Introdução à Pesquisa Operacional - Otimização Linear

Professora: Maristela Oliveira dos Santos - mari@icmc.usp.br
Auxilio 2009: Victor C.B. Camargo
Auxilio 2010 - PAE: Marcos Mansano Furlan - L-1007

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC
Universidade de São Paulo - USP

Agosto de 2010

O que é Pesquisa Operacional?

- Wikipedia:
- "Ramo interdisciplinar da matemática aplicada que faz uso de modelos matemáticos, estatísticos e de algoritmos na ajuda à tomada de decisões".

Associações de PO

- IFORS - International Federation of Operacional Research Societies.
- EURO - The Association of European Operational Research Societes.
- APDIO - Associação Portuguesa de Investigação Operacional.
- SOBRAPO - Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional

Onde pode ser aplicada?

- Pode ser aplicada a problemas onde é necessário especificar, de forma quantitativa, a condução e a coordenação das operações ou atividades dentro de uma organização.
- A natureza da organização pode ser financeira, industrial, militar, governamental, etc.

Tomada de decisões

- (Em uma estrada) Qual o melhor caminho a tomar?
- (Na bolsa de valores) Em que companhias investir?
- (Em uma indústria) O que e em que ordem produzir?
- (Em um trabalho em grupo) Que pessoas alocar a que tarefas?
- (Em uma companhia de distribuição) Que rede (elétrica, de gás, etc.) instalar ?
- (Em uma companhia de distribuição) Que rede (elétrica, de gás, etc.) instalar?

Um breve histórico de PO

- 1939-1945: Durante a 2ª Guerra Mundial, as gerências militares britânica e americana empregaram uma abordagem científica para tratamento de problemas de gerenciamento de recursos escassos (radares, tropas, munição, remédios etc.), de forma eficaz.
- 1936: British military applications: Foi utilizado o termo "operational research".
- Problema: Como usar radares? (Como aumentar a eficiência da informação fornecida por radares)

Um breve histórico de PO

- Segunda Guerra Mundial: Problema: Tamanho dos comboios!
- O que é melhor usar ?
- vários comboios pequenos (mais rápidos)?
- poucos comboios grandes (mais protegidos)?

II Guerra Mundial

- Melhoria das operações utilizadas:
- Operations research - Pesquisa Operacional

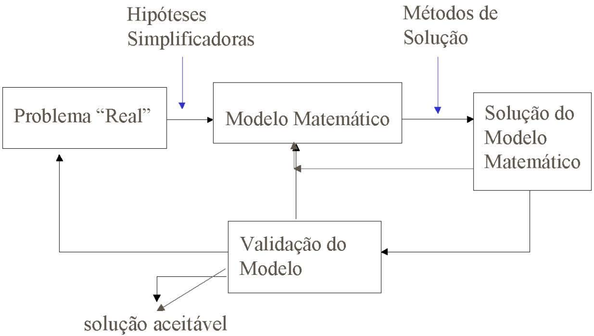
Um breve histórico de PO

- 1947: Início do interesse das indústrias na utilização das técnicas desenvolvidas na área militar, para auxiliar no planejamento e controle da produção.
- A maioria desses problemas é formulada através de modelos matemáticos lineares.

Um breve histórico de PO

- 1949: *George B. Dantzig* apresenta o Método Simplex para resolver problemas de otimização linear (equações e (ou) inequações lineares).
- *George B. Dantzig* - propõe o Método Simplex enquanto trabalhava como Consultor em Matemática no controle da força aérea americana.
- mais datas(http://www.lionhrtpub.com/orms/orms-10-02/frhistorysb1.html)

Diagrama de um projeto de PO



Construindo um modelo matemático

- Passo Fundamental: Ouvir aquele que lida com o problema real.
- Passo 1: Descobrir o que deve ser determinado (variáveis do problema).
- Passo 2: Descobrir o que está disponível (dados do problema).
- Passo 3: Reproduzir os caminhos que levam a uma solução (equações) .

Problema de Otimização

- A busca de uma solução mais adequada entre diversas soluções alternativas traz consigo os elementos de um Problema de Otimização:
- um critério de avaliação das soluções alternativas, o qual nos permite dizer que uma solução é "melhor" que outra (objetivo ou subjetivo).
- A este critério de avaliação chamamos de função objetivo, que buscamos otimizar, ou seja, maximizar ou minimizar.
- Por outro lado, as soluções alternativas devem ser passíveis de execução indicando a presença de restrições que devem ser respeitadas.

Problema de Otimização

- De outra forma: temos uma função f, chamada função objetivo, definida no conjunto de soluções alternativas, digamos Ω.
- Um problema de otimização matemática é definido por:

$$min\ f(\mathbf{x})\ \mathbf{x} \in \Omega$$

Problema de Otimização

- Dependendo do comportamento de $f(x)$ e de como o conjunto Ω é descrito, temos diferentes classes de problemas de otimização, para os quais uma variedade de métodos de solução tem sido desenvolvida.
- Otimização linear.
- Otimização não linear.
- Otimização Inteira.
- Controle ótimo.

No curso: IPO

- Parte I .
- Modelar problemas linearmente. Resolver usando o método simplex de Dantzig.
- Parte II.
- Entender problemas importantes (grafos / estoque).
- Resolver usando algoritmos exatos ou aproximados.

No curso: PM

- Modelar problemas linearmente. Resolver usando o método simplex de Dantzig.
- Estudar variações do simplex (variáveis canalizadas)
- Modelar problemas lineares com variáveis inteiras.
- Resolver usando técnicas apropriadas: programação dinâmica e branch and bound

Aplicações

Pesquisa Operacional - Aplicações

- indústria de petróleo: extração, refinamento, mistura e distribuição.
- indústria de alimentos: ração animal (problema da mistura).
- planejamento da produção: dimensionamento de lotes (o que, quando e quanto produzir?).
- indústria siderúrgica: ligas metálicas (problema da mistura).
- indústria de papel: otimização do processo de cortagem de bobinas.
- indústrias de móveis: otimização do processo de cortagem de placas retangulares.
- aplicações financeiras: otimização do fluxo de caixa, análise de carteiras de investimento.

Problema da Mistura

O PROBLEMA DA MISTURA

Problema da mistura

- Materiais disponíveis são combinados para gerar novos produtos com características convenientes;
- Um dos primeiros problemas de otimização linear implementados com sucesso na prática.
- Abordagens:
  - Ração;
  - Ligas metálicas;
  - Composição de filtros de areia.

Problema da mistura - Ração

- Queremos saber quais as quantidades ideais de cada ingrediente para fazer uma quantidade de ração, com as necessidades nutricionais atendidas e o custo total dos ingredientes seja o menor possível.
- Temos os ingredientes e seus custos:
  - Milho (A_1) - R$ 65,00 /Kg
  - Farinha de ossos (A_2) - R$ 30,00 /Kg

Problema da mistura - Ração

- Para fazer uma certa quantidade de ração para, digamos, aves, é necessário uma certa quantidade nutrientes, digamos, vitamina A (V_a), vitamina B (V_b) e proteína (V_c).
- Os ingredientes apresentam esses nutrientes determinadas unidades (un):
  - A_1 - **2 un. de** V_a, **3 un. de** V_b e **1 un. de** V_c;
  - A_2 - **3 un. de** V_a, **2 un. de** V_b;

Problema da mistura - Ração

- Deseja-se prepara uma ração que contenha no mínimo 7 unidades de V_a, 9 unidades de V_b e 1 unidade de V_c.
- Determinar a quantidade dos alimentos necessárias para satisfazer a necessidades da ração.

Nutrientes	Ingredientes A_1	A_2	Qtde Mínima
Vitamina A	2	3	7
Vitamina B	3	2	9
Proteína	1	0	1
Custos (R$/kg)	65	30	

Problema da mistura - Pergunta-se

- Como misturar (as quantidades) dos ingredientes para produzir a ração de menor custo possível?
- A mistura atende as necessidades de nutrientes?

Problema da mistura - O que decidir?

- Quantidades dos ingredientes presentes na mistura?
- Decisões: Denominadas Variáveis de decisão.
- Definindo
- x_1 =quantidade de ingrediente do tipo 1 presente na mistura (u.m).
- x_2 =quantidade de ingrediente do tipo 2 presente na mistura (u.m).

Problema da mistura - Decidir para que?

- função custo (f)
- O custo mínimo seria nulo se não fosse as quantidades mínimas de nutrientes a serem atendidas (Vitamina A, Vitamina B e Proteína)(os custos são positivos). Objetivo: minimizar o custo total da mistura.
- Custo total é dado por uma função objetivo. $f(x_1, x_2) = 65x_1 + 30x_2$.
- Devemos determinar x_1 e x_2 tal que $f(x_1, x_2)$ seja o menor possível. $min\ f(x_1, x_2) = 65x_1 + 30x_2$

Modelagem do Exemplo 1

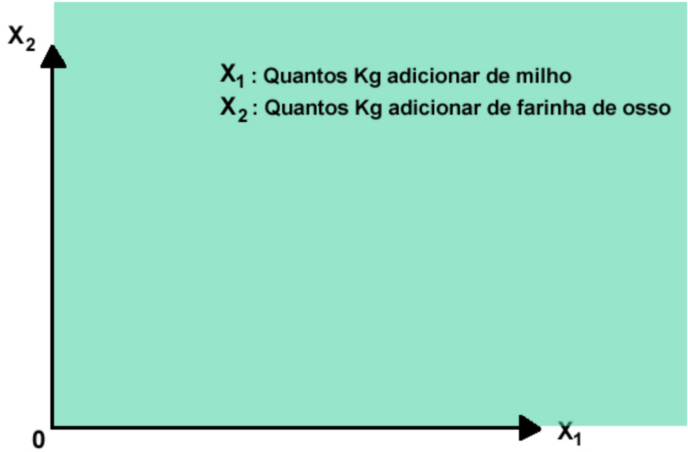
Considere que as composições de vitamina A, vitamina B e proteína na ração sejam satisfeitas.

Modelo Matemático:

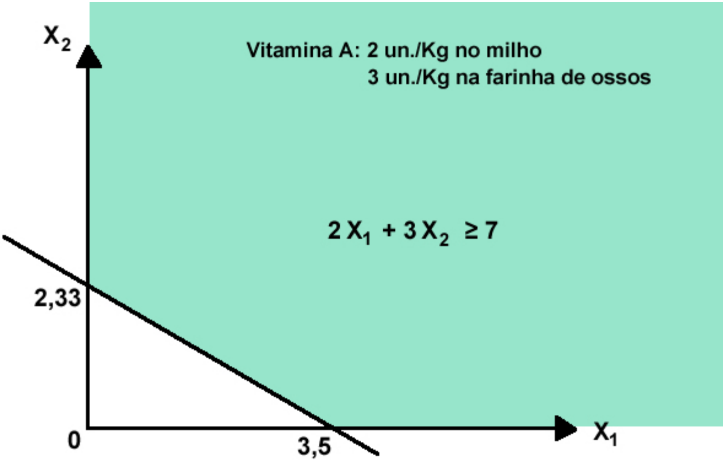
$$min\ f(x_1, x_2) = 65x_1 + 30x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 9 \\ 1x_1 + 0x_2 &\geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

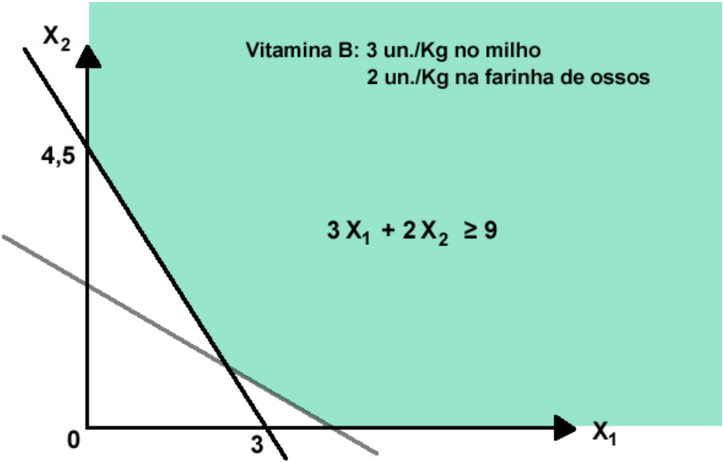
Problema da mistura - Ração



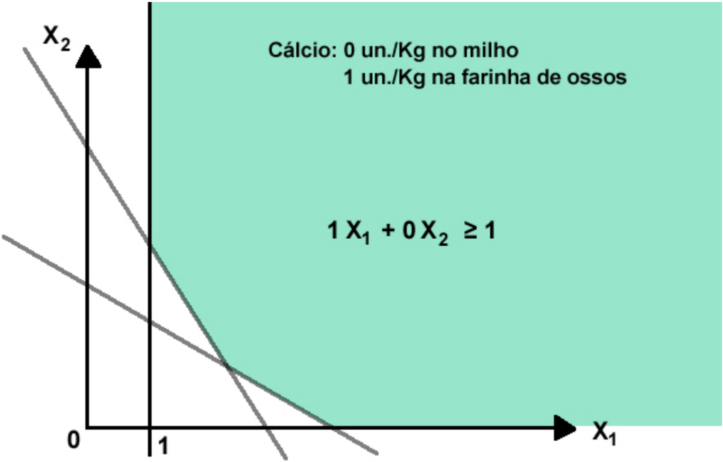
Problema da mistura - Ração



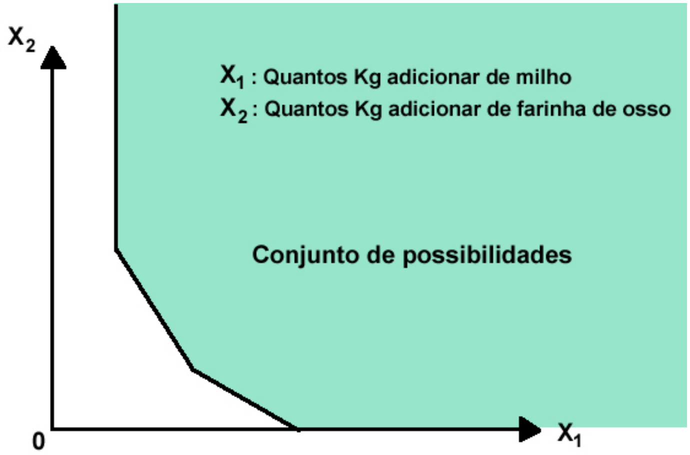
Problema da mistura - Ração



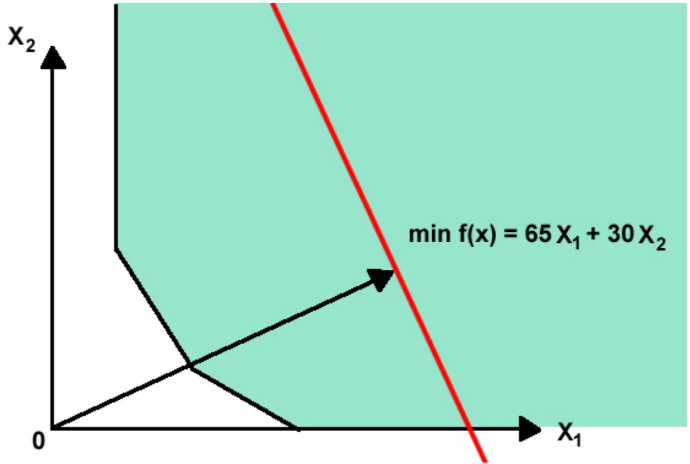
Problema da mistura - Ração



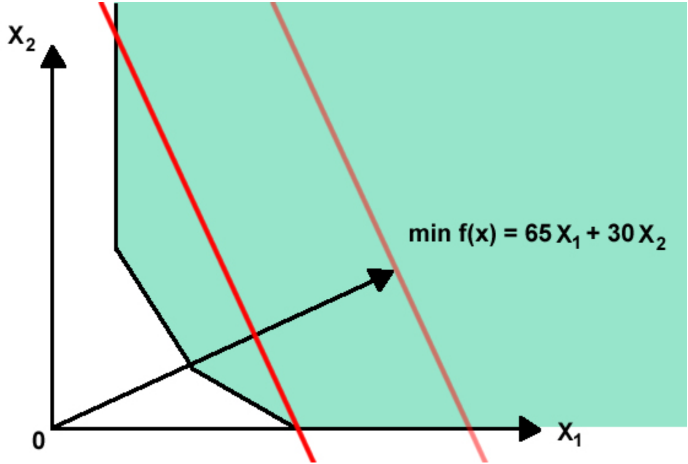
Problema da mistura - Ração



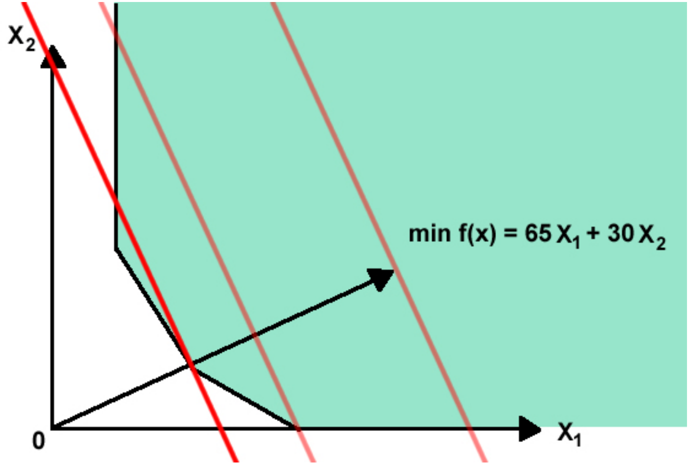
Problema da mistura - Ração



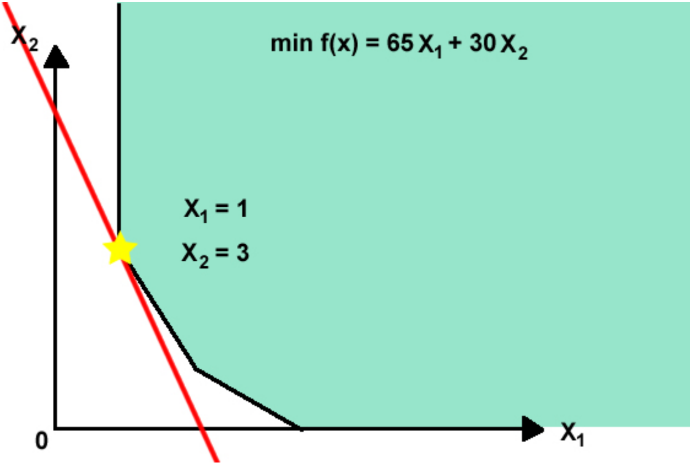
Problema da mistura - Ração



Problema da mistura - Ração



Problema da mistura - Ração



OUTRAS APLICAÇÕES - Ligas metálicas

- Ligas metálicas são produzidas a partir de vários insumos (lingotes de ferro, grafite, sucatas industriais, entre outros).
- Cada insumo tem uma composição (quantidades de carbono, silício, manganês etc) e custo conhecidos.
- A composição da liga é determinada por normas técnicas da metalurgia (quantidades de carbono, silício, manganês etc).
- Deseja-se determinar as quantidades de cada insumo a serem fundidas, satisfazendo as normas técnicas da metalurgia com o menor preço final possível.

OUTRAS APLICAÇÕES - Composição de areias para filtro

- Areias são usadas na constituição de filtros de Estações de Tratamento de Águas de abastecimento;
- Diferentes tipos de areias com composições granulométricas distintas estão disponíveis em vários locais;
- Custos de dragagem, transporte, seleção e preparo para utilização de cada areia variam;
- Areias devem ser dispostas em camadas que devem obedecer composições granulométricas estabelecidas por norma;
- O problema consiste em combinar os volumes de areia provenientes de cada local de modo a atender às especificações da norma, com o menor custo possível.

Exemplo 2 - Barragem de concreto

- Na implantação de uma barragem de grande consumo de concreto, decidiu-se utilizar como fontes de agregados graúdos: Britas graníticas, seixos rolados e pedra britada comercial.
- Os custos e as composições granulométricas de cada agregado e a composição granulométrica ideal são dados no gráfico a seguir.

Dados do problema da barragem de concreto

	Agregados graúdos (%)			
Faixas gran.	Britas	Seixos	Pedras	Comp. Ideal (%)
2,4-19	0	0,05	0,20	0,10
19-38	0,10	0,35	0,78	0,20
38-76	0,20	0,60	0,02	0,35
76-152	0,70	0	0	0,35
Custos	$R\$6$	$R\$7$	$R\$18$	

Variáveis de decisão:

$x_1 =$ qde de britas graníticas (m^3);
$x_2 =$ qde de seixos rolados (m^3);
$x_3 =$ qde de pedras britadas comercial (m^3).

Modelagem do exemplo do problema da barragem de concreto

$$min\ f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 7x_2 + 18x_3$$

$$\begin{array}{llllll}
 & 0,05x_2 & +\,0,20x_3 & \geq & 0,10 \\
0,10x_1 & +\,0,35x_2 & +\,0,78x_3 & \geq & 0,20 \\
0,20x_1 & +\,0,60x_2 & +\,0,02x_3 & \geq & 0,35 \\
0,70x_1 & & & \geq & 0,35 \\
x_1 & +\,x_2 & +\,x_3 & = & 1 \\
x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

Problema de planejamento da produção - mix de produção

O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

O Problema de Produção

- Função objetivo – maximizar a margem de contribuição dos produtos;
- Primeiro conjunto de restrições – fabricação dos produtos deve levar em conta a capacidade limitada dos recursos;
- Segundo conjunto de restrições – quantidade de produtos produzida não deve ser inferior à mínima e nem superior à máxima preestabelecida.

Exemplo 1 - Problema de Produção

- Uma padaria produz dois tipos de produtos: pão (P_1) e massa de pizza (P_2).
- Quatro diferentes matérias primas são utilizadas para a fabricação destes produto: farinha (M_1), fermento (M_2), ovos (M_3) e manteiga (M_4), em que temos em estoque, respectivamente, 60 unidades, 38 unidades, 18 unidades e 55 unidades.
- Para produzir 1 kg de pão são necessárias 1 un. de farinha, 2 un. de fermento e 3 un. de manteiga.
- Para produzir 1 kg de massa de pizza são necessárias 3 un. de farinha, 1 un. de ovo e 1 un. de manteiga.

Exemplo 1 - Problema de Produção

- O pão e massa de pizza são vendidos ao custo de R$ 22/Kg e R$20/Kg.
- Deseja-se determinar a quantidade de cada produto a ser fabricada que maximize as vendas e respeite as restições de estoque.

	Produto		
Matéria prima	P_1	P_2	Estoque
Farinha	1	3	60
Fermento	2	0	30
Ovos	0	1	18
Manteiga	3	1	55
Preço (R$/kg)	22	20	

Exemplo 1 - Problema de Produção

- O que devemos decidir?
- Decisões: Denominadas Variáveis de decisão.
- Definindo
- x_1 =quantidade produzida de pão em kilos.
- x_2 =quantidade produzida de pizza em kilos.

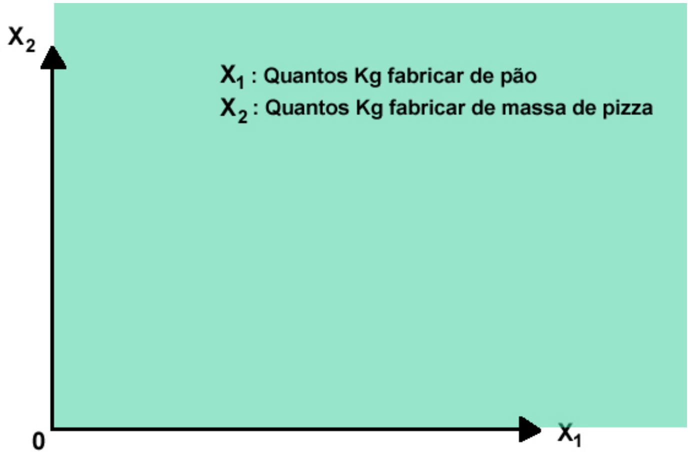
Modelagem do Exemplo 1 - Problema de Produção

Modelo Matemático:

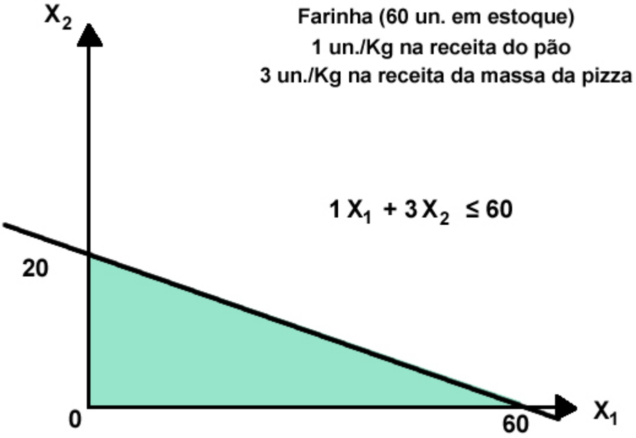
$$max\ f(x_1, x_2) = 22x_1 + 20x_2$$

$$\begin{aligned}
1x_1 + 3x_2 &\leq 60 \\
2x_1 + 0x_2 &\leq 30 \\
0x_1 + 1x_2 &\leq 18 \\
3x_1 + 1x_2 &\leq 55 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

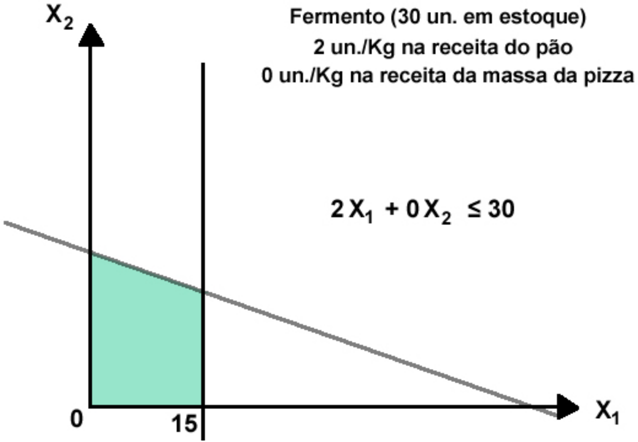
Exemplo 1 - Problema de Produção



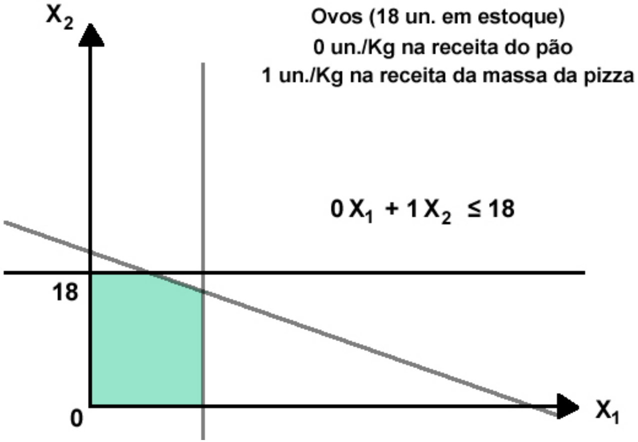
Exemplo 1 - Problema de Produção



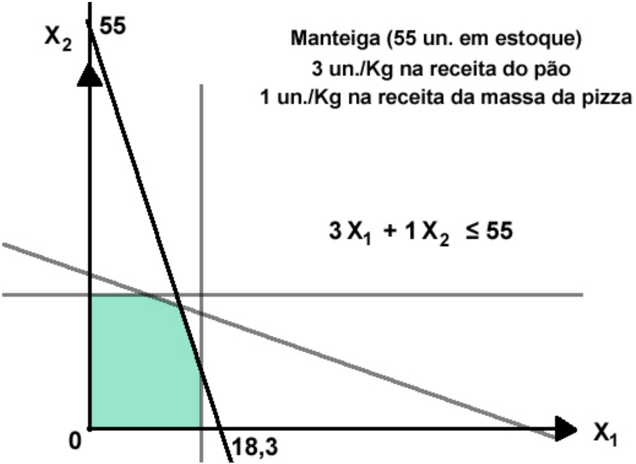
Exemplo 1 - Problema de Produção



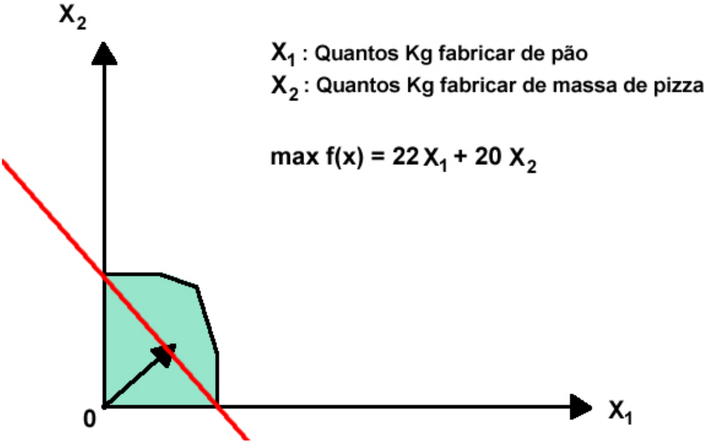
Exemplo 1 - Problema de Produção



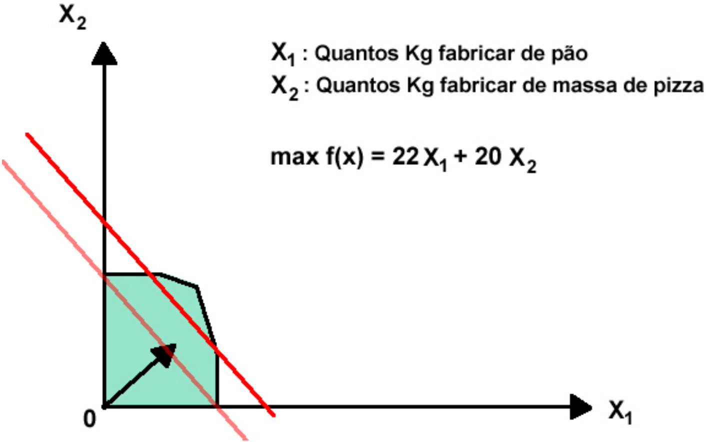
Exemplo 1 - Problema de Produção



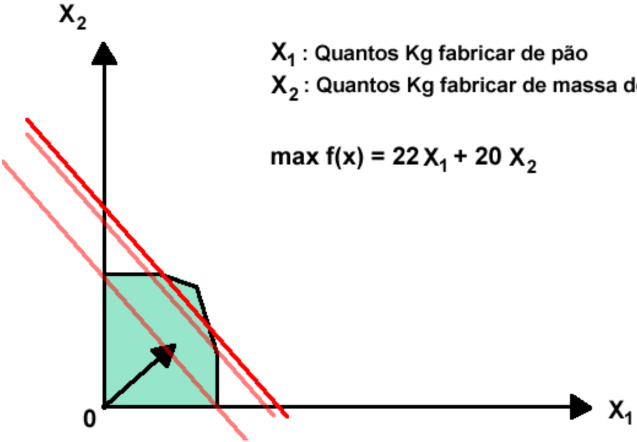
Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção



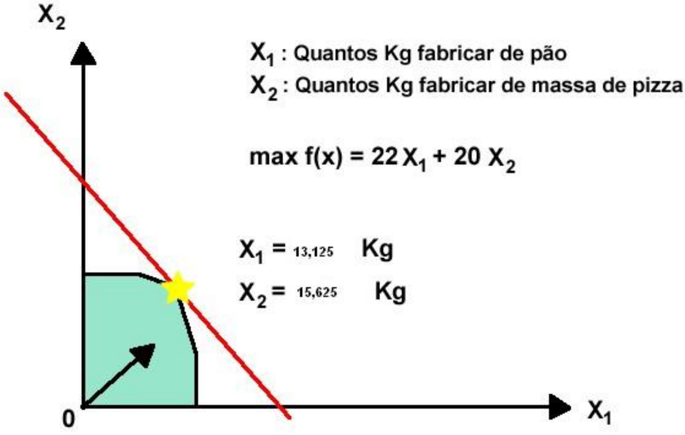
Exemplo 1 - Problema de Produção



X_1 : Quantos Kg fabricar de pão
X_2 : Quantos Kg fabricar de massa de pizza

$$\max f(x) = 22X_1 + 20X_2$$

Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 2 - Produção de geladeiras

- Empresa precisa decidir quais modelos de geladeira instalar em sua nova planta;
- Dois possíveis modelos: luxo e básico.
- No máximo, 1500 unidades do modelo luxo e 6000 unidades do modelo básico podem ser vendidas por mês.
- Empresa contratou 25000 homens-hora de trabalho por mês;
- Os modelos luxos precisam de 10 homens-hora de trabalho para serem produzidos e os modelos básicos, 8 homens-hora.
- A capacidade da linha de montagem é de 4500 geladeiras por mês, pois as geladeiras dividem a mesma linha;
- O lucro unitário do modelo luxo é $\$100,00$ por mês, enquanto o modelo básico lucra $\$50,00$ durante o mesmo período.

Exemplo 1 - Produção de geladeiras

- **Objetivo:** determinar quanto produzir de cada geladeira, de modo a satisfazer todas as restrições e maximizar o lucro da empresa.

Variáveis de decisão:

$x_1 =$ quantidade de geladeiras do modelo luxo a ser produzida por mês.
$x_2 =$ quantidade de geladeiras do modelo básico a ser produzida por mês.

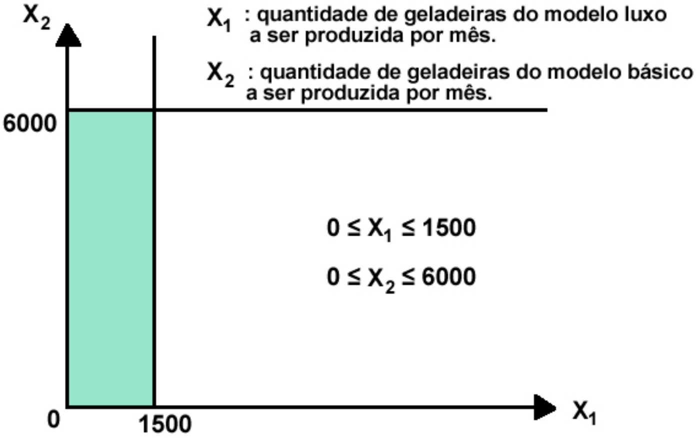
Modelo Matemático

Modelo Matemático:

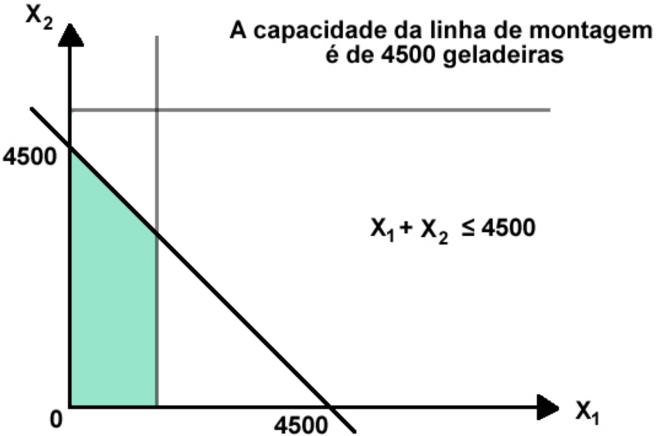
$$max\ f(x_1, x_2) = 100x_1 + 50x_2$$

$$
\begin{aligned}
& 10x_1 + 8x_2 \leq 25000 \\
& x_1 + x_2 \leq 4500 \\
& 0 \leq x_1 \leq 1500 \\
& 0 \leq x_2 \leq 6000.
\end{aligned}
$$

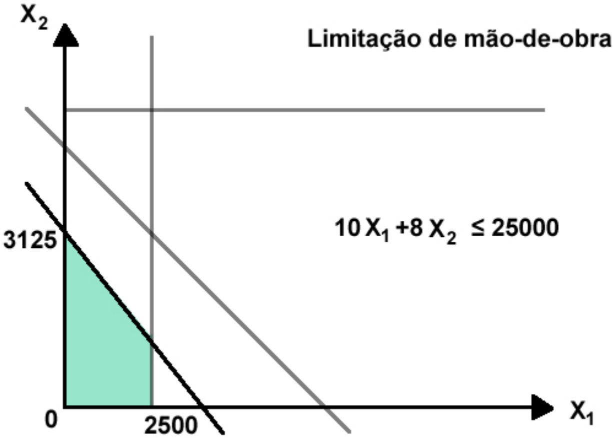
Exemplo 1 - Problema de Produção



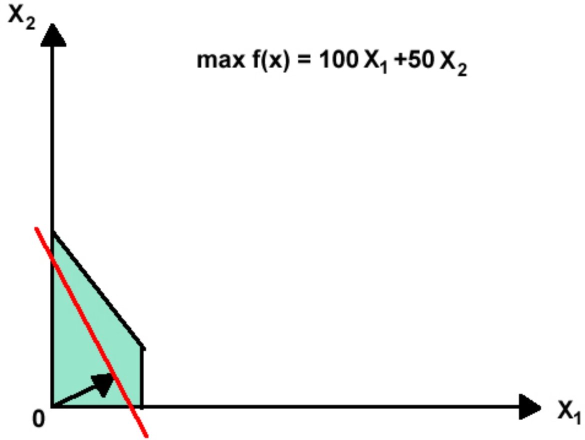
Exemplo 1 - Problema de Produção



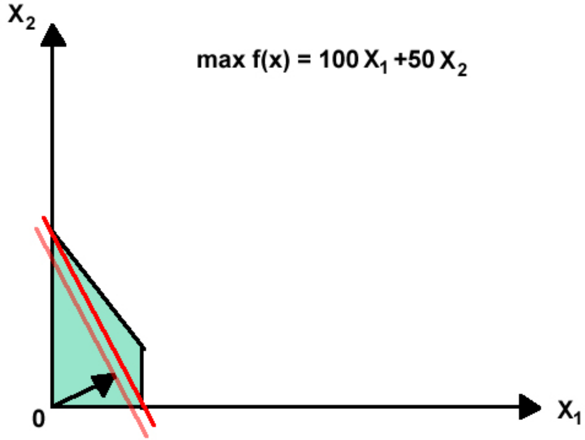
Exemplo 1 - Problema de Produção



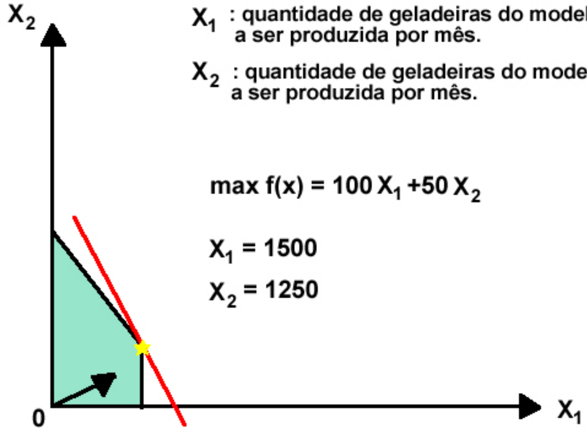
Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção



X_1 : quantidade de geladeiras do modelo luxo a ser produzida por mês.

X_2 : quantidade de geladeiras do modelo básico a ser produzida por mês.

$$\max f(x) = 100\,X_1 + 50\,X_2$$

$X_1 = 1500$

$X_2 = 1250$

Exercício - Problema de Produção

- Pinocchio é uma empresa que produz dois tipos de brinquedos: bonecos e trens. Um boneco é vendido por R$ 27, gasta R$ 10 de matéria-prima de R$ 13 de mão-de-obra. Um trem é vendido por R$ 21, gasta 9 de matéria-prima e R$ 10 de mão-de-obra. A manufatura dos dois brinquedos requer duas operações: carpintaria e acabamento. Um boneco requer 2 horas de acabamento e 1 hora de carpintaria. O trem requer 1 hora de acabamento e 1 hora de carpintaria.A empresa obtém semanalmente toda a matéria-prima necessária para a sua produção. Porém, apenas 100 horas de acabamento e 80 horas de carpintaria podem ser utilizadas na confecção dos brinquedos. A demanda por trens é ilimitada, i.é, todos os trens produzidos são vendidos. Sabe-se, por experiência, que, no máximo, 40 bonecos são vendidos por semana.

Exercício - Problema de Produção

- a. Formule um modelo matemático para esta situação e que possa ser utilizado para maximizar o lucro líquido de Pinocchio SA.
  b. Encontre a(s) solução(ões) ótima(s) graficamente, se houver.

Referências Bibliográficas

- ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Campus/elsevier, 2007. 523 p. ISBN 10-85-352-145-1454-2.
- GOLDBARG, M.; LUNA, H. P. L.; **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Campus, 2000.
- PERIN, C. **Introdução à Programação Linear**. Coleção Imecc - Textos Didáticos. V.2. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2001. 177p.
- MACHADO, A. **Notas de Aula do Prof. Alysson Machado Costa do Curso Introdução a Pesquisa Operacional**, 2008.
- NASCIMENTO, M.C.V.; ALÉM JUNIOR, D.J; CHERRI, L.H.; MASSAMITSU,F. **Apresentações para aulas de modelagem matemática**. São Carlos: ICMC-USP, 2008.