$1^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE I - SME 0800

Professora Juliana Cobre

Exercício 1. Peças que saem de uma linha de produção são marcadas defeituosas (D) ou não defeituosas (N). As peças são inspecionadas e sua condição registrada. Isto é feito até que duas peças defeituosas consecutivas sejam fabricadas ou que quatro peças tenham sido inspecionadas, aquilo que ocorra em primeiro lugar. Descreva o espaço amostral para este experimento.

Exercício 2.
- **(a)** Uma caixa com N lâmpadas contém r lâmpadas $(r < N)$ com filamento partido. Essas lâmpadas são verificadas uma a auma, até que uma lâmpada defeituosa seja encontrada. Descreva um espaço amostra para este experimento.
- **(b)** Suponha que as lâmpadas acima sejam verificadas uma a uma, até que todas as defeituosas tenham sido encontradas. Descreva o espaço amostral para este experimento.

Exercício 3. Considere quatro objetos a, b, c e d. Suponha que a ordem em que tais objetos sejam ludos represente o resultado de um experimento. Sejam os eventos A e B definidos por $A = \{a \text{ está na primeira posição}\}$ e $B = \{a \text{ está na segunda posição}\}$
- **(a)** Enumere todos os elementos do espaço amostral.
- **(b)** Enumere todos os elementos dos eventos $A \cap B$ e $A \cup B$.
- **(c)** Qual é a probabilidade de a máquina encher as caixas mais do que o necessário ou encher menos do que o necessário?

Exercício 4. Um lote contém peças pesando $5, 10, 15, \ldots, 50$ gramas. Admitimos que ao menos duas peças de cada pesa sejam encontradas no lote. Duas peças são retiradas do lote. Sejam X o peso da primeira peça escolhida e Y o peso da segunda. Portanto, o par de números (X, Y) representa um resultado simples do experimento. Empregando o plano XY, descreva o espaço amostra e os seguintes eventos:
- **(a)** $\{X = Y\}$
- **(b)** $\{Y > X\}$
- **(c)** A segunda peça é duas vezes mais pesada que a primeira.
- **(d)** A primeira peça pesa menos de 10 gramas que a segunda peça.
- **(e)** O peso médio de duas peças é menor do que 30 gramas.

Exercício 5. Sejam A, B e C três eventos associados a um experimento. Exprima em notações de conjuntos, as seguintes afirmações verbais.
- **(a)** Ao menos um dos eventos ocorre.
- **(b)** Exatamente um dos eventos ocorre.
- **(c)** Exatamente dois dos eventos ocorre.
- **(d)** Não mais de dois dos eventos ocorrem simultaneamente.

Exercício 6. O seguinte resultado se refere à probabilidade de que exatamente um dos eventos A ou B. Verifique que

$$P[(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Exercício 7. Um certo tipo de motor elétrico falha se ocorrer uma das seguintes situações: emperramento dos mancais, queima dos enrolamentos, desgaste das escovas. Suponha que o emperramento seja duas vezes mais provável do que a queima, esta sendo quatro vezes mais provável do que o desgaste das escovas. Qual é a probabilidade de que a falha seja devida a cada uma dessas circunferências?

Exercício 8. Suponha que A e B sejam eventos tais que $P(A) = x$, $P(B) = y$ e $P(A \cap B) = z$. Exprima cada uma das seguintes probabilidades em termos de x, y e z.

(a) $P(A^c \cup B^c)$ **(b)** $P(A^c \cap B)$
(c) $P(A^c \cup B)$ **(d)** $P(A^c \cap B^c)$

Exercício 9. Um mecanismo tem dois tipos de unidades: I e II. Suponha que se disponha de duas unidades do tipo I e três unidades do tipo II. Defina os evnetos $A_k, k = 1, 2$ e $B_j, j = 1, 2, 3$ da seguinte maneira: A_k : a k-ésima unidade do tipo I está funcionando adequadamente. Finalmente, admita que C represente o evento: o mecanismo funciona. Admita que o mecanismo funcione se ao menos uma unidade do tipo I e ao menos duas unidades do tipo II funcionarem; expresse o evento C em termos dos A_k e dos B_j.

Exercício 10. Em uma sala, 10 pessoas estão usando emblemas numerados de 1 até 10. Três pessoas são escolhidas ao acaso e convidadas a saírem da sala simultaneamente. O número de seu emblema é anotado.
- **(a)** Qual é a probabilidade de que o menor número de emblema seja 5?
- **(b)** Qual é a probabilidade de que o maior número de emblema seja 5?
- **(c)** Determine $F(x)$.
- **(d)** Determine $P(X \leq 1, 6)$.

Exercício 11. Uma remessa de 1500 arruelas contém 400 peças defeituosas e 1100 perfeitas. Duzentas arruelas são escolhidas ao acaso (sem reposição) e classificadas.
- **(a)** Qual é a probabilidade de que sejam encontradas exatamente 90 peças defeituosas?
- **(b)** Qual é a probabilidade de que se encontrem ao menos 2 peças defeituosas?

Exercício 12. A urna 1 contém x bolas brancas e y bolas vermelhas. A urna 2 contém z bolas brancas e v bolas vermelhas. Uma bola é escolhida ao acaso da urna 1 e posta na urna 2. A seguir, uma bola é escolhida ao acaso da urna 2. Qual será a probabilidade de que esta bola seja branca?

Exercício 13. Uma caixa contém 4 válvulas defeituosas e 6 perfeitas. As válvulas são verificadas extraindo-se uma válvula ao acaso, ensaiando-a e repetindo-se o procedimento até que todas as 4 válvulas defeituosas sejam encontradas. Qual será a probabilidade de que a quarta válvula defeituosa seja encontrada:
- **(a)** no quinto ensaio?
- **(b)** no décimo ensaio?

Exercício 14. Suponha que temos duas urnas 1 e 2, cada uma com duas gavetas. A urna 1 contém uma moeda de ouro em uma gaveta e uma moeda de prata na outra gaveta. Enquanto que a urna 2 contém uma moeda de ouro em cada gabeta. Uma urna é escolhida ao acaso. A seguir uma de suas gavetas é aberta ao acaso. Verifica-se que a moeda encontrada nessa gaveta é de ouro. Qual a probabilidade de que a moeda provenha da urna 2?

Exercício 15. Um saco contém três moedas, uma das quais foi cunhada com duas caras, enquanto as duas outras moedas são normais e não viciadas. Uma moeda é tirada ao acaso do saco e jogada quatro vezes, em sequência. Se sair cara todas as vezes, qual é a probabilidade de que essa seja a moeda de duas caras?

Exercício 16. Um saco contém três moedas, uma das quais foi cunhada com duas caras, enquanto as duas outras moedas são normais e não viciadas. Uma moeda é tirada ao acaso do saco e jogada quatro vezes, em sequência. Se sair cara todas as vezes, qual é a probabilidade de que essa seja a moeda de duas caras?
- **(a)** Para que valor de p, A? e B serão mutuamente excludentes?
- **(b)** Para que valor de p, A? e B serão independentes?

Exercício 17. Demonstre que, se A e B forem eventos independentes, também o serão A e B^c, A^c e B, A^c e B^c.

Exercício 18. Verifique que o teorema da multiplicação $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, estabelecido para dois eventos, pode ser estendido para três eventos da seguinte forma

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C).$$

Exercício 19. Demonstre que se $P(A|B) > P(A)$, então $P(B|A) > P(B)$.

Exercício 20. Uma válvula a vácuo pode provir de três fabricantes, com probabilidades $p_1 = 0,25, p_2 = 0,50$ e $p_3 = 0,25$. As probabilidades de que, durante determinado período de tempo, a válvula funcione bem são, respectivamente, 0,1; 0,2 e 0,4. Calcule a probabilidade de que uma válvula escolhida ao acaso funcione bem durante o período de tempo especificado.