USP – ICMC – SME0810 - Métodos Não Paramétricos
1ª prova – 2º/2013

S O L U Ç Ã O

1. Deve ser testada $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta \neq \theta_0$ utilizando o teste do sinal, em que θ é a mediana. Em uma amostra de n observações, o menor valor possível da probabilidade de significância (valor-p) é atingido quando $B_{\text{obs}} = 0$ ou quando $B_{\text{obs}} = n$. Em uma amostra de tamanho $n = 5$ e supondo que um destes dois valores foi observado, calcule o valor-p correspondente e realize o teste com um nível de significância de 5%. Qual a sua decisão? Comente sua resposta levando em conta que 0 e n são os valores mais extremos da estatística de teste B.
   Solução. Como a distribuição nula de B, que é binomial(5, 1/2), é simétrica em relação à sua média, temos que valor-$p = 2 \times P_0(B = 0) = 2 \times P_0(B = 5) = 2 \times 1/2^5 = 0,0625$. Sendo assim, com $\alpha = 5\%$, não rejeitamos H_0 mesmo em uma situação que é a mais extrema em termos de afastamento da hipótese nula. Este fato se deve ao reduzido tamanho da amostra. Por exemplo, se $n = 6$, então valor-p = 0,03125 ($<$ 0,05).

2. Em uma certa região a distribuição do número de dias com chuva em uma dada semana do ano foi observado durante um período de 100 anos. As frequências encontram-se abaixo. Pode ser afirmado que o número de dias com chuva segue a distribuição binomial(7; 0,1)?

Dias com chuva	0	1	2	3	4	5, 6 e 7	Total
Frequência	57	30	9	3	1	0	100

   Solução. Temos $k = 8$ valores diferentes para o número de dias. Utilizando a expressão
$$n\binom{7}{j} \times 0,1^j \times 0,9^{7-j}, \;\; j = 0, 1, \ldots, 7,$$
   com $n = 100$ obtemos as frequências esperadas (`esp`) apresentadas abaixo.

```
i obs (f)  esp (e)
1 57       47,82969
2 30       37,20087
2 9        12,40029
4 3        2,29635
5 1        0,25515
6 0        0,01701
7 0        0,00063
8 0        0,00001
```

   Com os valores acima calculamos $Q_{\text{obs}} = \sum_{i=1}^{8}(f_i - e_i)^2/e_i = 6,49$. Para $\alpha = 0,05$, o valor crítico obtido da distribuição χ^2_7 é 14,07 (Nota 2), de modo que com base no teste qui-quadrado de bondade de ajuste, os dados indicam que a distribuição do número de dias com chuva segue a distribuição binomial(7; 0,1).

   <u>Obs.</u> (i) Uma aproximação de Monte Carlo para o valor-p baseada em 5000 repetições é 0,1608. (ii) Encontramos cinco frequências esperadas menores do que 5. A aproximação pela distribuição χ^2_7 não é satisfatória. Os valores correspondentes a $i = 4, \ldots, 8$ poderiam ser combinados em uma classe.

3. Dados de tensão de ruptura de blocos de concreto, em N/mm^2, foram coletados em uma amostra com 12 blocos fornecendo os resultados abaixo. Verifique se a distribuição Weibull(a, b) ajusta-se bem a estes dados, sendo que $F_X(x) = 1 - \exp\big(-(x/b)^a\big)$, $a = 11$ e $b = 15$. O que você pode afirmar sobre o valor-p do teste realizado?

   13,7 13,8 13,9 14,1 14,3 14,6 14,8 15,1 15,7 16,1 16,4 16,6

   Solução. Com os dados da amostra e a expressão $F_0(x) = 1 - \exp\big(-(x/15)^{11}\big)$ obtemos os resultados abaixo, em que $0 <$ `eps` $< \min(x_{(i)} - x_{(i-1)},\ i = 2, \ldots, n)$.

```
   x      Sn(x)      F0(x) |Sn(x) - F0(x)| |F0(x) - Sn(x-eps)|
13,7 0,08333333 0,3085135     0,225180177          0,30851351
13,8 0,16666667 0,3294368     0,162770170          0,24610350
13,9 0,25000000 0,3512269     0,101226850          0,18456018
```

```
14,1 0,33333333 0,3972774     0,063944058          0,14727739
14,3 0,41666667 0,4463060     0,029639291          0,11297262
14,6 0,50000000 0,5242247     0,024224748          0,10755808
14,8 0,58333333 0,5779917     0,005341658          0,07799167
15,1 0,66666667 0,6589845     0,007682175          0,07565116
15,7 0,75000000 0,8082480     0,058247976          0,14158131
16,1 0,83333333 0,8867452     0,053411841          0,13674517
16,4 0,91666667 0,9306486     0,013981955          0,09731529
16,6 1,00000000 0,9526029     0,047397090          0,03593624
```

Calculamos $D_n = \max_{\texttt{x}} \left(\texttt{|Sn(x) - F0(x)|, |F0(x) - Sn(x-eps)|} \right) = 0,3085$. Consultando a tabela da NOTA 1, temos que $0,10 <$ valor-$p < 0,20$. Adotando um nível de significância de 5% e utilizando o teste de Kolmogorov-Smirnov, os conclui-se que a distribuição $\mathsf{Weibull}(11,15)$ ajusta-se bem aos dados.

4. Os dados abaixo referem-se ao tempo de uso, em h, de uma bateria recarregável.

   1,5 2,2 0,9 1,3 2,0 1,6 1,8 1,5 2,0 1,2 1,7

   (a) Apresente uma estimativa para o tempo mediano. (b) Apresente um intervalo de confiança para o tempo mediano com probabilidade de cobertura próxima a 95%. (c) Pode ser afirmado que o tempo mediano é igual a 1,9 h?

   SOLUÇÃO. (a) Supondo que temos uma a.a. de uma distribuição contínua com mediana única, utilizamos a mediana amostral como estimador. As observações (x) ordenadas encontram-se abaixo.

   0,9 1,2 1,3 1,5 1,5 1,6 1,7 1,8 2,0 2,0 2,2

   Como $n = 11$, consultando a posição $(n+1)/2 = 6$ na amostra ordenada obtemos $x_{(6)} = 1,6$h como estimativa do tempo mediano.

   (b) Tomando uma v.a. $B \sim \mathsf{binomial}(11, 1/2)$, calculamos $\mathrm{P}(B \geqq 11) = 0,00049$, $\mathrm{P}(B \geqq 10) = 0,00586$, $\mathrm{P}(B \geqq 9) = 0,03271$ e $\mathrm{P}(B \geqq 8) = 0,11328$. Portanto, $b_{1-\alpha/2} = 9$, correspondendo a $\alpha = 2 \times 0,03271 = 0,06542$ e $1 - \alpha = 0,93458$ é a probabilidade mais próxima de $0,95$. Calculamos $C_\alpha = n + 1 - b_{1-\alpha/2} = 3$. Uma estimativa intervalar para o tempo mediano é dada por $(x_{(3)}, x_{(9)}) = (1,3; 2,0)$, em h.

   (c) Observando o intervalo do item (b), como $1,9 \in (1,3; 2,0)$, os dados permitem afirmar que o tempo mediano é 1,9 h.

NOTA 1. Abaixo são apresentados alguns valores de probabilidades da cauda direita da distribuição da estatística D_n de Kolmogorov-Smirnov para $n = 12$.

d	0,296	0,338	0,375	0,449
$\mathrm{P}(D_{12} \geq d)$	0,20	0,10	0,05	0,01

NOTA 2. Abaixo são apresentados alguns valores de w tais que $\mathrm{P}(W \geq w)$, sendo que $W \sim \chi^2_g$.

	$\mathrm{P}(W \geq w)$			
g	0,50	0,25	0,10	0,05
3	2,37	4,11	6,25	7,81
7	6,35	9,04	12,02	14,07
8	7,34	10,22	12,36	15,51