1ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE I - SME 0800

Professora Juliana Cobre

Exercício 1 (*Meyer E. 1.6 p.23)*. Peças que saem de uma linha de produção são marcadas defeituosas (D) ou não defeituosas (N). As peças são inspecionadas e sua condição registrada. Isto é feito até que duas peças defeituosas consecutivas sejam fabricadas ou que quatro peças tenham sido inspecionadas, aquilo que ocorra em primeiro lugar. Descreva o espaço amostral para este experimento.

Exercício 2 (*Meyer E. 1.7 p.24)*.

(a) Uma caixa com N lâmpadas contém r lâm-padas ($r < N$) com filamento partido. Essas lâmpadas são verificadas uma a auma, até que uma lâmpada defeituosa seja encontrada. Descreva um espaço amostra para este experimento.

(b) Suponha que as lâmpadas acima sejam verificadas uma a uma, até que todas as defeituosas tenham sido encontradas. Descreva o espaço amostral para este experimento.

Exercício 3 (*Meyer E. 1.7 p.24)*. Considere quatro objetos a, b, c e d. Suponha que a ordem em que tais objetos sejam lidos represente o resultado de um experimento. Sejam os eventos A e B definidos por $A = \{a \text{ está na primeira posição}\}$ e $B = \{a \text{ está na segunda posição}\}$

(a) Enumere todos os elementos do espaço amostral.

(b) Enumere todos os elementos dos eventos $A \cap B$ e $A \cup B$.

Exercício 4 (*Meyer E. 1.9 p.24)*. Um lote contém peças pesando $5, 10, 15, \ldots, 50$ gramas. Admitimos que ao menos duas peças de cada pesa sejam encontradas no lote. Duas peças são retiradas do lote. Sejam X o peso da primeira peça escolhida e Y o peso da segunda. Portanto, o par de números (X, Y) representa um resultado simples do experimento. Empregando o plano XY, descreva o espaço amostra e os seguintes eventos:

(a) $\{X = Y\}$

(b) $\{Y > X\}$

(c) A segunda peça é duas vezes mais pesada que a primeira.

(d) A primeira peça pesa menos de 10 gramas que a segunda peça.

(e) O peso médio de duas peças é menor do que 30 gramas.

Exercício 5 (*Meyer E. 1.11 p.24)*. Sejam A, B e C três eventos associados a um experimento. Exprima em notações de conjuntos, as seguintes afirmações verbais.

(a) Ao menos um dos eventos ocorre.

(b) Exatamente um dos eventos ocorre.

(c) Exatamente dois dos eventos ocorre.

(d) Não mais de dois dos eventos ocorrem simultaneamente.

Exercício 6 (*Meyer E. 1.14 p.25)*. O seguinte resultado se refere à probabilidade de que exatamente um dos eventos A ou B. Verifique que

$$P[(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Exercício 7 (*Meyer E. 1.15 p.25)*. Um certo tipo de motor elétrico falha se ocorrer uma das seguintes situações: emperramento dos mancais, queima dos enrolamentos, desgaste das escovas. Suponha que o emperramento seja duas vezes mais provável do que a queima, esta sendo quatro vezes mais provável do que o desgaste das escovas. Qual é a probabilidade de que a falha seja devida a cada uma dessas circunstâncias?

Exercício 8 (*Meyer E. 1.16 p.25)*. Suponha que A e B sejam eventos tais que $P(A) = x$, $P(B) = y$ e $P(A \cap B) = z$. Exprima cada uma das seguintes probabilidades em termos de x, y e z.

(a) $P(A^c \cup B^c)$ **(b)** $P(A^c \cap B)$

(c) $P(A^c \cup B)$ **(d)** $P(A^c \cap B^c)$

Exercício 9 (*Meyer E. 1.19 p.25)*. Um mecanismo tem dois tipos de unidades: I e II. Suponha que se disponha de duas unidades do tipo I e três unidades do tipo II. Defina os evnetos $A_k, k = 1, 2$ e $B_j, j = 1, 2, 3$ da seguinte maneira: A_k : a k-ésima unidade do tipo I está funcionando adequadamente. Finalmente, admita que C represente o evento: o mecanismo funciona. Admita que o mecanismo funcione se ao menos uma unidade do tipo I e ao menos duas unidades do tipo II funcionarem; expresse o evento C em termos dos A_k e dos B_j.

Exercício 10 (*Meyer E. 2.2 p.39)*. Em uma sala, 10 pessoas estão usando emblemas numerados de 1 até 10. Três pessoas são escolhidas ao acaso e convidadas a saírem da sala simultaneamente. O número de seu emblema é anotado.

(a) Qual é a probabilidade de que o menor número de emblema seja 5?

(b) Qual é a probabilidade de que o maior número de emblema seja 5?

(c) Determine $F(x)$.

(d) Determine $P(X \leq 1, 6)$.

Exercício 11 (*Meyer E. 2.4 p.39)*. Uma remessa de 1500 arruelas contém 400 peças defeituosas e 1100 perfeitas. Duzentas arruelas são escolhidas ao acaso (sem reposição) e classificadas.

(a) Qual é a probabilidade de que sejam encontradas exatamente 90 peças defeituosas?

(b) Qual é a probabilidade de que se encontrem ao menos 2 peças defeituosas?

Exercício 12 (*Meyer E. 2.21 p.40)*. A urna 1 contém x bolas brancas e y bolas vermelhas. A urna 2 contém z bolas brancas e v bolas vermelhas. Uma bola é escolhida ao acaso da urna 1 e posta na urna 2. A seguir, uma bola é escolhida ao acaso da urna 2. Qual será a probabilidade de que esta bola seja branca?

Exercício 13 (*Meyer E.3.4 p.61 adaptado)*. Uma caixa contém 4 válvulas defeituosas e 6 perfeitas. As válvulas são verificadas extraindo-se uma válvula ao acaso, ensaiando-a e repetindo-se o procedimento até que todas as 4 válvulas defeituosas sejam encontradas. Qual será a probabilidade de que a quarta válvula defeituosa seja encontrada:

(a) no quinto ensaio?

(b) no décimo ensaio?

Exercício 14 (*Meyer E.3.7 p.61)*. Suponha que temos duas urnas 1 e 2, cada uma com duas gavetas. A urna 1 contém uma moeda de ouro em uma gaveta e uma moeda de prata na outra gaveta. Enquanto que a urna 2 contém uma moeda de ouro em cada gabeta. Uma urna é escolhida ao acaso. A seguir uma de suas gavetas é aberta ao acaso. Verifica-se que a moeda encontrada nessa gaveta é de ouro. Qual a probabilidade de que a moeda provenha da urna 2?

Exercício 15 (*Meyer E.3.8 p.61)*. Um saco contém três moedas, uma das quais foi cunhada com duas caras, enquanto as duas outras moedas são normais e não viciadas. Uma moeda é tirada ao acaso do saco e jogada quatro vezes, em sequência. Se sair cara todas as vezes, qual é a probabilidade de que essa seja a moeda de duas caras?

Exercício 16 (*Meyer E.3.10 p.61)*. Sejam A e B dois eventos associados a um experimento. Suponha que $P(A) = 0, 4$, enquanto $P(A \cup B) = 0{,}7$. Seja $P(B) = p$.

(a) Para que valor de p, A? e B serão mutuamente excludentes?

(b) Para que valor de p, A? e B serão independentes?

Exercício 17 (*Meyer E.3.19 p.62)*. Demonstre que, se A e B forem eventos independentes, também o serão A e B^c, A^c e B, A^c e B^c.

Exercício 18 (*Meyer E.3.24 p.63)*. Verifique que o teorema da multiplicação $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, estabelecido para dois eventos, pode ser estendido para três eventos da seguinte forma

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C).$$

Exercício 19 (*Meyer E.3.29 p.63)*. Demonstre que se $P(A|B) > P(A)$, então $P(B|A) > P(B)$.

Exercício 20 (*Meyer E.3.30 p.64)*. Uma válvula a vácuo pode provir de três fabricantes, com probabilidades $p_1 = 0, 25, p_2 = 0, 50$ e $p_3 = 0, 25$. As probabilidades de que, durante determinado período de tempo, a válvula funcione bem são, respectivamente, 0,1; 0,2 e 0,4. Calcule a probabilidade de que uma válvula escolhida ao acaso funcione bem durante o período de tempo especificado.