PIPGEs ICMC – USP/UFSCar

EST5102 – Inferência Estatística – 2024/1

1ª lista de exercícios

1. Qual(is) das seguintes parametrizações é(são) identificável(is)?

   (a) $X_i \overset{\text{indep.}}{\sim} \mathsf{normal}(\alpha_i + \tau, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$. $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \tau, \sigma^2)^\top$ e $P_{\boldsymbol{\theta}}$ é a distribuição de $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$.

   (b) Como no item 1a, mas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ satisfazendo $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$.

   (c) $X_{ij} \overset{\text{indep.}}{\sim} \mathsf{normal}(\alpha_i + \lambda_j + \tau, \sigma^2)$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, k$.
   $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \tau, \sigma^2)^\top$ e $P_{\boldsymbol{\theta}}$ é a distribuição de $\boldsymbol{X} = (X_{ij}, j = 1, \ldots, n, i = 1, \ldots, k)^\top$.

   (d) $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2 + \sigma_\delta^2 & \beta_1 \sigma^2 \\ \beta_1 \sigma^2 & \beta_1^2 \sigma^2 + \sigma_\epsilon^2 \end{bmatrix} \right)$,
   em que $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \sigma_\epsilon^2, \sigma_\delta^2)^\top$, $(\beta_0, \beta_1)^\top \in \mathbb{R}^2$, $\sigma^2 > 0$, $\sigma_\epsilon^2 > 0$, $\sigma_\delta^2 > 0$ e $P_{\boldsymbol{\theta}}$ é a distribuição de $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias iid com distribuição geométrica, sendo que $P_\theta(x) = f(x; \theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$, $0 < \theta < 1$. Utilize a definição para provar que $\sum_{i=1}^n X_i$ é uma estatística suficiente para θ. Existe uma forma mais simples de obter esta prova? Se sim, qual?

3. Pode ser provado que duas estatísticas $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$ são equivalentes se, e somente se, $\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{T}_1)$, em que $\boldsymbol{H}$ é uma função bijetora. Quais das seguintes estatísticas são equivalentes?

   (a) $\prod_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n \log(X_i)$, $X_i > 0$.

   (b) $\sum_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n \log(X_i)$, $X_i > 0$.

   (c) $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)^\top$ e $\left(\overline{X}, \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2\right)^\top$.

4. Prove que uma estatística $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ é suficiente para $\boldsymbol{\theta}$ se, e somente se, a distribuição condicional de $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X})$ dada $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ não depende de $\boldsymbol{\theta}$ para qualquer estatística $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X})$.

5. Considere $\theta \in (0, 1)$ e

$$\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{multinomial}\left(m, \frac{1}{2} + \frac{\theta}{4}, \frac{1}{4}(1-\theta), \frac{1}{4}(1-\theta), \frac{\theta}{4}\right).$$

   Apresente uma estatística suficiente para θ.

6. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com função densidade $f(x; \theta) = \exp(\theta - x) I_{(\theta, \infty)}(x)$. Prove que $T(\boldsymbol{X}) = \min(X_1, \ldots, X_n)$ é uma estatística suficiente para θ.

7. Sejam $X_i \overset{\text{indep.}}{\sim} f(\cdot;\theta)$, em que $f(x;\theta) = \exp(i\theta - x) I_{(i\theta,\infty)}(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Represente graficamente $f(x;\theta)$. Prove que $\min_{i=1}^{n}(X_i/i)$ é uma estatística suficiente para θ.

8. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}(\theta, a\theta^2)$, sendo que $a > 0$ é uma constante conhecida e $\theta > 0$. Apresente uma estatística suficiente para θ.

9. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{uniforme}(\theta_1, \theta_2)$, em que $\theta_1 < \theta_2$. Apresente uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^\top$.

10. Apresente uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta}$ no exercício 1d.