



Métodos de Ordenação

Parte 4

Introdução à Ciência de Computação II

Prof. Diego Raphael Amancio



Ordenação por Intercalação

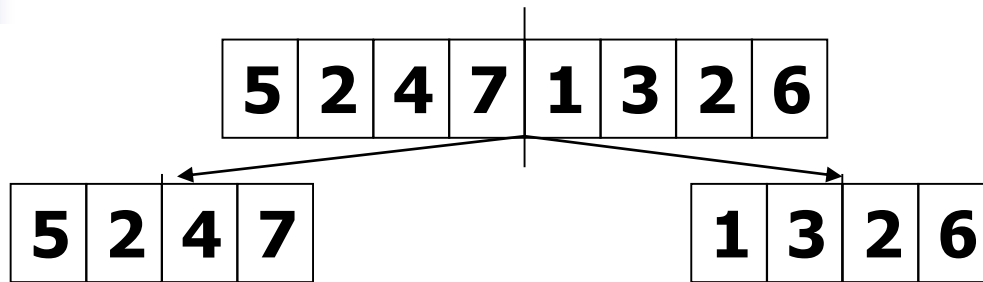
- Revisando...
 - Também chamado merge-sort
 - Idéia básica: dividir para conquistar
 - Um vetor v é dividido em duas partes, recursivamente
 - Cada metade é ordenada e ambas são intercaladas formando o vetor ordenado
 - Usa um vetor auxiliar para intercalar



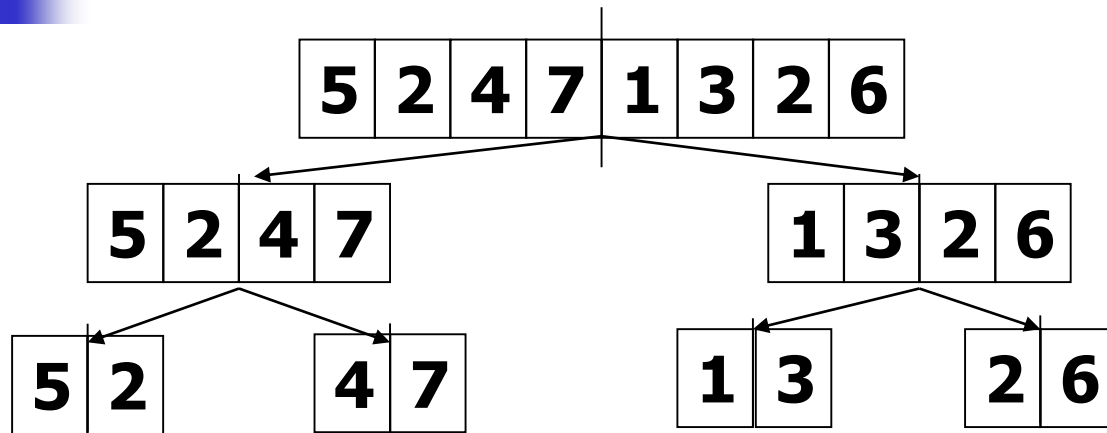
Ordenação por Intercalação

5	2	4	7	1	3	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---

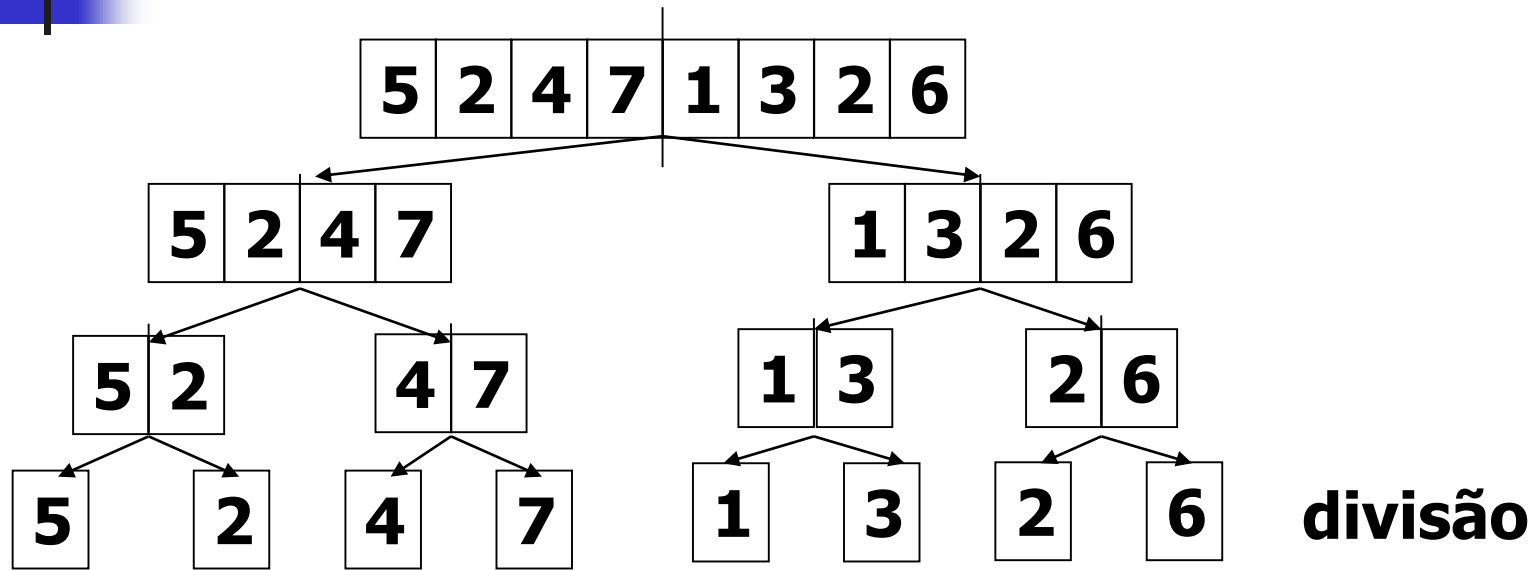
Ordenação por Intercalação



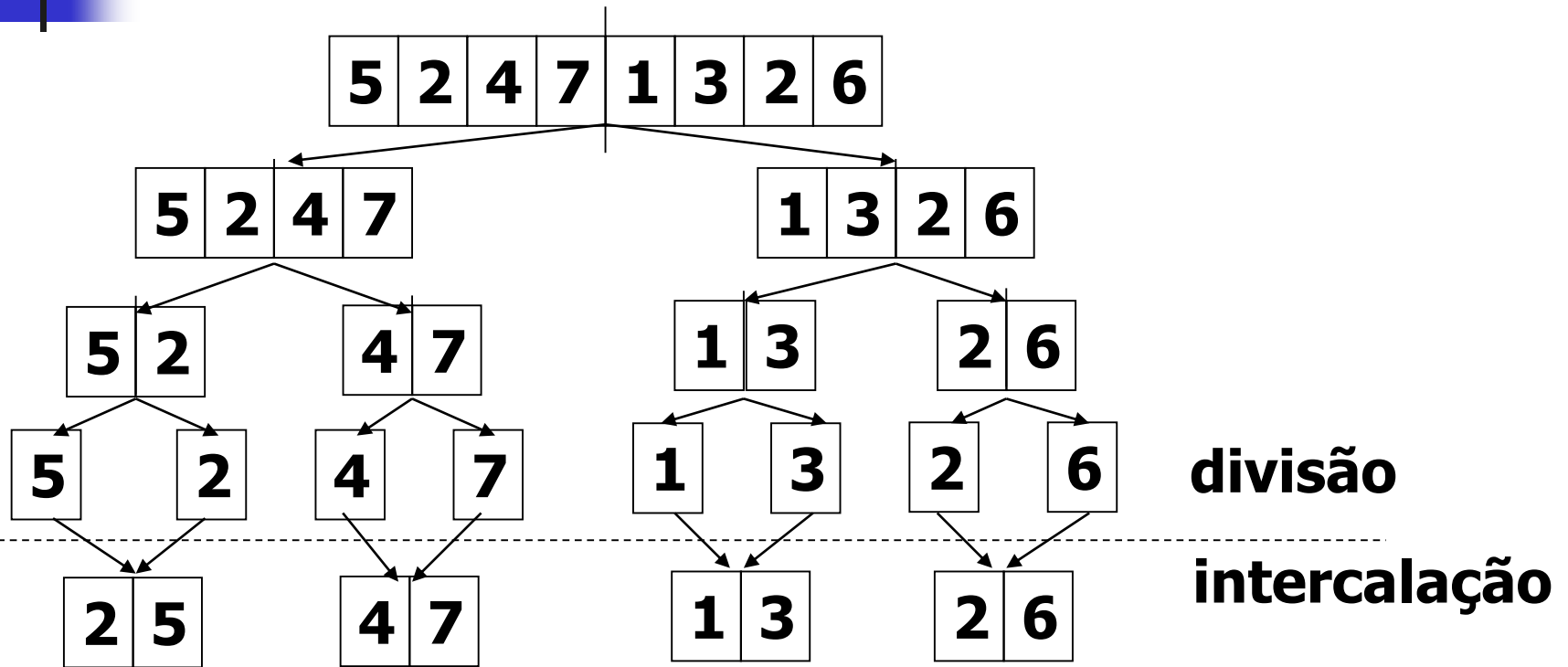
Ordenação por Intercalação



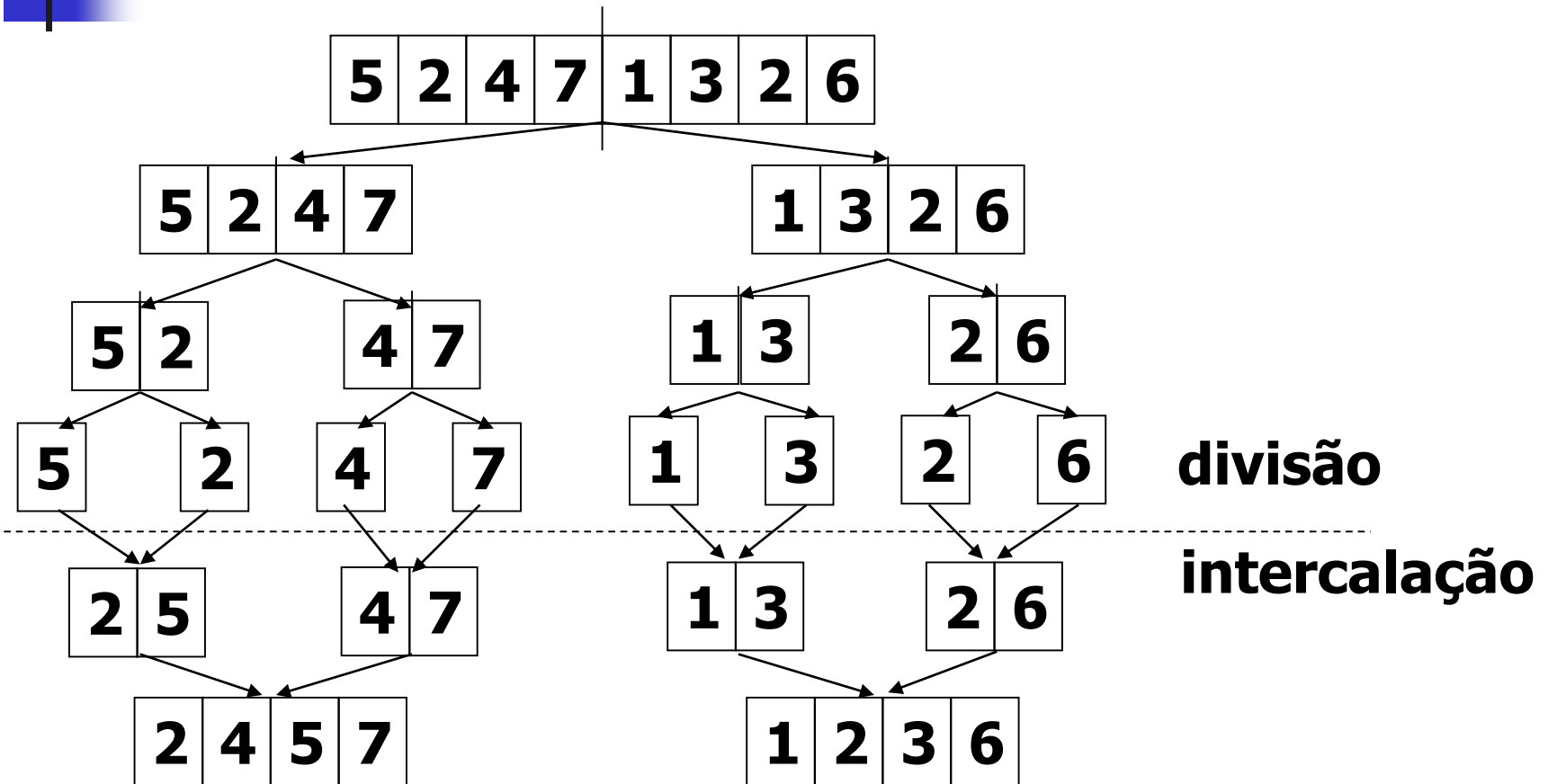
Ordenação por Intercalação



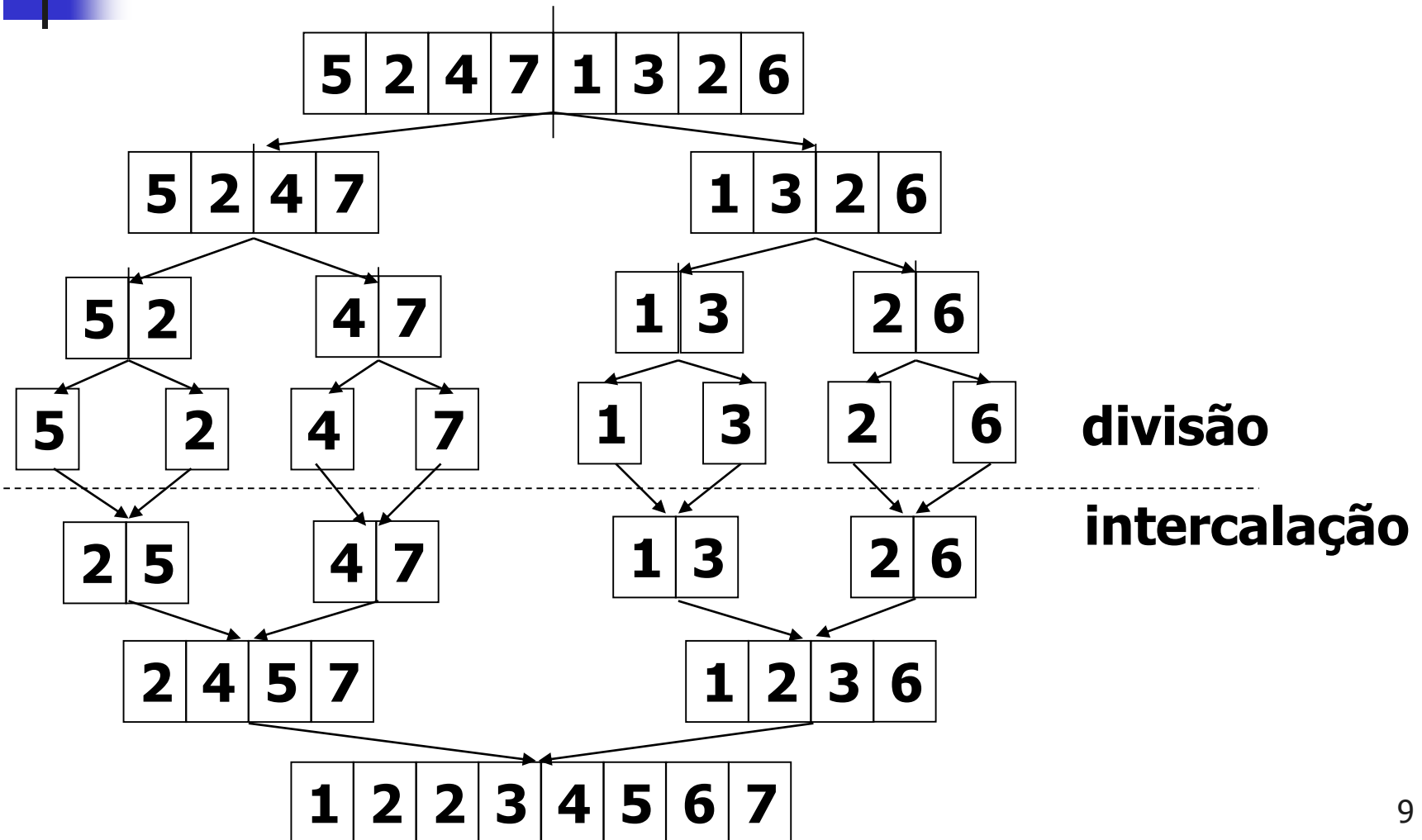
Ordenação por Intercalação



Ordenação por Intercalação



Ordenação por Intercalação





Ordenação por Intercalação

- Qual a complexidade de tempo?
- E a complexidade de espaço?



Ordenação por Contagem de Menores

- **Idéia básica:** se soubermos **quantos** são os elementos **menores** que um determinado **valor**, saberemos a posição que o mesmo deve ocupar no arranjo ordenado
 - Por exemplo, se há 5 valores menores do que o elemento 7, o elemento 7 será inserido na sexta posição do arranjo
- Usa-se um arranjo auxiliar para manter a contagem de menores e um outro para montar o arranjo ordenado



Ordenação por Contagem de Menores

- Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	2	1	3	7	9	8	3	0	5

Arranjo original A desordenado



Ordenação por Contagem de Menores

- 1º. Passo: criar arranjo auxiliar

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	2	1	3	7	9	8	3	0	5

Arranjo original A desordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Arranjo auxiliar X, em que $X[i]$ = número de elementos no arranjo A que são menores que $A[i]$ → indicam a posição correta de $A[i]$ no arranjo ordenado



Ordenação por Contagem de Menores

- 1º. Passo: criar arranjo auxiliar

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	2	1	3	7	9	8	3	0	5

Arranjo original A desordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2	1	3	7	9	8	3	0	6

Arranjo auxiliar X, em que $X[i]$ = número de elementos no arranjo A que são menores que $A[i]$ → indicam a posição correta de $A[i]$ no arranjo ordenado



Ordenação por Contagem de Menores

- 2º. Passo: montar arranjo final ordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	2	1	3	7	9	8	3	0	5

Arranjo original A desordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2	1	3	7	9	8	3	0	6

Arranjo auxiliar X, em que $X[i]$ = número de elementos no arranjo A que são menores que $A[i]$ → indicam a posição correta de $A[i]$ no arranjo ordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Arranjo final B ordenado: $A[i]$ vai para a posição $X[i]$ de B
→ Atenção com elemento 3 duplicado



Ordenação por Contagem de Menores

- 2º. Passo: montar arranjo final ordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	2	1	3	7	9	8	3	0	5

Arranjo original A desordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2	1	3	7	9	8	3	0	6

Arranjo auxiliar X, em que $X[i]$ = número de elementos no arranjo A que são menores que $A[i]$ → indicam a posição correta de $A[i]$ no arranjo ordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	3	4	5	7	8	9

Arranjo final B ordenado: $A[i]$ vai para a posição $X[i]$ de B
→ Atenção com elemento 3 duplicado



Ordenação por Contagem de Menores

- Exercício
 - Implementar em C a função de ordenação por contagem de menores
 - Calcular complexidade



Ordenação por Contagem de Menores

- Implementação

```

void contagem_de_menores(int v[], int n)
{
    int X[n], B[n], i, j;

    for (i=0; i<n; i++) //inicializando arranjo auxiliar
        X[i]=0;

    for (i=1; i<n; i++) //contando menores
        for (j=i-1; j>=0; j--)
            if (v[i]<v[j])
                X[j]++;
            else X[i]++;

    for (i=0; i<n; i++) //montando arranjo final
        B[X[i]]=v[i];

    for (i=0; i<n; i++) //copiando arranjo final para original
        v[i]=B[i];
}

```



Ordenação por Contagem de Menores

- Complexidade de tempo?

- Complexidade de espaço?



Ordenação por Contagem de Menores

- Complexidade de tempo?
 - $O(n^2)$

- Complexidade de espaço?
 - $O(3n)$



Ordenação por Contagem de Menores

- Exercício: executar algoritmo para o vetor abaixo

0	1	2	3	4
16	2	1	8	2



Ordenação por Contagem de Tipos

- Também chamado **counting-sort**
- Idéia básica: conta-se o número de vezes que cada elemento ocorre no arranjo; se há k elementos antes dele, ele será inserido na posição $k+1$ do arranjo ordenado
 - Restrição: os elementos devem estar contidos em um intervalo $[\text{min}, \text{max}]$ do conjunto de números inteiros positivos
- Usa-se um arranjo auxiliar para manter a contagem de tipos e um outro para montar o arranjo ordenado



Ordenação por Contagem de Tipos

- Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	7	6	3	1	2	1	7

Arranjo original A desordenado

→ min=1, max=7



Ordenação por Contagem de Tipos

- Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	7	6	3	1	2	1	7

Arranjo original A desordenado

→ min=1, max=7

1	2	3	4	5	6	7

Arranjo auxiliar X, em que X[i] indica o número de elementos i no vetor original A



Ordenação por Contagem de Tipos

- Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	7	6	3	1	2	1	7

Arranjo original A desordenado

→ min=1, max=7

1	2	3	4	5	6	7
3	2	2	0	0	1	2

Arranjo auxiliar X, em que X[i] indica o número de elementos i no vetor original A

→ há 3 elementos 1, que ocuparão as posições 0, 1 e 2 do vetor ordenado

→ há 2 elementos 2, que ocuparão as posições livres seguintes (3 e 4) ...

Ordenação por Contagem de Tipos

■ Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	7	6	3	1	2	1	7

Arranjo original A desordenado

→ min=1, max=7

1	2	3	4	5	6	7
3	2	2	0	0	1	2

Arranjo auxiliar X, em que $X[i]$ indica o número de elementos i no vetor original A

→ há 3 elementos 1, que ocuparão as posições 0, 1 e 2 do vetor ordenado

→ há 2 elementos 2, que ocuparão as posições livres seguintes (3 e 4) ...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Arranjo final B ordenado



Ordenação por Contagem de Tipos

- Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	7	6	3	1	2	1	7

Arranjo original A desordenado

→ min=1, max=7

1	2	3	4	5	6	7
3	2	2	0	0	1	2

Arranjo auxiliar X, em que X[i] indica o número de elementos i no vetor original A

→ há 3 elementos 1, que ocuparão as posições 0, 1 e 2 do vetor ordenado

→ há 2 elementos 2, que ocuparão as posições livres seguintes (3 e 4) ...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	2	2	3	3	6	7	7

Arranjo final B ordenado



Ordenação por Contagem de Menores

- Implementação



Implementação

```
void contagem_de_tipos(int v[], int n)
{
    int B[n], i, j, max;

    max=v[0]; //determinando max
    for (i=1; i<n; i++)
        if (v[i]>max)
            max=v[i];
    int X[max+1];

    //inicializando arranjo auxiliar
    for (i=0; i<max+1; i++)
        X[i]=0;

    //contando tipos
    for (i=0; i<n; i++)
        X[v[i]]++;
}
```

```
//montando arranjo final
j=0;
for (i=0; i<max+1; i++)
    while (X[i]!=0) {
        B[j]=i;
        j++;
        X[i]--;
    }

//copiando arranjo
//final para original
for (i=0; i<n; i++)
    v[i]=B[i];
```



Ordenação por Contagem de Tipos

- Complexidade de tempo?

- Complexidade de espaço?



Ordenação por Contagem de Tipos

- Complexidade de tempo?
 - $O(n)$, se $\max \leq n$
 - Por que é "tão melhor" do que outros métodos?
- Complexidade de espaço?
 - $O(3n)$, se $\max \leq n$



Ordenação por Contagem de Tipos

- Complexidade de tempo?
 - $O(n)$, se $\max \leq n$
 - A ordenação não é por comparação
- Complexidade de espaço?
 - $O(3n)$, se $\max \leq n$



Ordenação de raízes

- Também chamado **radix-sort**
- Idéia básica: os números são ordenados por seus dígitos, dos menos significativos para os mais significativos
 - Por exemplo, ordenar os números 236 e 235 implica comparar os últimos dígitos 6 e 5 dos dois; se não bastar, comparam-se os dígitos do meio; por fim, comparam-se os mais significativos
- Baseado na forma de funcionamento das antigas perfuradoras de cartões



Ordenação de raízes

- Utilizam-se listas
 - Uma fila para cada dígito
 - Os números vão sendo inseridos na fila de acordo com o dígito sendo avaliado
 - A cada iteração, os números estão mais próximos da ordenação final

Ordenação de raízes: exemplo (1ª. iteração)

Arquivo original

25 57 48 37 12 92 86 33

Filas baseadas no dígito menos significativo.

Início

Final

fila [0]
fila [1]
fila [2]
fila [3]
fila [4]
fila [5]
fila [6]
fila [7]
fila [8]
fila [9]

12

92

33

25

86

57

48

37

Depois da primeira passagem.

12 92 33 25 86 57 37 48

Ordenação de raízes: exemplo (2ª. iteração)

		12	92	33	25	86	57	37	48
Filas baseadas no dígito mais significativo.									
			Início				Final		
fila	[0]								
fila	[1]		12						
fila	[2]		25						
fila	[3]		33			37			
fila	[4]		48						
fila	[5]		57						
fila	[6]								
fila	[7]								
fila	[8]		86						
fila	[9]		92						
Arquivo classificado: 12 25 33 37 48 57 86 92									



Ordenação de raízes

- Para os números do arranjo terem o mesmo número de dígitos, pode-se completá-los com zeros à esquerda
 - Por exemplo, 026 e 235
- Quantas iterações são necessárias para ordenar o arranjo?



Ordenação de raízes

- Para os números do arranjo terem o mesmo número de dígitos, pode-se completá-los com zeros à esquerda
 - Por exemplo, 026 e 235
- Quantas iterações são necessárias para ordenar o arranjo?
 - São necessárias m iterações no máximo, sendo m o número de dígitos do maior número



Ordenação de raízes

■ Algoritmo

```
for (k=digito menos signif; k<=digito mais signif; k++){  
    for (i=0; i<n; i++){  
        j=kesimo digito de x[i];  
        posiciona x[i] no final da fila[j];  
    }  
    for (f=0; f<10; f++){  
        coloca elems da fila[f] na prox posicao de x;  
    }  
}
```




Ordenação de raízes

- Exercício: ordene o vetor abaixo

(44 , 55 , 112 , 42 , 94 , 18 , 6 , 67)



Ordenação de raízes

- Qual a complexidade de tempo do método?

- Qual a complexidade de espaço?



Ordenação de raízes

- Qual a complexidade de tempo do método?
 - $O(m*n)$
 - Se m pequeno, $O(n)$
- Qual a complexidade de espaço?
 - Além do vetor, devem-se contar os espaços para as filas

Comparação entre os métodos mais conhecidos

- Ordem aleatória dos elementos
 - O mais rápido recebe valor 1 e o restante é recalculado em função disso

	500	5.000	10.000	30.000
Inserção	11,3	87	161	–
Seleção	16,2	124	228	–
<i>Shellsort</i>	1,2	1,6	1,7	2
<i>Quicksort</i>	1	1	1	1
<i>Heapsort</i>	1,5	1,6	1,6	1,6



Comparação entre os métodos mais conhecidos

- Ordem ascendente dos elementos (já ordenado)

	500	5.000	10.000	30.000
Inserção	1	1	1	1
Seleção	128	1.524	3.066	–
<i>Shellsort</i>	3,9	6,8	7,3	8,1
<i>Quicksort</i>	4,1	6,3	6,8	7,1
<i>Heapsort</i>	12,2	20,8	22,4	24,6

Comparação entre os métodos mais conhecidos

- Ordem descendente dos elementos

	500	5.000	10.000	30.000
Inserção	40,3	305	575	—
Seleção	29,3	221	417	—
<i>Shellsort</i>	1,5	1,5	1,6	1,6
<i>Quicksort</i>	1	1	1	1
<i>Heapsort</i>	2,5	2,7	2,7	2,9



Comparação entre os métodos mais conhecidos

- Quick-sort é o mais rápido para todos os arranjos com elementos aleatórios
- Heap-sort e quick-sort têm uma diferença constante, sendo o heap-sort mais lento
- Para arranjos pequenos, shell-sort é melhor do que o heap-sort
- O método da inserção direta é mais rápido para arranjos ordenados
- O método da inserção direta é melhor do que o método da seleção direta para arranjos com elementos aleatórios
- Shell-sort e quick-sort são sensíveis em relação às ordenações ascendentes e descendentes
- Heap-sort praticamente não é sensível em relação às ordenações ascendentes e descendentes



Métodos de ordenação

- Outros métodos: tarefa para casa
 - Shake-sort ou método da coqueteleira
 - Melhoramento do bubble-sort
 - Tree-sort ou método da árvore binária
 - Bucket-sort ou método do balde

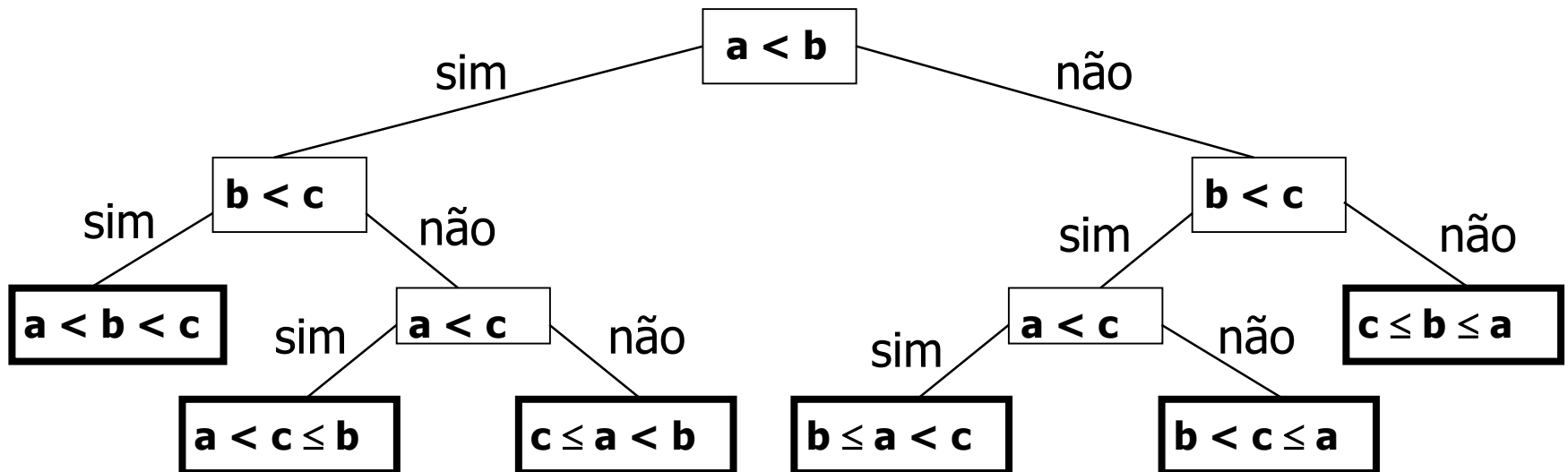


Cota Inferior para Ordenação

- Cota (ou limite) inferior do problema
 - Prova-se que é impossível resolver o problema em menos que $C(n)$ passos para uma entrada de tamanho n
 - **Algoritmo ótimo**: resolve problema em tempo igual à cota inferior

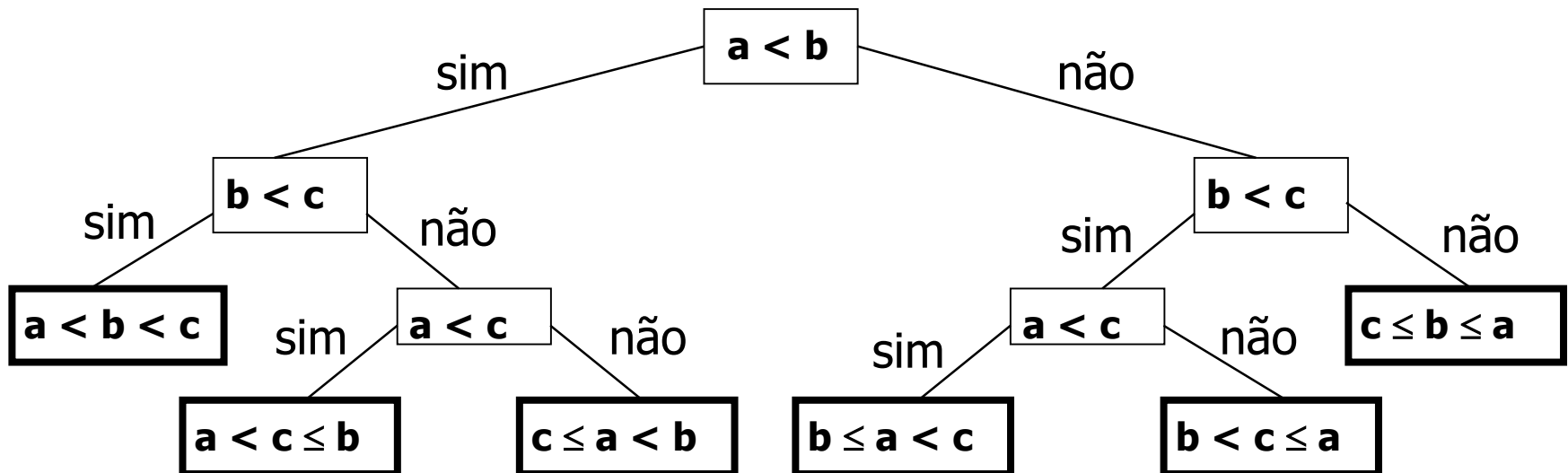
Cota Inferior para Ordenação

- Cota inferior dos métodos de ordenação por comparação de elementos
 - Pode-se montar uma árvore de decisão para representar o problema
 - Exemplo: ordenação de três elementos a, b e c



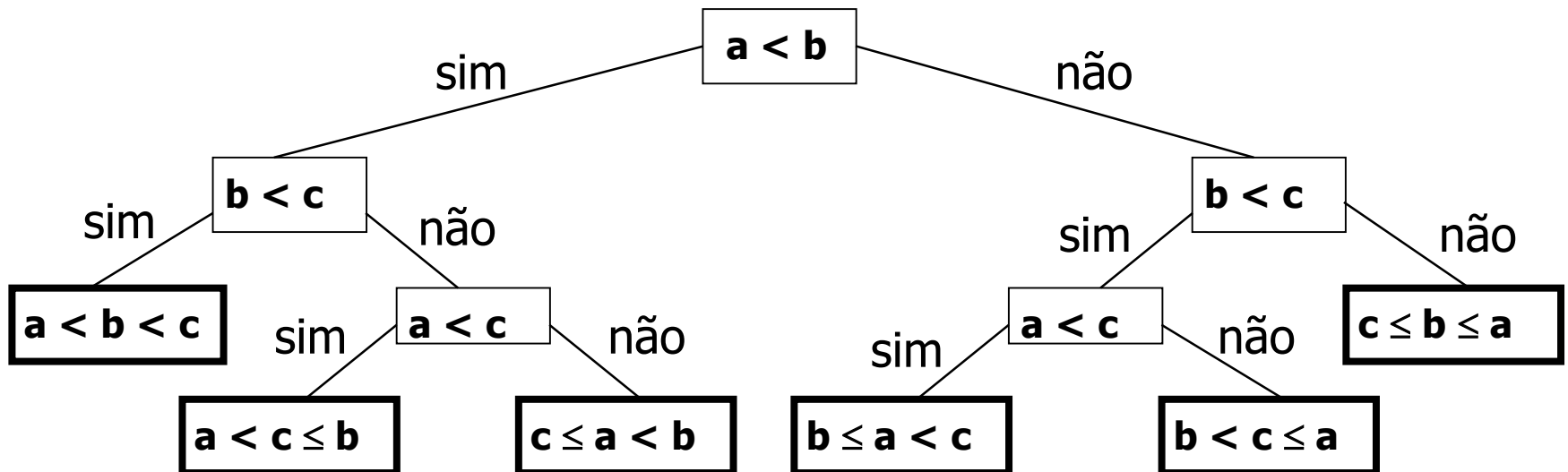
Cota Inferior para Ordenação

- No mínimo, **quantas folhas** existem nessa árvore, assumindo um arranjo de tamanho n ?
 - Ou: quantas possibilidades de ordenação existem?



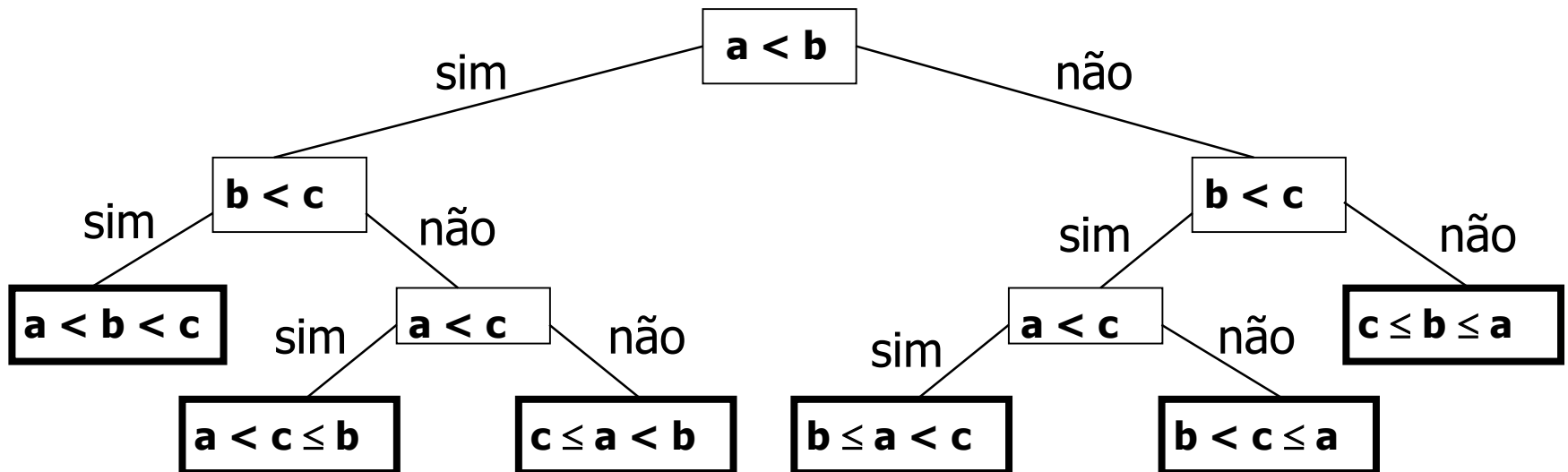
Cota Inferior para Ordenação

- No mínimo, **quantas folhas** existem nessa árvore, assumindo um arranjo de tamanho n ?
 - Ou: quantas possibilidades de ordenação existem?
 - **$n!$**



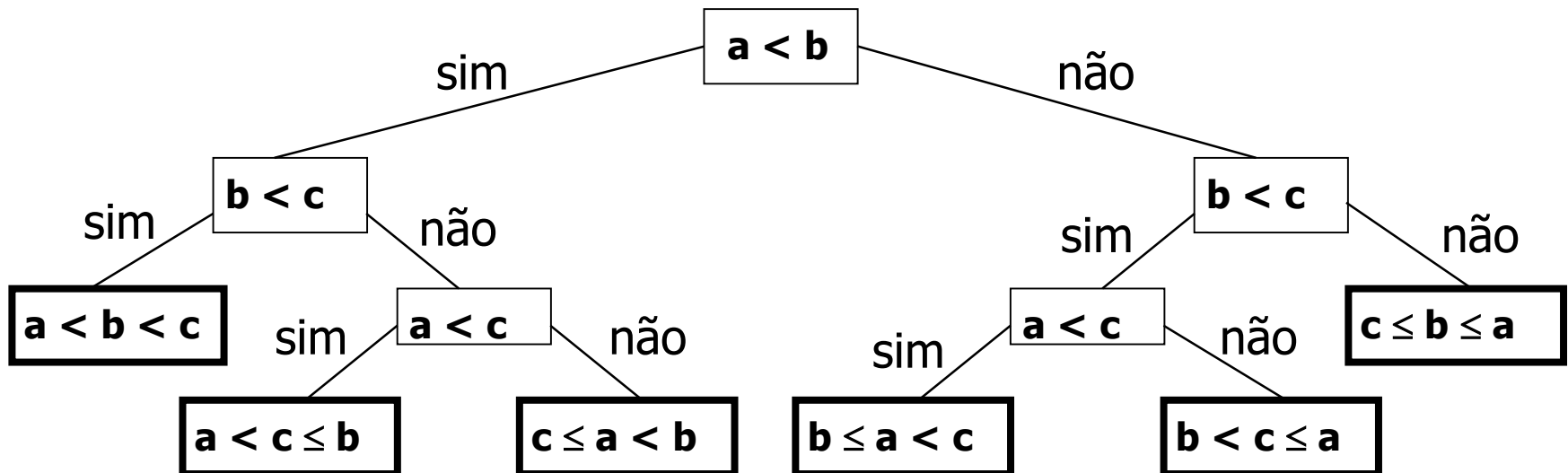
Cota Inferior para Ordenação

- **Quantas comparações** devem ser feitas para ordenar n elementos?



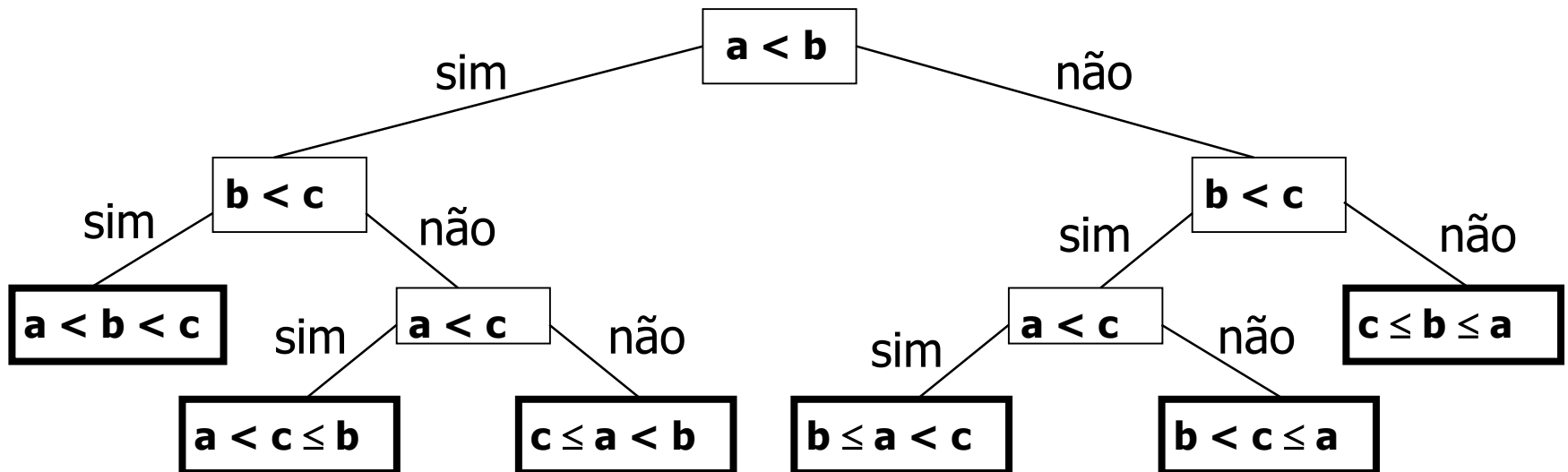
Cota Inferior para Ordenação

- **Quantas comparações** devem ser feitas para ordenar n elementos?
 - A altura máxima da árvore de decisão, aproximadamente



Cota Inferior para Ordenação

- Sabe-se que uma **árvore binária de altura h** não tem mais do que **2^h folhas**
 - Altura 3: $2^3 \rightarrow 8$ folhas no máximo





Cota Inferior para Ordenação

- Então se sabe que
 - Número máximo de folhas de uma árvore binária de altura h : 2^h
 - Número de folhas de uma árvore de decisão para ordenação por comparação: $n!$
- Portanto:
 - $2^h \geq n!$



Cota Inferior para Ordenação

- Então se sabe que
 - Número máximo de folhas de uma árvore binária de altura h : 2^h
 - Número de folhas de uma árvore de decisão para ordenação por comparação: $n!$
- Portanto:
 - $2^h \geq n!$
 - Representando via logaritmo: $h \geq \log(n!)$



Cota Inferior para Ordenação

- Então se sabe que
 - Número máximo de folhas de uma árvore binária de altura h : 2^h
 - Número de folhas de uma árvore de decisão para ordenação por comparação: $n!$
- Portanto:
 - $2^h \geq n!$
 - Representando via logaritmo: $h \geq \log(n!)$
 - Aproximação de Stirling: $\log(n!) = O(n \log(n))$



Cota Inferior para Ordenação

- Então se sabe que
 - Número máximo de folhas de uma árvore binária de altura h : 2^h
 - Número de folhas de uma árvore de decisão para ordenação por comparação: $n!$
- Portanto:
 - $2^h \geq n!$
 - Representando via logaritmo: $h \geq \log(n!)$
 - Aproximação de Stirling: $\log(n!) = O(n \log(n))$
 - Resultando que $h \geq \log(n!) \rightarrow h \geq n \log(n) \rightarrow h = \Omega(n \log(n))$



Cota Inferior para Ordenação

- Resultado
 - Métodos de ordenação por comparação de elementos não podem ser melhores do que $O(n \log(n))$