1. Se $\boldsymbol{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com posto$(\boldsymbol{\Sigma}) = n$, determine a distribuição de $\boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{Y}$.

2. Sejam $\boldsymbol{Y}$ um vetor aleatórito $n \times 1$ com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\sigma^2 \boldsymbol{I}_n$. Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz $n \times n$, calcule $\mathrm{E}(\boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{Y})$.

3. Sejam $\boldsymbol{W} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{B}$ uma matriz $q \times p$ e $\boldsymbol{b}$ um vetor $q \times 1$. Prove que $\boldsymbol{B}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{b}$ tem distribuição $N_q(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}^\top)$.

4. Se $Y_1, \ldots, Y_n$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, prove que $\overline{Y}$ e $S^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2/(n-1)$ são variáveis aleatórias independentes.

5. Se $\boldsymbol{Y} \sim N_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n)$, determine a variância de $(Y_1 - Y_2)^2 + (Y_2 - Y_3)^2 + \cdots + (Y_{n-1} - Y_n)^2$.
   Sugestão. Se $\boldsymbol{Y} \sim N_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ e $\boldsymbol{A}$ é uma matriz simétrica $n \times n$, então $\mathrm{Var}(\boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{Y}) = 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma})$.

6. Seja $\boldsymbol{Y} \sim N_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n)$. Prove que se $\boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{Y} = Q_1 + Q_2$ e $Q_1 \sim \chi^2_m$, então $Q_2 \sim \chi^2_{n-m}$, em que $Q_1 = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{A}$ é uma matriz $n \times n$ simétrica e idempotente com posto$(\boldsymbol{A}) = m$, $m < n$.

7. Considere o modelo $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$, em que $\mathrm{E}(\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$ e $\boldsymbol{X}$ é a matriz modelo $n \times p$ de posto $p < n$, prove que[1]

   (a) $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{e}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{0}$,
   (b) $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}$,
   (c) $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{Y}) = \sigma^2 \{\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top\}$ e
   (d) $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{e}, \widehat{\boldsymbol{Y}}) = \boldsymbol{0}$,

   em que $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{Y}}$ é o vetor de resíduos.

8. No modelo $\boldsymbol{Y} \sim N_n(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$, em que a matriz modelo $\boldsymbol{X}$ tem posto $p < n$, prove que
$$\frac{1}{\sigma^2}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \sim \chi^2_p.$$

9. No modelo do exercício 8, determine a distribuição do vetor de resíduos $\boldsymbol{e}$ (vide exercício 7).

10. Sejam $Y_1 = \theta + \epsilon_1$, $Y_2 = 2\theta - \gamma + \epsilon_2$ e $Y_3 = \theta + 2\gamma + \epsilon_3$, em que $\mathrm{E}(\epsilon_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Determine os estimadores de mínimos quadrados de θ e γ.

[1] Indique a dimensão de cada vetor ou matriz denotado por $\boldsymbol{0}$.