$1.^a$ PROVA DE SMAA333 - CÁLCULO 3 - A

Professor: *Sergio H. M. Soares*

Nome:____

N.º USP: __________________ **30.04.2015**

Questões	Notas
$1.^a$	
$2.^a$	
$3.^a$	
$4.^a$	
Total	

$1.^a$ Questão (Valor: 2.0)

(a) (1.0) Considere a sequência numérica $(a_n)_{n\in N}$, onde

$$a_0 = \sqrt{2}\,,\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

A sequência numérica $(a_n)_{n\in N}$ é convergente? Caso afirmativo encontre seu limite, **justificando sua resposta**.

(b) (0.5) Encontre, se existir, o limite $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\cdots+\frac{n^3}{n^3}\right)$, **justificando sua resposta**.

(c) (0.5) Calcule, se existir, $\lim_{n\to\infty} e^{-n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, **justificando sua resposta**.

Resolução:

2.^{a} Questão (Valor 4.0): Em cada um dos ítens abaixo diga se a série numérica é condicionalmente convergente, absolutamente convergente ou divergente, **justificando a resposta**.

(a) (0.75) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(1-n-n^3\right)}{1+n+3\,n^2+4\,n^4}$ **(b) (1.0)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ **(c) (0.75)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(3\,n)!}$

(d) (0.75) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7+3\,n^5+n^3+n}{n^9+n^7+n^5+n^3+2\,n^2}$ **(e) (0.75)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\, n\right]$

Resolução:

$\boxed{\textbf{3.}^a \textbf{ Questão (Valor 2.0):}}$ Em cada um dos casos ítens, dizer se a afirmação é verdadeira ou falsa, **justificando a resposta**, ou seja, demonstrando se for verdadeira ou exibindo um exemplo para o caso de ser falsa.

(a) (0.5) Se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

(b) (0.5) Se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente, então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ também será convergente.

(c) (0.5) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(d) (0.5) Se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\boxed{\textbf{Resolução:}}$

$\boxed{\textbf{4.}^a\ \textbf{Questão (Valor: 3.5)}}$ Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^4}\,, \qquad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) (1.0) Mostre que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em $\mathbb{R}$.

(b) (0.5) A função f é contínua em $\mathbb{R}$? **justifique a resposta**.

(c) (0.5) Calcule, **justificando a resposta**:

$$\int_0^{\pi} f(t)\,dt\,.$$

(d) (1.0) A função f é diferenciável em $\mathbb{R}$? **justifique a resposta**.

(e) (0.5) Calcule $f'(\frac{\pi}{2})$, **justificando a resposta**.

Resolução: