

PIPGEs ICMC/USP UFSCar  
EST5510 – Tópicos de Teoria Assintótica – 2<sup>o</sup>/2018  
4<sup>a</sup> lista de exercícios

1.  $A$  e  $(A_n)_{n \geq 1}$  são eventos de um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Prove que  $I_{A_n} \xrightarrow{D} I_A$  se, e somente se,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$ , em que  $I_A = 1$ , se o evento  $A$  ocorre; 0, caso contrário.
2.  $F_1, \dots, F_k$  são funções distribuição e suas respectivas funções características são  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ . Além disso,  $\lambda_j \in [0, 1]$ , para  $j = 1, \dots, k$ , são tais que  $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ .
  - (a) Prove que  $F = \sum_{j=1}^k \lambda_j F_j$  é uma função distribuição.
  - (b) Prove que a função característica correspondente a  $F$  é dada por  $\sum_{j=1}^k \lambda_j \varphi_j$ .
  - (c) Apresente a função característica de uma variável aleatória com distribuição exponencial dupla (ou Laplace) com parâmetros de localização e escala iguais a 0 e 1, respectivamente.
3. Prove que se  $\varphi$  é uma função característica, então  $\text{Re}(\varphi)$  e  $|\varphi|^2$  também são funções características, em que  $\text{Re}(\varphi)$  denota a parte real de  $\varphi$ .

*Sugestão.*  $\text{Re}(\varphi) = (\varphi + \bar{\varphi})/2$  e  $|\varphi|^2 = \varphi \bar{\varphi}$ .
4. Considere  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Cauchy}(\mu, \sigma)$ , com  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma \in (0, \infty)$ . Prove que  $(X_1 + \dots + X_n)/n$  tem a mesma distribuição de  $X_1$ .
5.  $(X_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Sejam  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  e  $\varphi_j$  a função característica de  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Suponha que  $S_n \xrightarrow{\text{q.c.}} S$ . Prove que a função característica de  $S$  é dada por  $\prod_{j=1}^{\infty} \varphi_j(t)$ , para  $t \in \mathbb{R}$ .
6.  $(X_n)_{n \geq 1}$ ,  $(Y_n)_{n \geq 1}$  e  $X$  são variáveis aleatórias em um mesmo espaço de probabilidade.
  - (a) Prove que se  $X_n \xrightarrow{D} X$  e  $X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0$ , então  $Y_n \xrightarrow{D} X$ .
  - (b) Prove que convergência em probabilidade ( $X_n \xrightarrow{P} X$ ) implica convergência em distribuição ( $X_n \xrightarrow{D} X$ ).
7. Considere  $(X_n)_{n \geq 1}$  tal que  $X_n \xrightarrow{D} X \sim \text{normal}(0, \sigma^2)$  e  $Y_n \xrightarrow{D} Y \equiv \sigma^2$ , com  $\sigma^2 \in (0, \infty)$ . Apresente a distribuição limite de  $(X_n^2/Y_n)_{n \geq 1}$ .
8. Seja  $W_n = c_n X_n + Y_n$ , em que  $c_n = n^{-1}$ ,  $X_n \sim \text{Cauchy}(0, 1)$  e  $Y_n \sim \text{normal}(0, 1)$ , para  $n \geq 1$ .
  - (a) A variável  $W_n$  tem momentos?
  - (b) Apresente a distribuição limite de  $(W_n)_{n \geq 1}$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .
  - (c) Há uma contradição entre os itens (a) e (b)?
9.  $(X_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de variáveis aleatórias tal que  $X_n \xrightarrow{D} X$ .
  - (a) Prove que se  $Y_n = X_n + o_p(1)$ , então  $Y_n \xrightarrow{D} X$ .
  - (b) Prove que se  $W_n = X_n \{1 + o_p(1)\}$ , então  $W_n \xrightarrow{D} X$ .