Análise de algoritmos

Parte I

Recursos usados por um algoritmo

- Uma vez que um procedimento está pronto/disponível, é importante determinar os recursos necessários para sua execução
  - Tempo
  - Memória

- Qual o principal quesito? Por que?

Análise de algoritmos

- Um algoritmo que <u>soluciona um determinado problema</u>, mas requer o processamento de um ano, não deve ser usado

- O que dizer de uma afirmação como a abaixo?
  - "Desenvolvi um novo algoritmo chamado TripleX que leva 14,2 segundos para processar 1.000 números, enquanto o método SimpleX leva 42,1 segundos"

- Você trocaria o SimpleX que roda em sua empresa pelo TripleX?

Análise de algoritmos

- A afirmação tem que ser examinada, pois há diversos fatores envolvidos
  - Características da máquina em que o algoritmo foi testado
    - Quantidade de memória
  - Linguagem de programação
    - Compilada vs. interpretada
    - Alto vs. baixo nível
  - Implementação pouco cuidadosa do algoritmo SimpleX vs. “super” implementação do algoritmo TripleX
  - Quantidade de dados processados
    - Se o TripleX é mais rápido para processar 1.000 números, ele também é mais rápido para processar quantidades maiores de números, certo? Mas, quanto mais rápido?

Análise de algoritmos

- A comunidade de computação começou a pesquisar formas de comparar algoritmos de forma independente de
  - Hardware
  - Linguagem de programação
  - Habilidade do programador

- Portanto, quer-se comparar procedimentos e não programas
  - Área conhecida como “análise/complexidade de algoritmos”

Eficiência de algoritmos

- Sabe-se que
  - Processar 10.000 números leva mais tempo do que 1000 números
  - Cadastrar 10 pessoas em um sistema leva mais tempo do que cadastrar 5
  - Etc.

Então, pode ser uma boa ideia <u>estimar a eficiência de um algoritmo em função do tamanho do problema.</u>

Assume-se que “n” é o tamanho do problema ou da entrada. O que n representa depende do problema. Em geral, n é o número de elementos que serão processados.E calcula-se o número de operações que serão realizadas sobre os n elementos, ou seja, uma expressão em função de n.

Quem é o Parâmetro n?

Considere o papel do parâmetro **n** nas seguintes classes de problemas:

- Encontrar o maior número de uma sequência de n inteiros.

- Resolver um conjunto de equações algébricas lineares Ax = b, onde A é uma matriz real nxn e b é um vetor real de tamanho n.

- Seja W um array unidimensional de n inteiros distintos. Ordenar as entradas de W em ordem crescente.

- Avaliar o polinômio $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k$ **quando** $x=x_0$.

Quem é o Parâmetro n?

Em cada um desses problemas, o parâmetro *n* provê uma medida do tamanho do problema no sentido de que o tempo requerido para solucioná-lo, ou o espaço de armazenamento necessário, ou ambos, serão incrementados conforme *n* aumenta.

A ordem de magnitude dará exatamente a proporção em que ocorre esse incremento.

Eficiência de algoritmos

- O melhor algoritmo é aquele que requer menos operações sobre a entrada, pois é o mais rápido
  - O tempo de execução do algoritmo pode variar em diferentes máquinas, mas o número de operações é uma boa medida de desempenho de um algoritmo
- De que operações estamos falando?
- Toda operação leva o mesmo tempo?

Exemplo: TripleX vs. SimpleX

- TripleX: para uma entrada de tamanho n, o algoritmo realiza n^2+n operações
  - Pensando em termos de função: $f(n)=n^2+n$

- SimpleX: para uma entrada de tamanho n, o algoritmo realiza 1.000n operações
  - $g(n)=1.000n$

Exemplo: TripleX vs. SimpleX

- Faça os cálculos do desempenho de cada algoritmo para cada tamanho de entrada

Tamanho da entrada (n)	1	10	100	1.000	10.000
$f(n)=n^2+n$					
$g(n)=1.000n$					

Exemplo: TripleX vs. SimpleX

- Faça os cálculos do desempenho de cada algoritmo para cada tamanho de entrada

Tamanho da entrada (n)	1	10	100	1.000	10.000
$f(n)=n^2+n$	2	110	10.100	1.001.000	100.010.000
$g(n)=1.000n$	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000

- A partir de n=1.000, f(n) mantém-se maior e cada vez mais distante de g(n)
  - Diz-se que f(n) cresce mais rápido do que g(n)

Análise assintótica

- Deve-se preocupar com a eficiência de algoritmos quando o tamanho de n cresce para valores muito grandes

- Definição: *a eficiência assintótica de um algoritmo descreve sua eficiência relativa quando n torna-se grande*

- Portanto, para comparar 2 algoritmos, determinam-se as taxas de crescimento de cada um: o algoritmo com menor taxa de crescimento rodará mais rápido quando o tamanho do problema for grande

Análise assintótica

- Atenção

  - Algumas funções podem não crescer com o valor de n
    - Quais?

  - Também se pode aplicar os conceitos de análise assintótica para a quantidade de memória usada por um algoritmo
    - Mas não é tão útil, pois é difícil estimar os detalhes exatos do uso de memória e seu impacto

Relembrando um pouco de matemática...

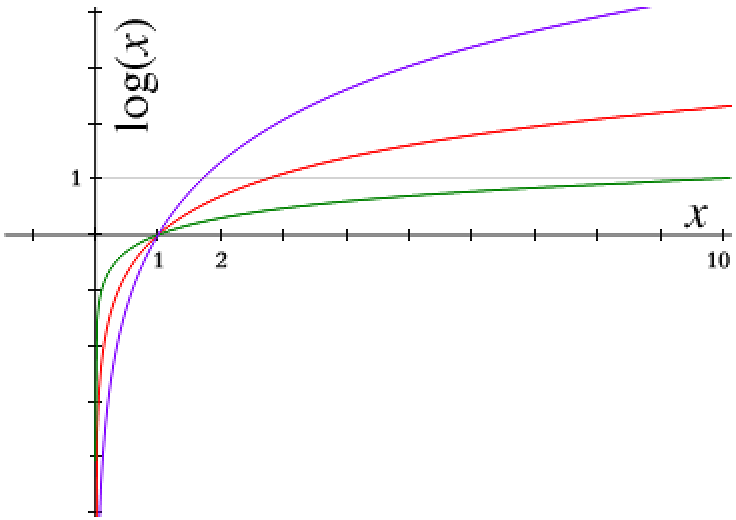
- Expoentes
  - $x^a x^b = x^{a+b}$
  - $x^a/x^b = x^{a-b}$
  - $(x^a)^b = x^{ab}$
  - $x^n+x^n = 2x^n$ (diferente de x^{2n})
  - $2^n+2^n = 2^{n+1}$

Relembrando um pouco de matemática...

- Logaritmos (usaremos a base 2, a menos que seja dito o contrário)
  - $x^a=b \rightarrow \log_x b=a$
  - $\log_a b = \log_c b/\log_c a$, se $c>0$
  - $\log ab = \log a + \log b$
  - $\log a/b = \log a - \log b$
  - $\log(a^b) = b \log a$

Relembrando um pouco de matemática...

- Logaritmos (usaremos a base 2, a menos que seja dito o contrário)
  - E o mais importante
    - log x < x para todo x>0
  - Alguns valores
    - log 1=0, log 2=1,
      log 1.024=10,
      log 1.048.576=20



Exemplo para várias bases

Relembrando um pouco de matemática...

- Séries (demonstre a igualdade)

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

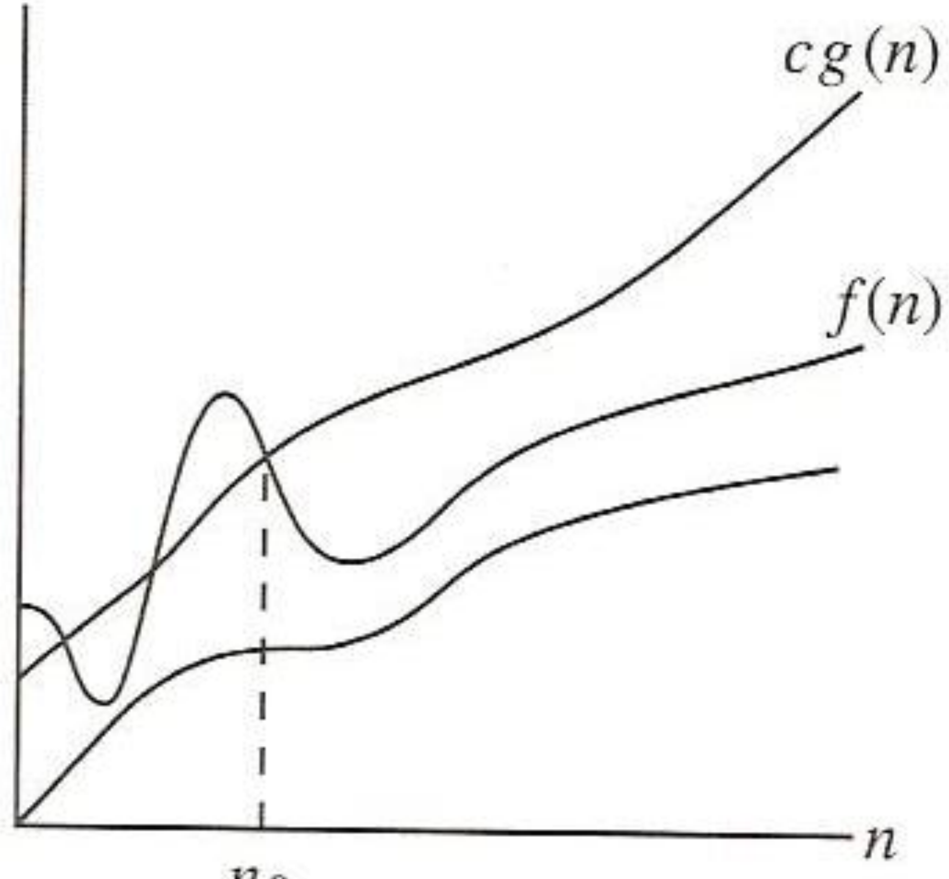
$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

Algumas notações

- Notações que usaremos na análise de algoritmos
  - $T(n) = O(g(n))$ (lê-se *big-oh*, *big-o* ou “da ordem de”) se existirem constantes c e n_0 tal que $T(n) \leq c * g(n)$ quando $n \geq n_0$
    - A taxa de crescimento de T(n) é menor ou igual à taxa de g(n). T(n) é limitada superiormente por g(n).

Algumas notações

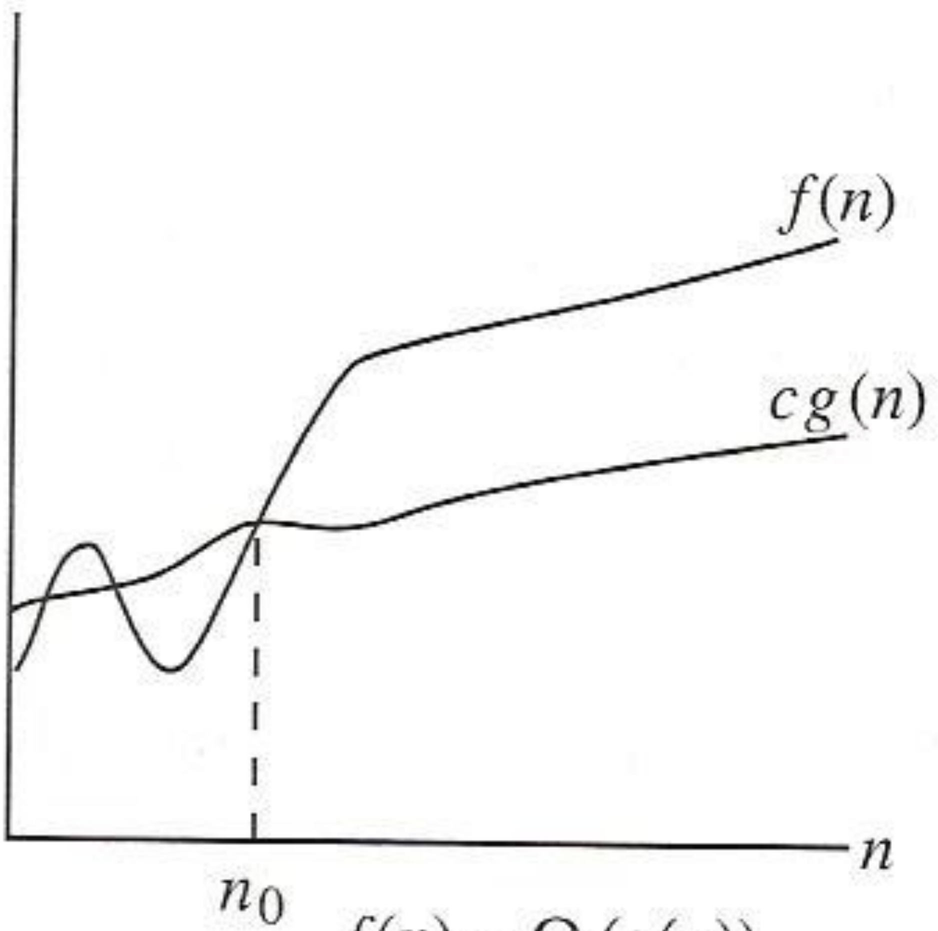


$f(n) = O(g(n))$

Algumas notações

- Notações que usaremos na análise de algoritmos
  - $T(n) = \Omega(g(n))$ (lê-se "ômega") se existirem constantes c e n_0 tal que $T(n) \geq c * g(n)$ quando $n \geq n_0$
    - A taxa de crescimento de T(n) é maior ou igual à taxa de g(n). T(n) é limitada inferiormente por g(n).

Algumas notações

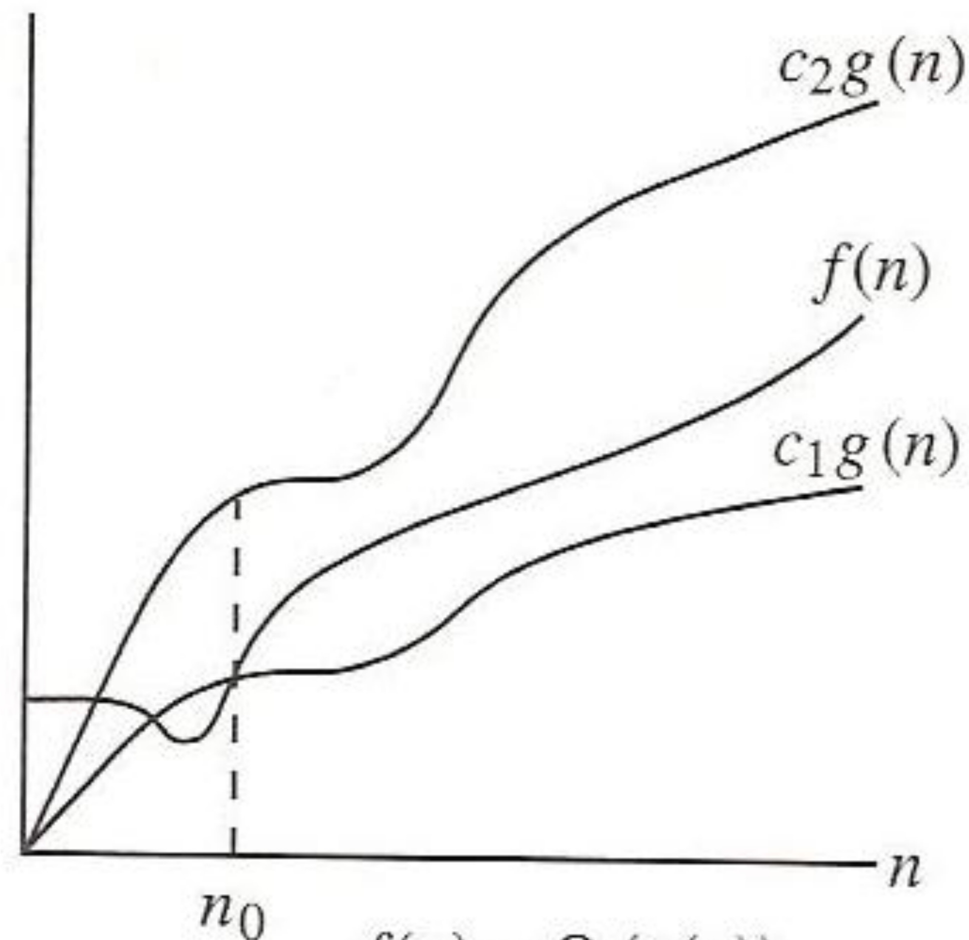


$f(n) = \Omega(g(n))$

Algumas notações

- Notações que usaremos na análise de algoritmos
  - $T(n) = \Theta(g(n))$ (lê-se "theta") se e somente se $T(n) = O(g(n))$ e $T(n) = \Omega(g(n))$
    - A taxa de crescimento de $T(n)$ é igual à taxa de $g(n)$

Algumas notações



$f(n) = \Theta\,(g(n))$

Algumas notações

- O uso das notações permite comparar a taxa de crescimento das funções correspondentes aos algoritmos
  - Não faz sentido comparar pontos isolados das funções, já que podem não corresponder ao comportamento assintótico

Exemplo

- Para 2 algoritmos quaisquer, considere as funções de eficiência correspondentes a 1.000n e n^2
  - $1.000n = O(n)$
  - $n^2 = \Theta(n^2)$
  - $1.000n = O(n^2)$
  - O primeiro é mais rápido que o seguinte a partir de n = 1.000

Outros exemplos

- A função n^3 cresce mais rapidamente que n^2
  - $n^2 = O(n^3)$
  - $n^3 = \Omega(n^2)$

- Se $f(n)=n^2$ e $g(n)=2n^2$, então essas duas funções têm taxas de crescimento iguais
  - Portanto, $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$

Taxas de crescimento

- Algumas regras

  - Se $T_1(n) = O(f(n))$ e $T_2(n) = O(g(n))$, então
    - $T_1(n) + T_2(n) = \max(O(f(n)), O(g(n)))$
    - $T_1(n) * T_2(n) = O(f(n) * g(n))$

      - Para que precisamos desse tipo de cálculo?

Taxas de crescimento

- Algumas regras
  - Se T(x) é um polinômio qualquer de grau n, então
    - $T(x) = \Theta(x^n)$
      - Relembrando: um polinômio de grau n é uma função que possui a forma abaixo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots . a_1 x + a_0$$

seguindo a seguinte classificação em função do grau

- Grau 0: polinômio constante
- Grau 1: polinômio linear
- Grau 2: polinômio quadrático
- Grau 3: polinômio cúbico

Se f(*x*)=0, tem-se o polinômio nulo

Taxas de crescimento

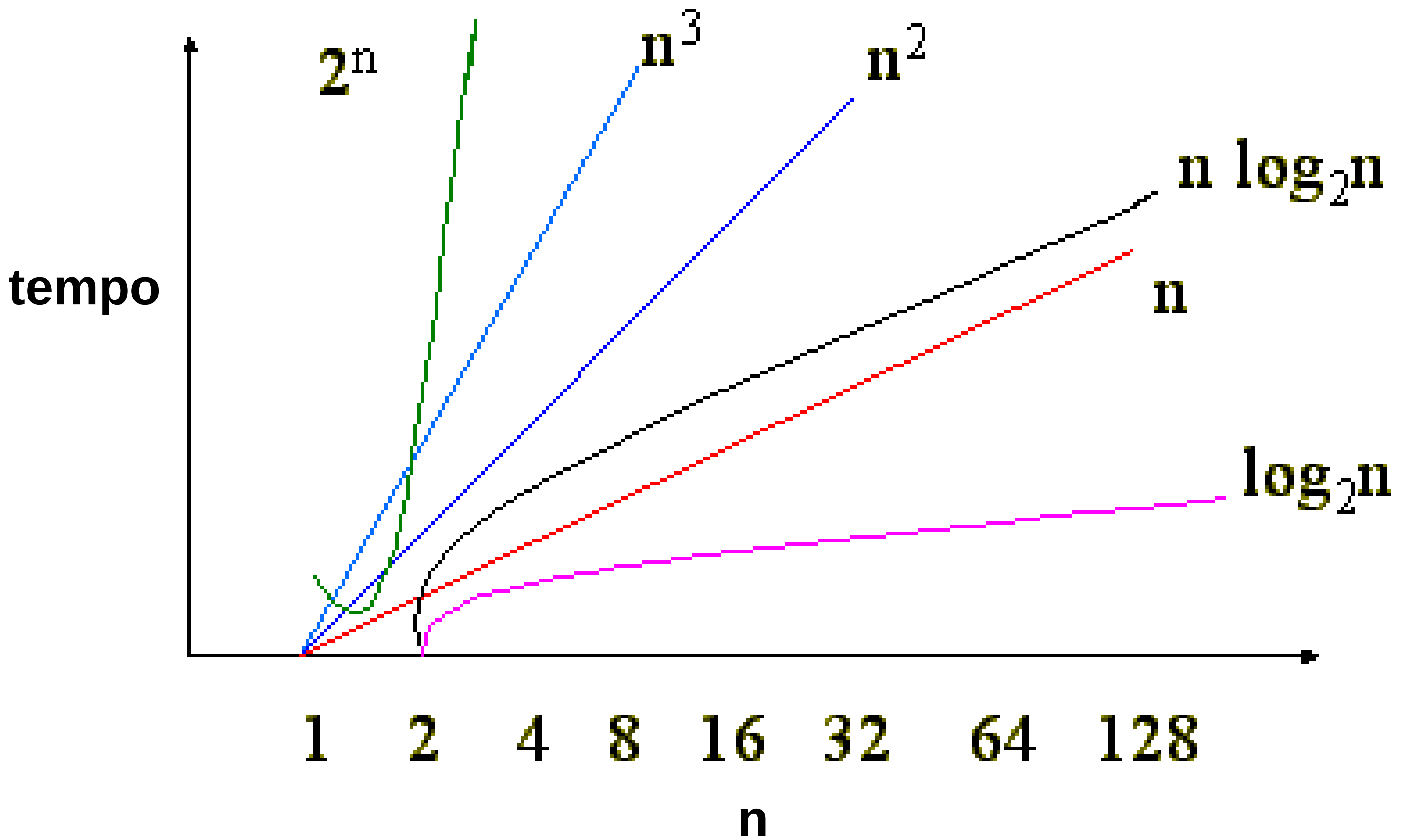
- Algumas regras
  - $\log^k n = O(n)$ para qualquer constante k, pois logaritmos crescem muito vagarosamente

Funções e taxas de crescimento

- As mais comuns

Função	Nome
c	constante
log n	logarítmica
$\log^2 n$	log quadrado
n	linear
n log n n^2	quadrática
n^3	cúbica
2^n n! a^n	exponencial

Funções e taxas de crescimento



Relações entre as Ordens

Função de Complexidade	Tamanho do problema *n*			
	10	10^2	10^3	10^4
$\log_2 n$	3.3	6.6	10	13.3
n	10	10^2	10^3	10^4
$n\log_2 n$	$0.33*10^2$	$0.17*10^3$	10^4	$1.3*10^5$
n^2	10^2	10^4	10^6	10^8
n^3	10^3	10^6	10^9	10^{12}
2^n	1024	$1.3*10^{30}$	$> 10^{100}$	$> 10^{100}$
$n!$	$3*10^6$	$> 10^{100}$	$> 10^{100}$	$> 10^{100}$

Taxas de crescimento

- Apesar de eventualmente ser importante, não se costuma incluir constantes ou termos de menor ordem em taxas de crescimento
  - Queremos medir a taxa de crescimento da função, o que torna os “termos menores” irrelevantes
  - As constantes também dependem do tempo exato de cada operação; como ignoramos os custos reais das operações, ignoramos também as constantes
- Não se diz que $T(n) = O(2n^2)$ ou que $T(n) = O(n^2+n)$
  - Diz-se apenas $T(n) = O(n^2)$

Exercício em duplas

- Um algoritmo tradicional e muito utilizado é da ordem de $n^{1,5}$, enquanto um algoritmo novo proposto recentemente é da ordem de $n \log n$
  - $f(n)=n^{1,5}$
  - $g(n)=n \log n$

- Qual algoritmo você adotaria?
  - Lembre-se que a eficiência desse algoritmo pode determinar o sucesso ou o fracasso de aplicação

Exercício em duplas

- Uma possível solução
  - $f(n) = n^{1,5}$ ➔ $n^{1,5}/n = n^{0,5}$ ➔ $(n^{0,5})^2 = n$
  - $g(n) = n \log n$ ➔ $(n \log n)/n = \log n$ ➔ $(\log n)^2 = \log^2 n$
    - Como n cresce mais rapidamente do que qualquer potência de log, temos que o <u>algoritmo novo</u> é mais eficiente e, portanto, deve ser o adotado. Faça uma tabela de valores para as duas funções e comprove!

Análise de algoritmos

- Para proceder a uma análise de algoritmos e determinar as taxas de crescimento, necessitamos de um modelo de computador e das operações que executa

- Assume-se o uso de um computador tradicional, em que as instruções de um programa são executadas sequencialmente
  - Com memória infinita, por simplicidade

Análise de algoritmos

- Repertório de instruções simples: soma, multiplicação, comparação, atribuição, etc.
  - Por simplicidade e viabilidade da análise, assume-se que cada instrução demora exatamente uma unidade de tempo para ser executada
    - Obviamente, em situações reais, isso pode não ser verdade: a leitura de um dado em disco pode demorar mais do que uma soma
  - Operações complexas, como inversão de matrizes e ordenação de valores, não são realizadas em uma única unidade de tempo, obviamente: devem ser analisadas em partes

Análise de algoritmos

- Considera-se somente o algoritmo e suas entradas (de tamanho n)
- Para uma entrada de tamanho n, pode-se calcular $T_{melhor}(n)$, $T_{média}(n)$ e $T_{pior}(n)$, ou seja, o melhor tempo de execução, o tempo médio e o pior, respectivamente
  - Obviamente, $T_{melhor}(n) \leq T_{média}(n) \leq T_{pior}(n)$
- Atenção: para mais de uma entrada, essas funções teriam mais de um argumento

Análise de algoritmos

- Geralmente, utiliza-se somente a análise do pior caso $T_{pior}(n)$, pois ela fornece os limites para todas as entradas, incluindo particularmente as entradas ruins

  - Logicamente, muitas vezes, o tempo médio pode ser útil, principalmente em sistemas executados rotineiramente
    - Por exemplo: em um sistema de cadastro de alunos como usuários de uma biblioteca, o trabalho difícil de cadastrar uma quantidade enorme de pessoas é feito somente uma vez; depois, cadastros são feitos de vez em quando apenas

  - Dá mais trabalho calcular o tempo médio

  - O melhor tempo não tem muita utilidade

Exemplo

- Soma da subsequência máxima
  - Dada uma sequência de inteiros (possivelmente negativos) $a_1, a_2, ..., a_n$, encontre o valor da máxima soma de quaisquer números de elementos consecutivos; se todos os inteiros forem negativos, o algoritmo deve retornar 0 como resultado da maior soma
  - Por exemplo, para a entrada -2, 11, -4, 13, -5 e -2, a resposta é 20 (soma de a_2 a a_4)

Soma da subsequência máxima

- Há <u>muitos algoritmos</u> propostos para resolver esse problema
- Alguns são mostrados abaixo juntamente com seus tempos de execução

Algoritmo	1	2	3	4
Tempo	$O(n^3)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
Tamanho da entrada				
n =10	0.00103	0.00045	0.00066	0.00034
n =100	0.47015	0.01112	0.00486	0.00063
n =1.000	448.77	1.1233	0.05843	0.00333
n =10.000	ND*	111.13	0.68631	0.03042
n =100.000	ND	ND	8.0113	0.29832

*ND = Não Disponível

Soma da subsequência máxima

- Deve-se notar que
  - Para entradas pequenas, todas as implementações rodam num piscar de olhos
    - Portanto, se somente entradas pequenas são esperadas, não devemos gastar nosso tempo para projetar melhores algoritmos
  - Para entradas grandes, o melhor algoritmo é o 4
  - Os tempos não incluem o tempo requerido para leitura dos dados de entrada
    - Para o algoritmo 4, o tempo de leitura é provavelmente maior do que o tempo para resolver o problema: característica típica de algoritmos eficientes

Taxas de crescimento

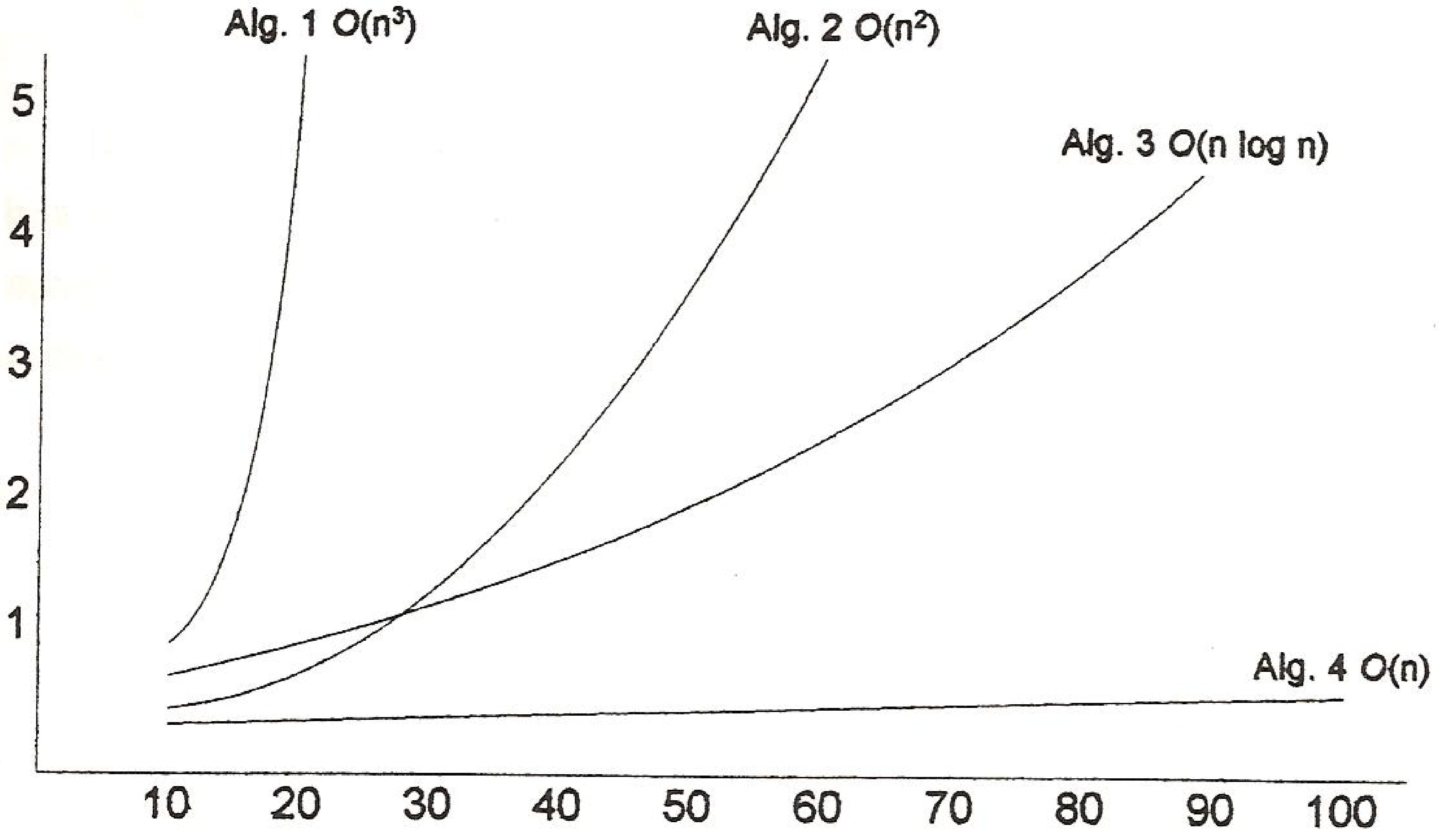


Gráfico (n x milisegundos) das taxas de crescimento dos 4 algoritmos com entradas entre 10 e 100.

Taxas de crescimento

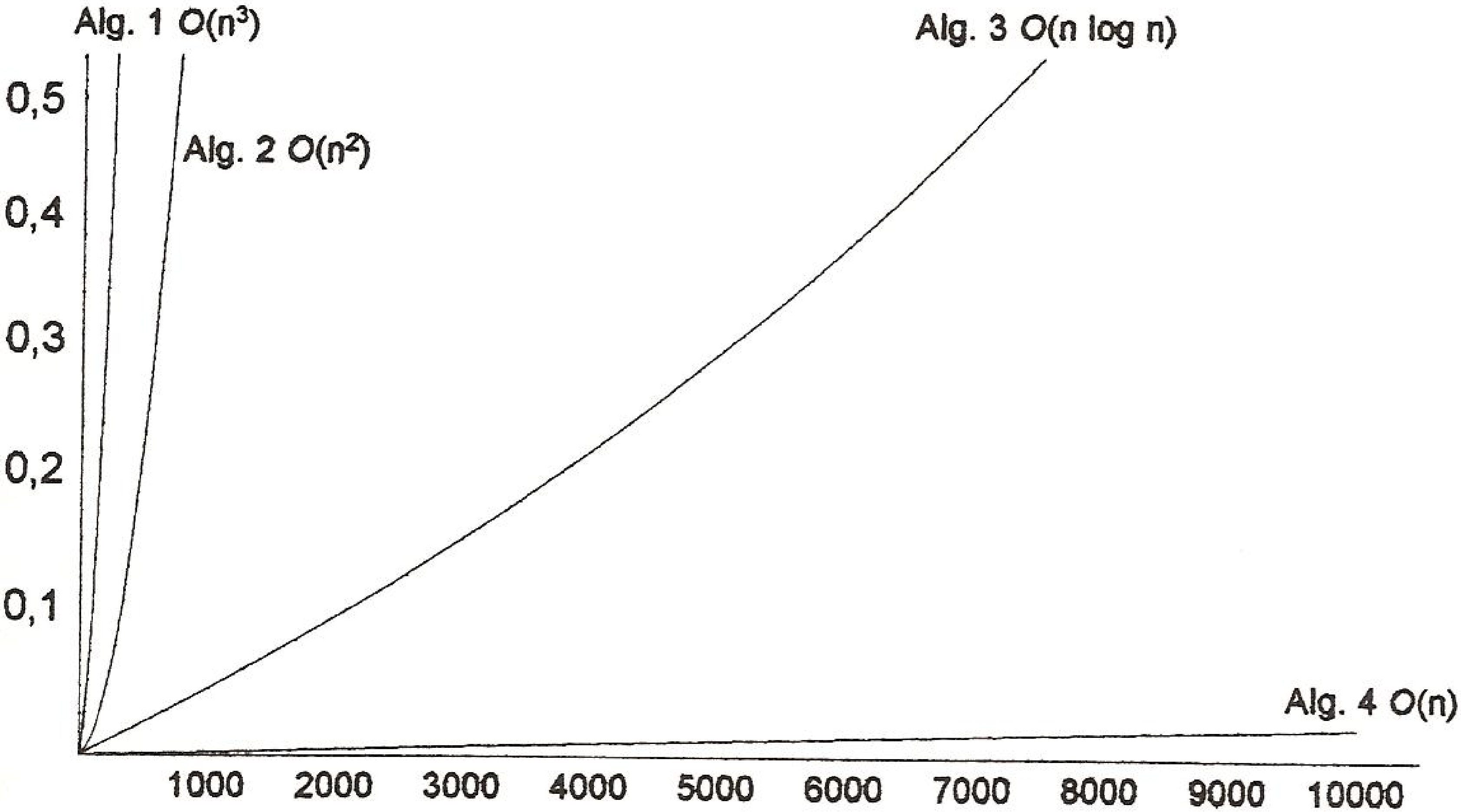


Gráfico (*n* x segundos) dos 4 algoritmos para entradas maiores

Upper e Lower Bounds

- **A análise do algoritmo nos fornece um *limite superior (upper bound)* para a quantidade de recursos que é *suficiente* para resolver um problema.**

- **Para saber se e quanto podemos melhorar este algoritmo, no entanto, precisamos estabelecer um *limite inferior (lower bound)* na quantidade mínima *necessária* de recursos para a resolução do problema.**

- **Idealmente, os dois limites, inferior e superior, deveriam ser iguais, pois neste caso conheceríamos exatamente a quantidade de recursos que é tanto *necessária* quanto *suficiente* para resolver um problema.**

Upper e Lower Bounds

- Se dispusermos de um algoritmo que utilize exatamente esta quantidade de recursos, então, teremos um ***algoritmo ótimo*** para a tarefa, no sentido de que a quantidade de recursos utilizada por qualquer outro algoritmo para a tarefa será maior ou, no melhor caso, igual à do algoritmo que temos.

- A diferença entre o limite inferior e o superior nos dá uma medida de quanto um algoritmo pode ser melhorado. Nem sempre, no entanto, é possível se construir algoritmos ótimos.

Análise de Algoritmos X Análise de Classes de Algoritmos

Objetivo: Identificar o "melhor algoritmo possível" da família de algoritmos que solucionam um determinado problema.

Exemplo: Ordenação de n elementos (memória interna)

Critério: tempo de execução medido pelo número C de comparações entre chaves.

Lower Bound da Classe: $C \approx n \log_2 n = O(n.\log_2 n)$

Upper Bound da Classe: $C \approx n^2 = O(n^2)$

Análise de Algoritmos X Análise de Classes de Algoritmos

Métodos Diretos (inserção, seleção e troca): $O(n^2)$ no pior caso.

Métodos Avançados:

Shellsort (inserção melhorada): $O(n^{1.2})$ no pior caso.

Heapsort (seleção melhorada): $O(n\log_2 n)$ no pior caso.

Quicksort (troca melhorada): $O(n\log_2 n)$ no melhor caso e caso médio; $O(n^2)$ no pior caso.

n pequeno $\rightarrow$ qualquer método direto.

Análise de Algoritmos X Análise de Classes de Algoritmos

Atenção: algoritmos podem não alcançar o limite mínimo.

Exemplo: Multiplicação de Matrizes n x n

Lower Bound da classe: $O(n^2)$
Algoritmo mais rápido: $O(n^{2.8})$
Algoritmo usual: $O(n^3)$