

PIPGEs ICMC – USP/UFSCar
EST5102 – Inferência Estatística – 2024/1
6ª lista de exercícios

1. X é uma variável aleatória com distribuição uniforme($[-\theta, \theta]$), $\theta > 0$. Deve ser testada $H_0 : \theta = 1$ contra $H_1 : \theta > 1$. Com base em uma observação de X , rejeita-se H_0 se, e somente se, $|X| > 0,99$.
 - (a) Determine o tamanho deste teste.
 - (b) Represente graficamente a função poder do teste.
2. Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{uniforme}([0, \theta])$, $\theta > 0$. Seja $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$. Devemos testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$. Propomos o teste “rejeitar H_0 se, e somente se, $X_{(n)} \geq c$ ”.
 - (a) Obtenha a função poder deste teste e prove que ela é crescente monótona em θ .
 - (b) Se $\theta_0 = 1/2$ e o tamanho do teste é $0,05$, qual o valor de c ?
 - (c) Qual deve ser o tamanho da amostra para que o teste das hipóteses no item acima tenha poder igual a $0,98$ quando $\theta = 3/4$?
 - (d) Se em uma amostra de 20 observações tivermos $x_{(n)} = 0,48$, quanto vale a probabilidade de significância?
3. X é uma variável aleatória com valores no conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ com probabilidades $\theta(1 - \theta)$, $\theta^2(1 - \theta)$, $\theta(1 - \theta)^2$ e $1 - 2\theta(1 - \theta)$, respectivamente, $0 < \theta < 1$. Apresente o teste mais poderoso para $H_0 : \theta = 1/4$ versus $H_1 : \theta = 3/4$ com tamanho $15/64$ e calcule o poder deste teste.
4.
 - (a) Uma moeda é lançada n vezes com o objetivo de verificar se a face “cara” é favorecida. Apresente um teste uniformemente mais poderoso (UMP) para esta situação.
 - (b) Se $n = 25$ e 17 resultados “cara” foram observados, qual seria a sua decisão a um nível de significância de 10%?
5. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$. Apresente um teste para as hipóteses dos itens abaixo. Qual(is) dos testes é (são) UMP?
 - (a) $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_0 \neq \theta_1$.
 - (b) $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

- (c) $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$.
6. X_1, \dots, X_n é uma amostra aleatória de uma distribuição normal (μ_0, σ^2) , μ_0 conhecido. As hipóteses $H_0 : \sigma \leq \sigma_0$ e $H_1 : \sigma > \sigma_0$ devem ser testadas.
- (a) Apresente o teste UMP de tamanho α , $0 < \alpha < 1$.
- (b) Represente graficamente a função poder do teste UMP.
- (c) Calcule o poder do teste quando $n = 5$, $\alpha = 0,05$ e $\sigma/\sigma_0 = 1,5$.
7. Sejam $X_1, \dots, X_{n_1} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(\mu_1, \sigma^2)$ e $Y_1, \dots, Y_{n_2} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(\mu_2, \sigma^2)$, independentes. Apresente um teste para as hipóteses $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ e $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ com tamanho α , $0 < \alpha < 1$.