ICMC – USP

EST5510 – Tópicos de Teoria Assintótica – 2º/2017

7ª lista de exercícios

1. $(X_1, Y_1)^\top, \ldots, (X_n, Y_n)^\top$ é uma amostra aleatória de uma distribuição com $\boldsymbol{\mu} = (\mu_X, \mu_Y)^\top = \big(\mathrm{E}(X_1), \mathrm{E}(Y_1)\big)^\top$ e matriz de covariâncias

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

O coeficiente de correlação linear de Pearson amostral é denotado por r_n, para $n > 1$.
(a) Prove que $\sqrt{n}(r_n - \rho) \xrightarrow{\mathrm{D}} W \sim \mathsf{normal}(0, \lambda^2)$, sendo que a variância λ^2 deve ser escrita como função de $\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{W})$, em que $\boldsymbol{W} = \big((X_1 - \mu_X)^2, (X_1 - \mu_X)(Y_1 - \mu_Y), (Y_1 - \mu_Y)^2\big)^\top$.
(b) Supondo que $(X_1, Y_1)^\top \sim \mathsf{normal}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, prove que

$$\sqrt{n}(r_n - \rho) \xrightarrow{\mathrm{D}} W \sim \mathsf{normal}(0, (1 - \rho^2)^2).$$

Sugestão. A distribuição de $Y_1|X_1 = x$ é $\mathsf{normal}\big(\mu_Y + \rho\sigma_2(x - \mu_X)/\sigma_1, \sigma_2^2(1 - \rho^2)\big)$.
(c) Desenvolva um estudo de simulação de Monte Carlo para ilustrar o resultado do item anterior.

2. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com momentos centrais $\mu_j = \mathrm{E}(X_1 - \mu)^j$ finitos, $j = 2, 3, \ldots$, em que $\mu = \mathrm{E}(X_1)$. Os coeficientes $\beta_1 = \mu_3^2/\mu_2^3$ e $\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2$ são utilizados para quantificar assimetria e curtose de uma distribuição, respectivamente. Os momentos centrais amostrais são dados por $m_{jn} = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^j/n$, para $j \geq 1$, em que $\overline{X}_n = \sum_{i=1} X_i/n$. Os coeficientes β_1 e β_2 podem ser estimados por $\widehat{\beta}_{1n} = m_{3n}^2/m_{2n}^3$ e $\widehat{\beta}_{2n} = m_{4n}/m_{2n}^2$.
(a) Verifique a consistência dos estimadores $\widehat{\beta}_{1n}$ e $\widehat{\beta}_{2n}$.
(b) Apresente a distribuição limite, quando $n \to \infty$, de

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{1n} - \beta_1 \\ \widehat{\beta}_{2n} - \beta_2 \end{pmatrix}.$$

3. $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição $\mathsf{normal}(\mu_i, \sigma_i^2)$, para $j = 1, \ldots, n_i$ e $i = 1, \ldots, k$. Definimos $S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2$, em que $\overline{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}/n_i$, $i = 1, \ldots, k$.
(a) Apresente a distribuição limite, quando $n_i \to \infty$, de $\sqrt{n_i}\,(S_i^2/n_i - \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, k$.
(b) Com base no item anterior, apresente sequências cujas distribuições limite não dependem de σ_i^2, $i = 1, \ldots, k$.