ICMC – USP

SME 5779 – Inferência Estatística – 2013/1

$2^{\underline{a}}$ lista de exercícios

1. Qual(is) das seguintes parametrizações é(são) identificável(is)?

   (a) $X_i \overset{\text{indep.}}{\sim} \mathsf{normal}(\alpha_i + \nu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$. $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \nu, \sigma^2)'$ e P_θ é a distribuição de $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.

   (b) $X_{ij} \overset{\text{indep.}}{\sim} \mathsf{normal}(\alpha_i + \lambda_j + \nu, \sigma^2)$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, k$. $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \nu, \sigma^2)'$ e P_θ é a distribuição de $\boldsymbol{X} = (X_{ij}, j = 1, \ldots, n, i = 1, \ldots, k)'$.

   (c) $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2 + \sigma_\delta^2 & \beta_1\sigma^2 \\ \beta_1\sigma^2 & \beta_1^2\sigma^2 + \sigma_\epsilon^2 \end{bmatrix}\right)$, com $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \sigma_\epsilon^2, \sigma_\delta^2)'$, $(\beta_0, \beta_1)' \in \mathbb{R}^2$, $\sigma^2 > 0$, $\sigma_\epsilon^2 > 0$, $\sigma_\delta^2 > 0$ e P_θ é a distribuição de $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.

2. Qual(is) dos seguintes modelos é(são) regular(es)?

   (a) P_θ é a distribuição de X, $X \sim \mathsf{uniforme}(0, \theta)$, $\Theta = (0, \infty)$.

   (b) Seja $X \sim \mathsf{normal}(\mu, \sigma^2)$. Defina $Y = 1$, se $X \leq 1$ e $Y = X$, se $X > 1$. $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)'$ e P_θ é a distribuição de Y.

   (c) Em um experimento os possíveis resultados são $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Suponha que uma modificação provoque um aumento nos resultados de uma quantidade fixa θ. Seja P_θ a distribuição dos resultados modificados.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias iid com distribuição geométrica, sendo que $P_\theta(x) = f(x; \theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$, $0 < \theta < 1$. Utilize a definição para provar que $\sum_{i=1}^n X_i$ é uma estatística suficiente para θ. Existe uma forma mais simples de obter esta prova? Se sim, qual?

4. Prove que uma estatística $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ é suficiente para $\boldsymbol{\theta}$ se, e somente se, a distribuição condicional de $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X})$ dada $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ não depende de $\boldsymbol{\theta}$ para qualquer estatística $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X})$.

5. Seja X uma observação de uma população $\mathsf{normal}(0, \sigma^2)$. $|X|$ é uma estatística suficiente?

6. Considere $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{multinomial}(m, \frac{1}{2} + \frac{\theta}{4}, \frac{1}{4}(1-\theta), \frac{1}{4}(1-\theta), \frac{\theta}{4})$. Apresente uma estatística suficiente para θ.

7. Sejam $X_i \overset{\text{indep.}}{\sim} f(\cdot; \theta)$, em que $f(x; \theta) = \exp(i\theta - x)$, se $x \geq i\theta$, e $f(x; \theta) = 0$, caso contrário, $i = 1, \ldots, n$. Represente graficamente $f(x; \theta)$. Prove que $\min_{i=1}^n X_i/i$ é uma estatística suficiente para θ.

8. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}(\theta, a\theta^2)$, sendo que $a > 0$ é uma constante conhecida e $\theta > 0$. Apresente uma estatística suficiente para θ.

9. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{uniforme}(\theta_1, \theta_2)$, em que $\theta_1 < \theta_2$. Apresente uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)'$.

10. Apresente uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta}$ no exercício 1c.

11. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com função densidade $f(x; \theta) = \exp(\theta - x)I_{(\theta,\infty)}(x)$. Prove que $T(\boldsymbol{X}) = \min(X_1, \ldots, X_n)$ é uma estatística suficiente para θ.