} \qquad -\infty < y_1 < \infty$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-y_2^2/4} \qquad -\infty < y_2 < \infty$$

o que implica que, embora Y_1 e Y_2 sejam ambas funções de X_1 e X_2, são independentes e identicamente distribuídas segundo a lei normal.

$2^{\underline{a}}$ PROVA – 2024

Esboço de solução

$\boxed{2}$ X: nº diário de caminhões em manutenção.

Suposição: $X \sim \text{Poisson}(2{,}3)$.

(a) $P(X=0) = e^{-2{,}3} = 0{,}10026$.

(b) Y: nº de caminhões de reserva insuficientes em um intervalo de cinco dias. Suposição: $Y \sim \text{binomial}(5, \theta)$,

$\theta = P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\}$

$= 0{,}40396$.

$P(Y=0) + P(Y=1) = \binom{5}{0} \cdot \theta^0 \times (1-\theta)^5 + \binom{5}{1} \cdot \theta \times (1-\theta)^4 = 0{,}33015$.

$\boxed{3}$ X: tempo de vida, em 1000h.

Pelo enunciado, $X \sim \text{exponencial}(1)$.

$$\text{Lucro} = \begin{cases} 3, & \text{se } X > 0{,}8 \\ -2, & \text{se } X \leq 0{,}8, \end{cases}$$

sendo que $P(X \leq 0{,}8) = \int_0^{0{,}8} e^{-x}\,dx = (1 - e^{-x})\Big|_0^{0{,}8}$

$= 0{,}55067$.

$E(\text{Lucro}) = 3 \times P(X > 0{,}8) - 2 \times P(X \leq 0{,}8)$

$= 3 \times \{1 - P(X \leq 0{,}8)\} - 2 \times P(X \leq 0{,}8) = 0{,}24664$.

$\boxed{4}$ X: espessura, em mm.

Y: nº de chapas inspecionadas até que ocorra a primeira chapa fora de especificação.

Suposição: $Y \sim \text{geométrica}(\theta)$, em que

$\theta = P(3 \leq X < 7/2) + P(9/2 < X \leq 5) = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{\text{área de triângulo}} \times 2 = 1/4$.

(a) $P(Y=3) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64} = 0{,}140625$.

(b) $E(Y) = 1/\theta = 4$.